



Серия
Суперкомпьютерное
Образование

В. М. Головизнин, М. А. Зайцев,
С. А. КАРАБАСОВ, И. А. Короткин

НОВЫЕ АЛГОРИТМЫ вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов



Суперкомпьютерный
консорциум
университетов России



**Координационный совет
Системы научно-образовательных центров
суперкомпьютерных технологий**

Председатель Координационного совета

В. А. Садовничий,
ректор МГУ имени М. В. Ломоносова,
академик

Заместители председателя совета

Е. И. Моисеев,
декан факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова,
академик

А. В. Тихонравов,
директор Научно-исследовательского вычислительного центра
МГУ имени М. В. Ломоносова,
профессор

Члены совета

В. Н. Васильев, ректор Санкт-Петербургского национального исследовательского государственного университета информационных технологий, механики и оптики, чл.-корр. РАН, профессор; **В. Г. Захаревич**, ректор Южного федерального университета, профессор; **Н. Н. Кудрявцев**, ректор Московского физико-технического института, чл.-корр. РАН, профессор; **Г. В. Майер**, ректор национального исследовательского Томского государственного университета, профессор; **А. А. Фаткулин**, проректор по науке и инновациям Дальневосточного федерального университета, профессор; **Е. В. Чупрунов**, ректор национального исследовательского Нижегородского государственного университета, профессор; **А. Л. Шестаков**, ректор национального исследовательского Южно-Уральского государственного университета, профессор; **В. Н. Чубариков**, декан механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор; **М. И. Панасюк**, директор Научно-исследовательского института ядерной физики МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор; **Вл. В. Воеводин**, заместитель директора Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ имени М. В. Ломоносова, исполнительный директор НОЦ «СКТ-Центр», член-корреспондент РАН.



В. М. Головизнин, М. А. Зайцев,
С. А. Карабасов, И. А. Короткин

Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов

Монография

Рекомендовано
Ученым советом факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК)
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
для использования в учебном процессе



Издательство Московского университета
2013

Г60

Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А.

Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов: Монография / Предисл.: В. А. Садовничий. – М.: Издательство Московского университета, 2013. – 472 с., илл.; 8 с. (цв. вклейка). – (Серия «Суперкомпьютерное образование»)

ISBN 978-5-211-06426-3

В настоящей монографии, предназначенной для студентов, аспирантов и научных сотрудников, собран воедино и систематизирован материал многолетней работы большой группы специалистов в области математического моделирования и вычислительной математики. Среди множества направлений и подходов, конкурирующих в современном мире, авторы выбрали сравнительно новое направление (метод «КАБАРЕ»), к развитию которого они оказались в той или иной мере причастны. Данный подход, развиваемый в МГУ имени М.В. Ломоносова, ИБРАЭ РАН, ЦАГИ и ряде других российских и зарубежных (Кембриджский университет, Лондонский университет «Квин Мэри») организаций, имеет хорошие конкурентные позиции и активно развивается.

В предлагаемой монографии очень подробно описана ключевая идея метода «КАБАРЕ» в ее развитии – от простейших линейных одномерных уравнений гиперболического типа до методик решения многомерных задач гидродинамики и газовой динамики на неструктурированных сетках в сложных пространственных областях, характерных для приложений индустриальной математики.

Книгу можно рассматривать в качестве учебного пособия и основы для разработки вычислительного практикума по методам решения уравнений математической физики с доминирующими процессами сеточного переноса.

Ключевые слова: математическое моделирование, вычислительная гидродинамика, численные методы, турбулентные течения, параллельные алгоритмы.

**УДК 007 (075)
ББК 32.973.2**

© Коллектив авторов, 2012

© Издательство Московского университета, 2013

ISBN 978-5-211-06426-3

Уважаемый читатель!

Вы держите в руках одну из книг серии «Суперкомпьютерное образование», выпущенную в рамках реализации проекта комиссии Президента РФ по модернизации и технологическому развитию экономики России «Создание системы подготовки высококвалифицированных кадров в области суперкомпьютерных технологий и специализированного программного обеспечения». Инициатором издания выступил Суперкомпьютерный консорциум университетов России.

Серия включает более 20 учебников и учебных пособий, подготовленных ведущими отечественными специалистами в области суперкомпьютерных технологий. В книгах представлен ценный опыт преподавания суперкомпьютерных технологий в таких авторитетных вузах России, как МГУ, ННГУ, ТГУ, ЮУрГУ, СПбГУ ИТМО и многих других. При подготовке изданий были учтены рекомендации, сформулированные в Своде знаний и умений в области суперкомпьютерных технологий, подготовленном группой экспертов Суперкомпьютерного консорциума, а также международный опыт.

Современный уровень развития вычислительной техники и методов математического моделирования дает уникальную возможность для перевода промышленного производства и научных исследований на качественно новый этап. Эффективность такого перехода напрямую зависит от наличия достаточного числа высококвалифицированных специалистов. Данная серия книг предназначена для широкого круга студентов, аспирантов и специалистов, желающих изучить и практически использовать параллельные компьютерные системы для решения трудоемких вычислительных задач.

Издание серии «Суперкомпьютерное образование» наглядно демонстрирует тот вклад, который внесли участники Суперкомпьютерного консорциума университетов России в создание национальной системы подготовки высококвалифицированных кадров в области суперкомпьютерных технологий, а также их четкое понимание ответственности за подготовку высококвалифицированных специалистов и формирование прочного научного фундамента, столь необходимого для эффективного использования суперкомпьютерных технологий на практике.

Ректор Московского университета,
Президент Суперкомпьютерного консорциума
университетов России,
академик РАН *В.А. Садовничий*

Оглавление

Введение	12
Литература	18
Глава 1. Схема «КАБАРЕ» для простейших уравнений гиперболического типа	19
Введение	19
1.1. Схема «КАБАРЕ» для простейшего линейного одномерного скалярного уравнения переноса	22
1.1.1. Простейшее уравнение переноса	22
1.1.2. Связь схемы «КАБАРЕ» со схемой Upwind LeapFrog (схема Айзерлиса)	24
1.1.3. Каналы высокой точности схемы «КАБАРЕ»	25
1.1.4. Законы сохранения	26
1.1.5. Квадратичные законы сохранения и достаточные условия устойчивости	27
1.1.6. Диссипативные и дисперсионные свойства схемы «КАБАРЕ»	30
1.1.7. Групповая скорость переноса возмущений в схеме «КАБАРЕ»	37
1.1.8. Управление диссипативными и дисперсионными свойствами схемы «КАБАРЕ»	38
1.1.9. Нелинейная коррекция схемы «КАБАРЕ»	40
1.1.10. Схема «КАБАРЕ» для уравнения конвекции – диффузии	42
1.1.11. Примеры тестовых расчетов. Линейный перенос в случае разрывной и непрерывной функции начального распределения	45
1.1.12. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на случай дивергентной формы представления линейного уравнения переноса	47
1.1.13. Некоторые комментарии	50
1.2. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на одномерные скалярные квазилинейные законы сохранения гиперболического типа	51
1.2.1. Базовый алгоритм	51
1.2.2. Проблема переключения потоков в схеме «КАБАРЕ»	53
1.2.3. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на случай нелинейных потоков	53
1.2.4. Частная задача Римана для уравнения с выпуклыми потоками	55
1.2.5. Форма представления оператора Римана, не опирающаяся на свойство дифференцируемости функции потока	57
1.2.6. Процедура согласования начальных значений консервативных и потоковых переменных и оператор переключения потоковых переменных	57
1.2.7. Невыпуклые функции потоков. Принцип минимума парциальной локальной вариации	58
1.2.8. Одномерные квазилинейные уравнения с произвольными потоками	59
1.2.9. Примеры тестовых расчетов	60
1.2.10. Некоторые комментарии	64
1.3. Метод «КАБАРЕ» для простейшей системы квазилинейных гиперболических уравнений	65
1.3.1. Простейшая система нелинейных гиперболических уравнений (Р-система) ..	65
1.3.2. Характеристическая форма представления Р-системы. Волны разрежения ..	66
1.3.3. Схема «КАБАРЕ» для расчета волн разрежения Р-системы Ориентация на характеристическую форму записи	67
1.3.4. Схема «КАБАРЕ» с монотонизатором	69
1.3.5. Консервативный вариант схемы «КАБАРЕ»	70
1.3.6. Сравнение со схемой «крест»	71
1.3.7. Законы сохранения и разрывные решения Р-системы	73
1.3.8. Тестовые задачи и эмпирическое исследование скорости сходимости	76

1.3.9. Схема «КАБАРЕ» для одномерных уравнений политропного газа в эйлеровых переменных	82
1.3.10. Примеры расчетов волн разрежения	87
1.3.11. Законы сохранения и разрывные решения для системы уравнений политропного газа в эйлеровых переменных	90
1.3.12. Задача о распаде произвольного разрыва	93
1.3.13. Примеры тестовых расчетов и эмпирическое исследование сходимости	94
Заключение к главе 1	97
Литература к главе 1	98
Глава 2. Численное моделирование затухания однородной турбулентности в одномерном случае	101
Введение	101
2.1. Разностные схемы	103
2.1.1. Схема «КАБАРЕ»	103
2.1.2. Схема Лакса – Вендроффа	106
2.1.3. Схема «Крест»	107
2.1.4. Схема Аракавы	108
2.1.5. Схема Годунова	109
2.2. Примеры расчетов	110
2.3. Спектры энергии для различных разностных схем	113
2.4. Структурные функции	117
Заключение к главе 2	119
Литература к главе 2	120
Глава 3. Схема «КАБАРЕ» для одномерных уравнений газовой динамики	122
3.1. Схема «КАБАРЕ» для одномерных уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных	122
3.1.1. Базовый алгоритм	122
3.1.2. Нелинейная коррекция потоков	126
3.1.3. Управляемая схемная диссипация	127
3.1.4. Сильная ударная волна в лагранжевых переменных	131
3.1.5. Сильная волна разрежения в лагранжевых переменных	132
3.1.6. Модельные задачи	133
3.1.7. Комментарии	142
3.2. Одномерные уравнения газовой динамики в эйлеровых переменных	143
3.2.1. Описание балансно-характеристического алгоритма	144
3.2.2. Свойства балансно-характеристического алгоритма	152
3.2.3. Примеры расчетов	157
3.2.4. Исследование точности балансно-характеристического алгоритма на модельных задачах	161
Заключение к главе 3	166
Литература к главе 3	168
Глава 4. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на двумерные ортогональные расчетные сетки	169
4.1. Консервативная и характеристическая формы представления исходных уравнений	169
4.2. Инварианты Римана для баротропных течений	173
4.3. Расчетные сетки и дискретизация физических величин	176

4.4. Консервативная разностная схема второго порядка аппроксимации	177
4.5. Вычисление промежуточных значений консервативных переменных	178
4.6. Локальные инварианты и их перенос в пределах одной ячейки расчетной сетки	180
4.7. Вычисление новых значений потоковых переменных на сеточном множестве $\mathcal{H}_{\sigma_i}$	186
4.8. Звуковые точки	188
4.9. Вычисление новых значений потоковых переменных на сеточном множестве $\mathcal{H}_{\sigma_j}$	191
4.10. Граничные условия	196
4.11. Вычисление новых значений консервативных переменных	202
4.12. Условия вычислительной устойчивости и вычисление величины шага по времени	202
4.13. Примеры тестовых расчетов	203
4.14. Рассеяние плоской звуковой волны на гладком вихре постоянной циркуляции	214
4.14.1. Случай средних акустических волн, $l = 2,5L$	214
4.14.2. Случай коротких акустических волн, $l = 0,036L$	216
4.15. Учет вязкости	219
4.16. Прямое моделирование взаимодействия вихревых пар	226
4.16.1. Постановка задачи	226
4.16.2. Результаты численных расчетов	228
4.17. Приближение слабой сжимаемости	233
4.18. Перенос пассивной примеси	240
4.19. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на случай несжимаемой жидкости	247
4.20. Примеры тестовых расчетов	254
Заключение к гл. 4	257
Литература к главе 4	258
Глава 5. Моделирование затухания однородной изотропной турбулентности по схеме «КАБАРЕ» в двумерной и трехмерной несжимаемой жидкости	260
Введение	260
5.1. Моделирование двумерных турбулентных течений по схеме «КАБАРЕ»	263
5.1.1. Уравнения движения	264
5.1.2. Численный алгоритм	265
5.1.3. Примеры расчетов	275
5.2. Моделирование трехмерных турбулентных течений по схеме «КАБАРЕ»	288
5.2.1. Постановка задачи	288
5.2.2. Численный алгоритм	288
5.2.3. Общие замечания по алгоритму	291
5.2.4. Примеры расчетов	291
Заключение к главе 5	304
Литература к главе 5	305
Глава 6. Прямое моделирование термоконвективных течений в замкнутых двумерных и трехмерных областях	308
Введение	308
6.1. Схема «КАБАРЕ» для моделирования тепловой конвекции несжимаемой жидкости в двумерном случае	310

6.1.1. Математическая модель	310
6.1.2. Дискретизация задачи	313
6.1.3. Граничные условия	319
6.2. Верификация двумерной схемы «КАБАРЕ» при различных числах Рэлея	320
6.2.1. Задача Дэвиса. Течение в квадратной области	320
6.2.2. Ламинарный двумерный тест ERCOFTAC	327
6.2.3. Вертикальный слой в турбулентном режиме	330
6.2.4. Горизонтальный слой в турбулентном режиме	331
6.3. Схема «КАБАРЕ» для моделирования тепловой конвекции несжимаемой жидкости в трехмерном случае	332
6.3.1. Математическая модель	332
6.3.2. Дискретизация задачи	335
6.4. Верификация трехмерной схемы «КАБАРЕ» при различных числах Рэлея	340
6.4.1. Задача Дэвиса. Течение в кубической области	340
6.4.2. Трехмерный турбулентный тест ERCOFTAC	342
6.4.3. Тепловая конвекция в замкнутой области в форме параллелепипеда с соотношением сторон 1:4	349
Заключение к главе 6	353
Литература к главе 6	354
Глава 7. Схема «КАБАРЕ» для уравнений газовой динамики на четырехугольных криволинейных расчетных сетках в случае двух пространственных измерений	356
Введение	356
7.1. Уравнения Эйлера в криволинейных координатах	357
7.2. Разностная аппроксимация законов сохранения	361
7.3. Вычисление потоковых переменных на новом временном слое	367
7.3.1. Процедура линейной экстраполяции локальных инвариантов	370
7.3.2. Процедура нелинейной коррекции потоковых переменных на основе принципа максимума	371
7.3.3. Процедура селекции локальных инвариантов и вычисления новых потоковых переменных	372
7.4. Учет вязкости	375
7.5. Реализация граничных условий	382
7.6. Вопросы аппроксимации	384
7.7. Условия устойчивости. Выбор шага интегрирования по времени	385
7.8. Примеры тестовых расчетов	386
7.8.1. Задача об обтекании цилиндра потенциальным слабосжимаемым потокм газа	386
7.8.2. Дифракция акустического импульса на цилиндре в покоящейся однородной среде	387
Заключение к главе 7	388
Литература к главе 7	389
Глава 8. Схема «КАБАРЕ» для трехмерных нестационарных задач газовой динамики на косоугольных гексагональных сетках	390
8.1. Уравнения Эйлера в криволинейной системе координат	390
8.1.1. Исходные представления уравнений газовой динамики	390
8.1.2. Криволинейная система координат	391
8.1.3. Якобианы и их основные свойства	393

8.1.4. Дивергентное представление якобианов	395
8.1.5. Основные законы сохранения в криволинейных координатах	396
8.1.6. Перевод в криволинейные координаты «простой формы» уравнений газовой динамики	397
8.1.7. Приведение к локально - одномерному характеристическому виду системы уравнений газовой динамики в криволинейных координатах	403
8.1.8. Локально-одномерные характеристические представления уравнений газовой динамики в криволинейных координатах	409
8.1.9. Консервативная запись уравнений Эйлера в криволинейных координатах	412
8.2. Схема «КАБАРЕ» для трехмерных нестационарных задач газовой динамики на криволинейных гексагональных сетках	414
8.2.1. Аппроксимация геометрических характеристик на структурированных гексагональных косоугольных сетках	414
8.2.2. Дивергентное симметризованное определение объема расчетной косоугольной шестигранной ячейки	418
8.2.3. Аппроксимация консервативного представления уравнения Эйлера в криволинейных координатах	419
8.2.4. Первый блок разностных уравнений схемы «КАБАРЕ»	419
8.2.5. Второй блок разностных уравнений схемы «КАБАРЕ»	421
8.2.5.1. Дискретизация геометрических факторов	421
8.2.5.2. Определение локальных римановых инвариантов	424
8.2.5.3. Вычисление новых потоковых переменных на новом временном слое	428
8.2.5.4. Дозвуковые течения	433
8.2.5.5. Сверхзвуковые течения	439
8.2.5.6. Полное число возможных вариантов. Особые точки	440
8.2.5.7. Торможение сверхзвукового потока дозвуковым	441
8.2.5.8. Звуковые точки	442
8.2.5.9. Столкновение и разлет сверхзвуковых течений	442
8.2.6. Третий блок разностных уравнений схемы «КАБАРЕ»	442
8.3. Расчет высокоскоростной турбулентной струи, истекающей из конического сопла	444
8.3.1. Постановка задачи и примеры расчетов в литературе	444
8.3.2. Результаты расчетов по методу «КАБАРЕ»	448
8.3.3. Пример акустического постпроцессинга: дальнее поле	456
8.3.4. Результаты использования метода ФВ – X без учета внешнего квадрупольного поля для струи JEAN	461
Заключение к главе 8	462
Литература к главе 8	462
Заключение	464

Введение

Стремительный рост вычислительных мощностей, наблюдающийся в последние десятилетия, оказывает существенное влияние на все сферы современной науки и техники. Многопроцессорные компьютерные системы петафлопсной производительности (10^{15} операций в секунду) стали реальностью. Системы с быстродействием в несколько терафлопс (10^{12} операций в секунду) – обыденностью. Мир стоит на пороге нового рывка к эксафлопу (10^{18} операций в секунду). Ожидается, что эксафлопсные компьютеры появятся к 2019–2020 годам. К этому времени обыденностью должны стать петафлопсные системы. Меняется и архитектурный облик высокопроизводительных компьютеров – на смену однородным вычислительным системам приходят гетерогенные структуры, объединяющие достоинства обычных арифметических процессоров с возможностями графических ускорителей.

Возникают новые задачи. Бурно развивается кластерная и молекулярная динамика. Прямые расчеты взаимодействия миллиардов атомов прокладывают дорогу к становлению новой научной дисциплины – вычислительного материаловедения. Возникают новые проблемы, связанные с учетом в рамках одной математической модели разномасштабных по времени, пространству (multiscale) и характеру (multiphysics) физических процессов.

Новые черты приобретают и классические направления вычислительной физики, такие, например, как расчеты турбулентных гидродинамических течений, задачи радиационной газовой динамики, переноса нейтронов и излучения, многофазной гидродинамики и т. д.

Так, расчеты турбулентных течений ведутся уже несколько десятилетий на вычислительной технике разных поколений и примерно с одинаковым успехом. Причина в том, что эти задачи относятся к классу задач с «критической точностью». Чтобы адекватно моделировать турбулентность, необходимо использовать расчетные сетки, сопоставимые по размерам с т. н. «колмогоровским» масштабом, на котором происходит диссипация турбулентной энергии в тепловую. При числах Рейнольдса, характерных для течений в технических устройствах, это требует вычислительных мощностей, недостижимых в ближайшие десятилетия при сохранении существующих темпов роста производительности компьютеров. В инженерных расчетах турбулентных течений использовались и используются осредненные характеристики, для описания которых применяются т. н. RANS – модели, существенно опирающиеся на эмпирические закономерности. Переход к петафлопсным вычислениям сопровождается появлением новых подходов (LES, ILES, DES, DNS) к моделированию турбулентности, существенно расширяющих область применимости математического моделирования и уменьшающих их зависимость от эмпирических данных. Ожидаемое увеличение быстродействия еще на три порядка предполагает их дальнейшее развитие и совершенствование.

Реальное быстродействие или вычислительная эффективность многопроцессорных вычислительных систем на прикладных задачах зависит не только от успехов в области электроники, но и от эффективности алгоритмов распараллеливания и качества численных методов, применяемых для расчетов физических процессов. Переход от одних «разностных схем» к другим может повысить реальное быстродействие на

несколько порядков. Если для трехмерной нестационарной задачи можно достичь желаемого результата на более грубой расчетной сетке, например, при увеличении размеров расчетных ячеек по каждому направлению в три раза, то это может привести к возрастанию реального быстродействия в $3^4 = 81$ раз. Если размеры расчетных ячеек можно увеличить в пять раз, то суммарное быстродействие может возрасти в $5^4 = 625$ раз.

Следует подчеркнуть, что такая «арифметика», безусловно, очень приближительная, она может иметь место только в том случае, если переход к новым вычислительным методам не ухудшает характеристик их эффективного распараллеливания.

Настоящая монография посвящена описанию нового универсального подхода к построению эффективных алгоритмов численного решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа и задач с доминирующим сеточным переносом, а также опыту использования этих алгоритмов для решения тестовых, модельных и производственных задач вычислительной гидродинамики на многопроцессорных вычислительных комплексах МГУ им. М.В. Ломоносова.

Авторы не ставили своей целью дать исчерпывающий или хотя бы достаточно полный обзор работ, посвященных выбранному направлению. Описание состояния дел в данной области можно найти в классических монографиях [1–10]. Основное внимание в нашей книге уделено подробному и систематическому описанию одного из современных направлений развития численных методов для решения систем квазилинейных гиперболических уравнений и задач с доминирующим сеточным переносом. Начало данному направлению, в настоящее время известному как схема «КАБАРЕ», было положено в работах А.А. Самарского и В.М. Головизнина [11, 12].

Схема «КАБАРЕ», по существу, представляет собой новый подход к аппроксимации конвективных потоков в задачах с доминирующим переносом. Класс таких задач достаточно широк и включает в себя как ударно-волновые процессы, так и аэроакустику, внешнюю и внутреннюю аэродинамику, вихревые и турбулентные течения при больших числах Рейнольдса, задачи термоконвекции при больших числах Релея и многие другие. Схема также хорошо применима для моделирования газодинамических течений в лагранжевых и смешанных лагранжево-эйлеровых переменных.

Схема «КАБАРЕ» обладает следующим набором свойств, часть из которых можно отнести к числу уникальных:

- максимально компактный вычислительный шаблон, вмещающийся в одну пространственно - временную расчетную ячейку;
- формально второй порядок аппроксимации на течениях, не требующих применения процедуры коррекции потоков;
- естественная процедура коррекции потоков, основанная на прямом использовании принципа максимума для локальных инвариантов Римана;
- универсальность и отсутствие каких-либо настроечных параметров – схема может быть использована для расчета как сверхсильных, так и сверхслабых ударных волн, при этом фронты этих волн, независимо от интенсивности, размазываются на одну расчетную ячейку;
- возможность моделировать распространение акустических волн на фоне сильно неоднородных пространственно-временных течений;

- не приводит к затуханию или разрушению стационарных вихрей, при перемещении вихрей по сетке очень слабо проявляет диссипативные свойства, обусловленные аппроксимационной вязкостью;
- схема явная и не требует каких-либо итерационных процедур;
- в ряде случаев бездиссипативна и всегда обладает минимальной аппроксимационной дисперсией;
- при моделировании затухания однородной изотропной турбулентности правильно передает каскад энергии в инерционном интервале, который охватывает все представимые на расчетной сетке волновые числа;
- может служить основой для расчетов вихревых и турбулентных течений в приближении PerfectLES.

Позитивные свойства схемы «КАБАРЕ» во многом обусловлены тем, что в ней используется расширенный набор переменных, заметно повышающий требования к объему оперативной памяти. Наряду с обычными «консервативными» переменными (компоненты скорости, плотность и полная энергия), относящимися к центрам расчетных ячеек и имеющими смысл средних по объему величин, в схеме используются и т. н. «потокосые переменные» (компоненты скорости, плотность и давление), относящиеся к серединам граней ячеек. В трехмерном случае это приводит к увеличению хранимой информации в четыре раза. Следует отметить, что «консервативные» и «потокосые» переменные не могут быть однозначно выражены друг через друга на временных слоях, отличных от начального. Это значит, что в отличие от всех других известных схем, для вычисления потоков через границы расчетных ячеек необходимо использовать не только основные переменные, но и значения самих потоков на предыдущем временном слое.

Монография состоит из восьми глав.

В первой главе описывается двухслойный консервативный вариант схемы «КАБАРЕ» для простейшего линейного одномерного уравнения переноса с постоянной скоростью [13],

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \quad c = \text{const} > 0,$$

исследуются диссипативные и дисперсионные свойства этой схемы, устанавливается ее связь со схемой Айзерлиса (Upwind LeapFrog) [14], формулируется алгоритм нелинейной коррекции потоков на основе принципа максимума [13, 15], который можно считать неотъемлемой частью схемы «КАБАРЕ». Показаны уникальные диссипативные и дисперсионные свойства схемы.

Далее схема «КАБАРЕ» обобщается на одномерные квазилинейные скалярные уравнения вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial F(\varphi)}{\partial x} = Q(x, t)$$

с достаточно произвольной функцией $F(\varphi)$. Показано, что для корректного определения численных потоков, знания направления наклона характеристик в середине расчетной ячейки оказывается недостаточно, и необходимо формулировать общий принцип построения численных потоков для схемы «КАБАРЕ», который работал бы как для выпуклых, так и для невыпуклых функций потоков. Во второй части первой гла-

вы подробно описан принцип минимума локальных вариаций, приводящий к численным потокам, которые можно считать модификацией потока С.К. Годунова.

Дальнейшее обобщение проводится на простейшую систему одномерных гиперболических уравнений, т. н. Р-систему вида:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(\eta)}{\partial m} = 0.$$

Для построения разностной схемы используется как дивергентная форма представления этих уравнений, так и их характеристическая форма. Привлечение характеристической формы позволяет записать эту систему в виде уравнений переноса Римановых инвариантов, для которых выполняется принцип максимума. Новые значения «поточковых» переменных находятся из характеристического представления исходных уравнений, «консервативных» – из консервативной формы записи.

Р-система описывает как баротропное движение газа в лагранжевых переменных, так и приближение «мелкой воды». Переход к эйлеровым переменным делает ее еще более содержательной, поскольку появляются члены, описывающие сеточный перенос:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial t} + \frac{\partial p(\rho)}{\partial x} = 0.$$

Третья часть первой главы посвящена обобщению нового подхода на этот случай.

Вторая глава монографии посвящена численному моделированию затухания одномерной турбулентности. Следует отметить, что одномерная турбулентность представляет собой чисто умозрительный объект и в природе не встречается, однако исследование нелинейного взаимодействия большого числа гармоник, описываемое уравнением Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

позволяет понять основные особенности как ряда классических разностных схем (схема Лакса – Вендроффа, «Крест» и т. п.), так и схемы «КАБАРЕ» при моделировании коллективных нелинейных явлений.

Третья глава монографии содержит обобщение схемы «КАБАРЕ» на случай одномерной газовой динамики как в лагранжевых переменных

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial m} = 0;$$

$$E = \varepsilon + u^2/2; \quad p = (\gamma - 1) \cdot \varepsilon / \eta,$$

так и в переменных Эйлера:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \cdot E}{\partial x} + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0;$$

$$E = \varepsilon + u^2/2; \quad p = (\gamma - 1) \cdot \varepsilon \cdot \rho.$$

В главе содержатся многочисленные примеры применения новых разностных схем для расчетов модельных и тестовых задач, демонстрирующие неординарные свойства этих схем. Показано, что общая методология построения схемы «КАБАРЕ» остается прежней – вводятся потоковые и консервативные переменные; относительно консервативных переменных записывается консервативная разностная схема, имеющая второй порядок аппроксимации как по времени, так и по пространственным переменным; для вычисления новых значений потоковых переменных используется характеристическая форма записи исходных уравнений; строятся локальные инварианты Римана, значения которых экстраполируются с учетом направления скоростей переноса локальных инвариантов. Для уравнений, описывающих перенос локальных инвариантов Римана, справедлив принцип максимума, который и используется для коррекции полученных линейной экстраполяцией инвариантов на новом временном слое. Для демонстрации вычислительных возможностей новой схемы приводятся примеры тестовых и модельных расчетов.

В четвертой главе книги проводится обобщение техники построения схем типа «КАБАРЕ» на случай двух пространственных переменных. Вначале строится разностная схема для уравнений газовой динамики (уравнений Эйлера) на ортогональных расчетных сетках. При переходе к двум переменным возникает ряд новых моментов. Прежде всего, это схема расщепления уравнения переноса локальных инвариантов Римана по двум пространственным направлениям, затем особенность в реализации алгоритма коррекции локальных инвариантов на основе принципа максимума. Показано, что при предложенном обобщении схемы на многомерный случай сохраняются все ее позитивные свойства, выявленные в одномерном случае. Кроме того, появляется новое свойство: при расчете стационарных вихрей они не подвержены диссипации, обусловленной наличием аппроксимационной вязкости, что имеет место для всех ранее известных схем. При перемещении вихрей по сетке воздействие аппроксимационной вязкости на них также оказывается минимальным. Это говорит о том, что «вихреразрешающие» свойства схемы «КАБАРЕ» заметно выше, чем у других разностных схем даже более высокого порядка аппроксимации.

Далее, в четвертой главе, строятся схемы «КАБАРЕ» для слабосжимаемой и несжимаемой жидкости. Во всех случаях все позитивные черты, полученные в предыдущих случаях, сохраняются.

В пятой главе описывается задача о затухании однородной изотропной турбулентности в случаях двух и трех измерений. Двумерная турбулентность – объект уже вполне реальный. При некоторых специфических условиях она реально наблюдается, например, в мыльных пленках или атмосфере Марса. В отличие от трехмерной однородной изотропной турбулентности наклон спектральной кривой в инерционной области переноса турбулентной энергии составляет не $-5/3$, как в теории Колмогорова, а -3 , в соответствии с теорией Батчеллора, а в некоторых случаях и -4 , как это было предсказано Сэфманом.

Особый интерес в этих задачах представляет размер инерционной области в спектре передачи турбулентной энергии. Показано, что в отличие от других методов, для схемы «КАБАРЕ» размер инерционного интервала покрывает все волновые числа, представимые на используемой расчетной сетке. Это следует как из анализа спектрального разложения, так и из вида структурных функций разных порядков. Для трехмерной турбулентности продемонстрировано хорошее совпадение результатов расчетов с теорией Колмогорова К-41.

Шестая глава посвящена описанию использования схемы «КАБАРЕ» для несжимаемой жидкости при прямом моделировании термоконвективных течений в замкнутых двумерных и трехмерных областях. Результаты расчетов сравниваются с известными экспериментальными результатами и результатами прецизионных расчетов, выполненных в приближении DNS другими авторами. Показано, что при числах Релея вплоть до 10^4 результаты расчетов по схеме «КАБАРЕ», выполненные на относительно грубых расчетных сетках без использования каких-либо настроечных параметров, обеспечивают точность результатов в пределах нескольких процентов.

В седьмой главе описывается обобщение техники «КАБАРЕ» на двумерные неортогональные расчетные сетки. За основу берутся контравариантные компоненты скорости, что облегчает постановку граничных условий на поверхностях с кривизной. Каких-либо принципиальных изменений по сравнению с ортогональными сетками не вносится – изменяются только расчетные формулы в сторону некоторого их усложнения. Приводятся примеры расчетов потенциального обтекания аэродинамических профилей, распространения и дифракции звуковых волн и т. п.

В последней, восьмой главе схема «КАБАРЕ» обобщается на трехмерные косугольные неструктурированные расчетные сетки. В качестве примера использования методики приводится задача о генерации звука реактивным соплом и сравнение результатов расчетов с европейским установочным экспериментом «Джин».

Таким образом, в монографии описаны результаты исследований, проведенных в ИБРАЭ РАН и на кафедре вычислительных методов ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова в период с 1996 по 2011 год. На начальном этапе эти работы частично финансировались также ВНИИЭФ и РФФИ.

Авторы выражают искреннюю признательность А.П. Фаворскому, В.Ф. Копьеву, В.Г. Кондакову, А.А. Канаеву, В.Ю. Глотову, А.В. Данилину, Г.А. Фараносову и С.А. Финогенову за консультации и помощь в написании этой книги.

Результаты работ, представленные в данной книге, получены при частичной поддержке РФФИ, гранты № 12-01-00145-а, 11-07-93938-ДЖИ8_а, 09-01-00569-а, 06-01-00819-а, 06-01-00293-а, 03-01-00225-а, 99-01-01059-а.

Литература

1. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
2. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, 1975.
3. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – М.: МАКС Пресс, 2004. – 332 с.
4. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 607 с.
5. *Анучина Н.Н. и др.,* Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
6. *Белоцерковский О.М. и др.* Численное исследование современных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1974. – 392 с.
7. *Годунов С.К. и др.,* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
8. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
9. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
10. *Hirsch, C.* Numerical Computation of Internal and External Flows. The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, 2nd ed. – John Wiley&Sons, Ltd, 2007.
11. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. – 1998. – 10(1). – Р. 86–100.
12. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Некоторые свойства разностной схемы «КАБАРЕ» // Математическое моделирование. – 1998. – 10(1). – Р. 101–116.
13. *Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М.* Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. – 2003. – 15(9). – Р. 29–48.
14. *Iserles, A.* Generalised lapfrog methods // IMA Journal of Numerical Analysis. – 1986. – 6.
15. *Головизнин В.М., Карабасов С.А.* Нелинейная коррекция схемы «КАБАРЕ» // Математическое моделирование. – 1998. – 12(1). – Р. 107–123.

Глава 1

Схема «КАБАРЕ» для простейших уравнений гиперболического типа

Введение

Рассмотрим систему одномерных линейных дифференциальных уравнений первого порядка в виде:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0; \quad \bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad (1.1)$$

где t, x – время и пространственная координата, $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – вектор независимых переменных, $\mathbf{A}$ – матрица из элементов, не зависящих от переменных $\varphi_i, i = 1, \dots, n$. Частным случаем этой системы является уравнение колебания струны:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0.$$

В этом случае $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Если матрица $\mathbf{A}$ такова, что все ее собственные числа λ_k , вычисляемые из условия

$$\|\mathbf{A} - \lambda_k \cdot \mathbf{E}\| = 0, \quad (1.2)$$

действительны и различны, то система уравнений называется гиперболической по И.Г. Петровскому [1]. Следует отметить, что собственные числа могут быть и кратными, лишь бы эта кратность не мешала приведению матрицы $\mathbf{A}$ к диагональному виду, а сама матрица может быть и нелинейной.

Если $\tilde{l}_k$ – собственные левые векторы матрицы $\mathbf{A}$, отвечающие собственным числам $\lambda_k, k = 1, \dots, n$, то из них можно составить матрицу Ω :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \tilde{l}_1^T \\ \dots \\ \tilde{l}_n^T \end{pmatrix},$$

после умножения на которую системы уравнений (1.1) последняя распадается на n независимых уравнений вида:

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} + \lambda_k \cdot \frac{\partial I_k}{\partial x} = 0; \quad I_k = \bar{I}_k^T \cdot \bar{\varphi}; \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Скалярные величины I_k называют инвариантами Римана [2]. Для нелинейных матриц A инварианты Римана существуют не всегда, и вместо независимых уравнений система приводится к менее изящной, но весьма полезной для практических применений характеристической форме [3]:

$$\left(\bar{I}_k^T \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \right) + \lambda_k \cdot \left(\bar{I}_k^T \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) = 0; \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Характеристическое представление систем уравнений в частных производных гиперболического типа служит основой для «характеристических» [4] и «сеточно-характеристических» [5] методов численного решения этих уравнений.

Приведенные выше рассуждения иллюстрируют особую роль, которую играет простейшее уравнение переноса в решении систем гиперболических уравнений. С другой стороны, это уравнение определяет характер процессов «адвекции – диффузии», описываемых уравнениями вида:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{Pe} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

при доминирующей адвекции (переносе), проявляющейся при больших числах Пекле (Pe), наиболее характерных для промышленных приложений.

Интересно отметить, что наиболее простое по форме записи уравнение в частных производных является одним из наиболее сложных объектов для численного решения [6]. Это связано с амплитудными и фазовыми ошибками, которые появляются у разностных схем в процессе аппроксимации. Амплитудные ошибки приводят к аппроксимационной вязкости, фазовые – к возникновению паразитных локальных экстремумов (численным осцилляциям) – потере свойства монотонности решения. И если амплитудные ошибки, в принципе, можно свести к нулю, то фазовые ошибки принципиально неустраняемы. Это следует из теоремы С.К. Годунова [7], имеющей фундаментальное значение в современной вычислительной математике. Теорема С.К. Годунова утверждает, что разностные схемы для уравнений будут обладать свойством монотонности только в том случае, если их порядок аппроксимации не превышает единицы. Другими словами, формальное повышение порядка аппроксимации не может улучшить качества численного решения уравнений переноса в точках локализации сильных и слабых разрывов и областях больших градиентов.

Использование для аппроксимации простейшего из уравнений переноса классических разностных схем [2], таких как схема «уголок» (Simple Upwind), схема Лакса – Вендроффа [8], схема «крест» (LeapFrog) приводит к удручающим результатам [6].

Начальный профиль, который должен был бы переноситься сколь угодно далеко без изменения своей формы, после прохождения нескольких своих пространственных масштабов, изменяется до неузнаваемости [9,10]. Схема первого порядка устраняет все локальные экстремумы, схемы второго порядка порождают паразитные максимумы и минимумы.

Для улучшения транспортных свойств разностных схем мировое вычислительное сообщество пошло по пути конструирования нелинейных алгоритмов для линейных уравнений с доминирующим переносом. Это, в частности, привело к развитию методов «нелинейной коррекции потоков» [11,12] и т. н. «схемам высокой разрешающей способности» [13–18]. Следует, однако, отметить, что работа в этом направлении еще далека от завершения. Авторы данной монографии не ставили перед собой задачу полного обзора достижений в этой области, полученных в последние десятилетия. Глубокое описание как состояния этого вопроса, так и истории его развития, содержится в монографии [3].

Таким образом, проблему сеточного переноса, или, более точно, адекватного численного моделирования явлений с доминирующим пространственным переносом на неподвижной расчетной сетке, можно причислить к одной из фундаментальных проблем современной вычислительной математики.

Первая часть первой главы данной монографии посвящена подробному описанию нового подхода к решению простейшего уравнения переноса, получившего название «схема «КАБАРЕ»». Изложение здесь ведется, в основном, по оригинальным материалам работ авторов [9, 10, 19, 20].

Во второй части главы проводится обобщение схемы «КАБАРЕ» на одномерные скалярные квазилинейные уравнения вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$$

для достаточно широкого класса функций потока $F(u)$.

Третья часть первой главы содержит дальнейшее обобщение новой методики на простейшие системы квазилинейных гиперболических уравнений. Это т. н. Р-система, описывающая одномерную динамику политропного газа в лагранжевых [21] (массовых) переменных:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P(\eta)}{\partial m} = 0,$$

где η – удельный объем, u – скорость, m – массовая переменная, $P(\eta)$ – давление как заданная функция удельного объема. Далее в этой же части схема «КАБАРЕ» обобщается на уравнение динамики политропного газа в эйлеровых переменных:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} = 0.$$

Здесь $\rho = 1/\eta$ – плотность газа.

1.1. Схема «КАБАРЕ» для простейшего линейного одномерного скалярного уравнения переноса

1.1.1. Простейшее уравнение переноса

Рассмотрим простейшее одномерное линейное уравнение переноса (одномерный скалярный закон сохранения):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad c = \text{const} > 0 \quad (1.6)$$

в ограниченной пространственной области $x \in [0, L]$ с периодическими граничными условиями $u(0, t) = u(L, t)$ и начальными данными $u(x, 0) = u_0(x)$.

Для численного решения этого уравнения введем расчетную сетку ω :

$$\omega := (x_i, t^n); \quad x_{i+1} - x_i = h_{i+1/2} > 0, \quad t^{n+1} - t^n = \tau_{n+1/2} > 0,$$

вообще говоря, неравномерную.

На заданной сетке определим два типа сеточных переменных. Переменные первого типа, которые в дальнейшем будем называть «потокowymi», отнесем к узлам расчетной сетки, и будем обозначать как u_i^n . Переменные второго типа будем относить к центрам пространственных ячеек, называть «консервативными», и обозначать как $U_{i+1/2}^n, U_{i+1/2}^{n+1/2}$.

Аппроксимируем уравнение (1.6) простейшей разностной схемой:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + c \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} + \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} \right) = 0. \quad (1.7)$$

Очевидно, что эта схема обладает вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству на неравномерных расчетных сетках, и определена на минимально возможном пространственно-временном шаблоне. Однако она не замкнута – в ней отсутствует связь между консервативными и потоковыми переменными.

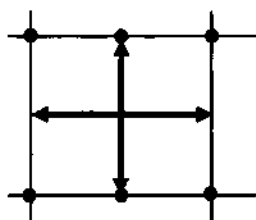


Рис. 1.1a. Вычислительный шаблон уравнения (1.7)

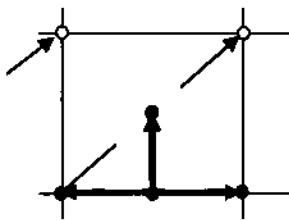


Рис. 1.1b. Вычислительный шаблон уравнения (1.8)

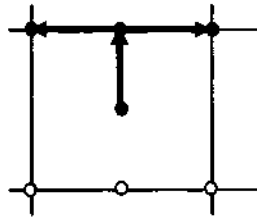


Рис. 1.1c. Вычислительный шаблон третьего уравнения системы (1.12)

Осуществим недостающее замыкание следующим образом. Вначале вычислим значение консервативной переменной $U_{i+1/2}^{n+1/2}$ на промежуточном временном слое $t_{n+1/2}$ по явной схеме первого порядка аппроксимации по времени:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} = 0. \quad (1.8)$$

Затем, определим неизвестные значения потоковых переменных на новом временном слое по формуле линейной экстраполяции:

$$u_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n. \quad (1.9)$$

Сеточные соотношения (1.7), (1.8), (1.9) — представляют собой замкнутую систему разностных уравнений, получившую название «схема «КАБАРЕ»».

Нетрудно видеть, что схема «КАБАРЕ», несмотря на то, что в нее входит уравнение (1.8), сохраняет второй порядок аппроксимации по времени. Действительно, из уравнения (1.8) находим:

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = U_{i+1/2}^n - \frac{\tau_{n+1/2}}{2} \cdot c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}}. \quad (1.10)$$

С другой стороны, разлагая решение дифференциальной задачи (1.6), при условии, что оно имеет достаточную гладкость, в ряд Тейлора, получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} u(x_{i+1/2}, t_{n+1/2}) &= u(x_{i+1/2}, t_n) + \frac{\tau_{n+1/2}}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x_{i+1/2}, t_n)} + O(\tau_{n+1/2}^2) = \\ &= u(x_{i+1/2}, t_n) - \frac{\tau_{n+1/2}}{2} \cdot c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_{i+1/2}, t_n)} + O(\tau_{n+1/2}^2) = \\ &= u(x_{i+1/2}, t_n) - \frac{\tau_{n+1/2}}{2} \cdot c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} + O(\tau_{n+1/2}^2 + \tau_{n+1/2} \cdot h_{i+1/2}^2) = \\ &= \left\{ U_{i+1/2}^n - \frac{\tau_{n+1/2}}{2} \cdot c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} \right\} + O(\tau_{n+1/2}^2 + \tau_{n+1/2} \cdot h_{i+1/2}^2), \end{aligned}$$

откуда, с учетом (1.10), следует

$$u(x_{i+1/2}, t_{n+1/2}) = U_{i+1/2}^{n+1/2} - \tau_{i+1/2} \cdot O(h_{i+1/2}^2, \tau_{i+1/2}). \quad (1.11)$$

Это обеспечивает второй порядок аппроксимации соотношения (1.9).

Схему «КАБАРЕ» можно записать в более симметричном виде типа «предиктор-корректор»:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} &= 0; \\ u_{i+1}^{n+1} &= 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n; \\ \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + c \cdot \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из первого и третьего уравнений этой системы следует уравнение (1.7).

Схема «КАБАРЕ» относится к классу «ориентированных», т. е. зависимых от направления переноса схем. При $c < 0$ направление экстраполяции потоковых переменных изменится, и вместо соотношения (1.9) следует использовать соотношение:

$$u_i^{n+1} = 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1}^n. \quad (1.13)$$

1.1.2. Связь схемы «КАБАРЕ» со схемой Upwind LeapFrog (схема Айзерлиса)

Из уравнений (1.12) можно исключить консервативные переменные [22]. Действительно, сдвигая на один временной слой вниз третье уравнение этой системы и складывая его с первым уравнением, находим:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} = 0; \quad \tau_n = \frac{1}{2}(\tau_{n+1/2} + \tau_{n-1/2}). \quad (1.14)$$

Учитывая, что $U_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{u_{i+1}^{n+1} + u_i^n}{2}$, приходим к одному трехслойному разностному уравнению

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\tau_n} + \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau_n} \right) + c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} = 0, \quad (1.15)$$

совпадающему, при $\tau_n = \text{const}$, с разностной схемой Upwind Leapfrog (UL). Схема UL была рассмотрена Айзерлисом в рамках использования его метода «звезд» для получения ряда новых шаблонов многослойных по времени разностных схем для уравнения линейного переноса [23].

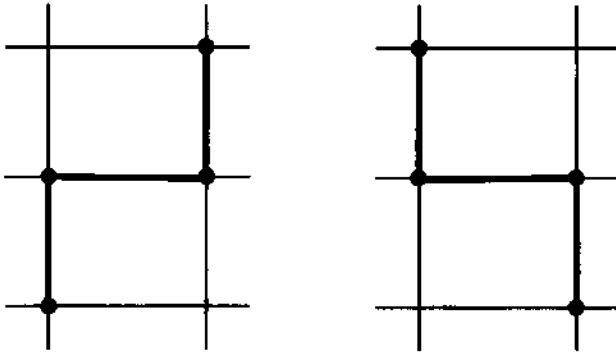


Рис. 1.2 Вычислительные шаблоны схемы Айзерлиса. Левый рисунок соответствует переносу вправо, правый – переносу влево

При отрицательной скорости переноса ($c < 0$) «коромысло» экстраполяции будет направлено в другую сторону:

$$u_i^{n+1} = 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1}^n, \quad (1.16)$$

и схема Айзерлиса (UL) примет вид:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i+1}^{n-1}}{\tau_n} + \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau_n} \right) + c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} = 0. \quad (1.17)$$

Следует отметить, что в работе В.М. Головинина и А.А. Самарского [9] схемой «КАБАРЕ» названа именно схема Айзерлиса, поскольку работа [23] им была в то время неизвестна. Впоследствии, когда была получена двухслойная и дивергентная форма представления этой схемы в виде системы уравнений (1.12), название «КАБАРЕ» стало относиться к последней.

Схема «КАБАРЕ» и схема Айзерлиса не эквивалентны. Схема «КАБАРЕ» не является формальным следствием схемы Айзерлиса.

Для упрощения восприятия последующих алгебраических выкладок будем в дальнейшем, в пределах данной главы, считать расчетную сетку равномерной как по пространству, так и по времени, т. е. будем полагать, что $h = \text{const}$, $\tau = \text{const}$.

1.1.3. Каналы высокой точности схемы «КАБАРЕ»

Схему Айзерлиса, а, следовательно, и схему «КАБАРЕ», можно записать в виде:

$$u_{i+1}^{n+1} = (1 - 2r) \cdot (u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^{n-1}, \quad (1.18)$$

где $r = c \cdot \tau / h$ – безразмерное число Куранта. Из (1.18) непосредственно следует, что при $r = 0,5$ схема «КАБАРЕ» является точной. Это соответствует переносу по характеристике сеточного решения из узла $(i, n-1)$ в узел $(i+1, n+1)$, как это показано пунктирной стрелкой на рис. 1.2. При $r=1$ выражение примет вид

$$u_{i+1}^{n+1} = u_i^n - (u_{i+1}^n - u_i^{n-1}). \quad (1.19)$$

Как уже отмечалось, схема является трехслойной и требует задания начальных данных на двух слоях. Если начальные данные при $r=1$ заданы точно, т. е. в виде

$$u_i^0 = f(x_i); \quad u_i^1 = f(x_{i-1}), \quad (1.20)$$

то из выражения (1.19) и закона математической индукции следует, что схема «КАБАРЕ» при $r=1$ будет оставаться точной также и во все последующие моменты времени. Это соответствует переносу разностного решения по характеристике из узлов (i, n) в узлы $(i+1, n+1)$ (рис. 1.2).

Таким образом, схема обладает замечательным свойством – она дает точное решение дифференциальной задачи при двух различных числах Куранта.

Следует отметить, что классические линейные разностные схемы, такие как схема Годунова (Simple Upwind), схема «Крест» (LeapFrog), схема Лакса – Вендроффа и многие другие при числах Куранта, равных единице, также являются точными. В частности, отсюда следует, что точность этих схем неограниченно возрастает при стремлении числа Куранта к единице. Числа Куранта, при которых разностная аппроксимация уравнения переноса дает точное решение дифференциальной задачи, будем в дальнейшем называть «каналами высокой точности» разностной схемы. Таким образом, схема «КАБАРЕ», в отличие от перечисленных выше схем, обладает двумя каналами высокой точности, один из которых, как будет показано ниже, лежит в середине ее области устойчивости.

1.1.4. Законы сохранения

Непосредственным следствием дифференциального уравнения (1.6) является бесконечное множество законов сохранения для различных степеней скалярного поля u^m . Действительно, умножая на u^{m-1} , $m \neq 0$, получаем:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial u^m}{\partial t} + \frac{c}{m} \cdot \frac{\partial u^m}{\partial x} = 0. \quad (1.21)$$

Интегрируя по всей области определения задачи, находим

$$\int_{G_3} u^m \cdot dx + \int_{G_4} u^m \cdot dt = \int_{G_1} u^m \cdot dx + \int_{G_2} u^m \cdot dt, \quad (1.22)$$

где интегралы в правой части последнего равенства берутся по границам G_1 и G_2 , из которых исходят характеристики и на которых задаются начально-краевые условия, а в левой части – по границам, на которые эти характеристики приходят (рис. 1.3). Следует отметить, что вид законов сохранения для уравнения (1.6) не ограничивается степенными функциями, но именно последние для нас являются наиболее существенными.

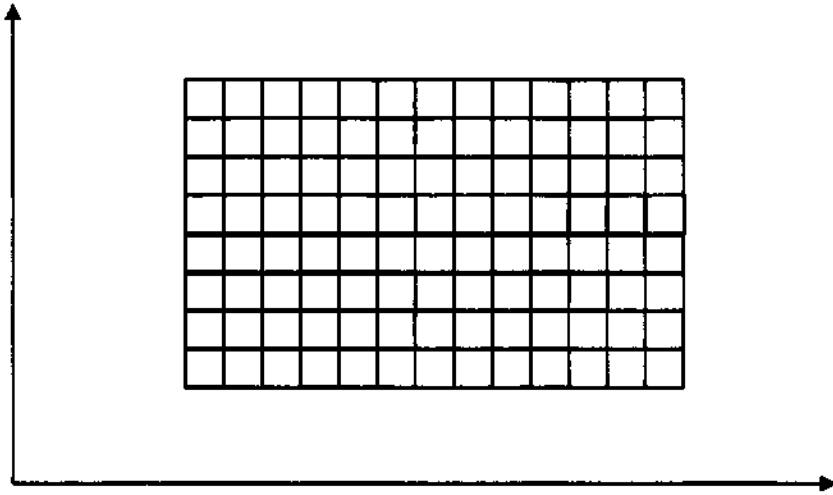


Рис. 1.3. Расчетная область и ее границы

При замене дифференциальной задачи (1.6) разностной количество возможных законов сохранения уменьшается. Возможны случаи, когда их число сокращается до нуля. Каждый закон сохранения, остающийся справедливым для разностной задачи, является весьма важным как для теоретического осмысливания свойств данной схемы, так и для ее «эксплуатационных» свойств.

Разностные схемы, для которых выполняется дискретный аналог соотношения при $m = 1$, называются дивергентными (консервативными). Чтобы свойство дивергентности схемы стало очевидным, достаточно представить ее в т. н. «потокном» виде:

$$h \cdot \left[\frac{\langle u \rangle_{i+1/2}^{n+1/2} - \langle u \rangle_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} \right] + Flux(c \cdot u)_{i+1}^n - Flux(c \cdot u)_i^n = 0, \quad (1.23)$$

где

$$\langle u \rangle_{i+1/2}^{n+1/2} = U_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^{n+1} + u_i^n); \quad Flux(c \cdot u)_{i+1}^n = c \cdot u_{i+1}^n.$$

Действительно, суммируя по всем внутренним точкам сеточной области, нетрудно убедиться, что все члены, входящие в систему уравнений, внутри области взаимно сокращаются. Другую форму дивергентного представления схемы Айзерлиса представляет схема «КАБАРЕ» в виде (1.7).

1.1.5. Квадратичные законы сохранения и достаточные условия устойчивости

Свойство дивергентности для разностных аппроксимаций конвективного переноса является довольно распространенным. Им обладают почти все используемые на практике транспортные алгоритмы. Покажем, что для схемы «КАБАРЕ», кроме закона

сохранения первого порядка, имеет место также разностный аналог дополнительного закона сохранения квадрата скалярного поля $u^2(x, t)$.

Записывая уравнение (1.18) в безразмерной форме:

$$(u_{i+1}^{n+1} + u_i^n) - (u_{i+1}^n + u_i^{n-1}) + 2r \cdot (u_{i+1}^n - u_i^n) = 0$$

и умножая на выражение

$$J = (u_{i+1}^{n+1} + u_i^n) + (u_{i+1}^n + u_i^{n-1}),$$

получаем

$$(u_{i+1}^{n+1} + u_i^n)^2 - (u_{i+1}^n + u_i^{n-1})^2 + 2 \cdot r \cdot J \cdot (u_{i+1}^n - u_i^n) = 0. \quad (1.24)$$

Учитывая тождество

$$(u_{i+1}^n - u_i^n) = \frac{1}{2} \left\{ \left[(u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n) - (u_i^n + u_i^{n-1}) \right] - \left[(u_{i+1}^{n+1} + u_i^n) - (u_{i+1}^n + u_i^{n-1}) \right] \right\}$$

и вводя обозначение

$$J^* = (u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n) + (u_i^n + u_i^{n-1}) \equiv J, \quad (1.25)$$

представим последний член в (1.24) как

$$\begin{aligned} 2 \cdot r \cdot J \cdot (u_{i+1}^n - u_i^n) &= \\ &= r \cdot \left\{ J^* \cdot \left[(u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n) - (u_i^n + u_i^{n-1}) \right] - J \cdot \left[(u_{i+1}^{n+1} + u_i^n) - (u_{i+1}^n + u_i^{n-1}) \right] \right\} = \\ &= r \left[(u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n)^2 - (u_i^n + u_i^{n-1})^2 - (u_{i+1}^{n+1} + u_i^n)^2 + (u_{i+1}^n + u_i^{n-1})^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Это дает возможность привести (1.24) к виду

$$\hat{E}_{i+1/2}^+ = \hat{E}_{i+1/2}^-,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{E}_{i+1/2}^+ &= r \cdot (u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n)^2 + (1-r) \cdot (u_{i+1}^{n+1} + u_i^n)^2; \\ \hat{E}_{i+1/2}^- &= r \cdot (u_i^n + u_i^{n-1})^2 + (1-r) \cdot (u_{i+1}^n + u_i^{n-1})^2. \end{aligned}$$

Просуммируем соотношение по всем временным слоям из области определения задачи и разделим на r . Это приводит к интегральному уравнению баланса для пространственной ячейки с номером $i+1/2$:

$$-E_{i+1/2}^l - {}^+E_{i+1/2}^l = F_{i+1} - F_i, \quad (1.27)$$

где

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_{n=1}^l (u_i^n + u_i^{n-1})^2; \\ -E_{i+1/2}^l &= \left[\frac{1-r}{r} \cdot (u_{i+1}^{l+1} + u_i^l)^2 + (u_i^{l+1} + u_i^l)^2 \right]; \\ {}^+E_{i+1/2}^l &= \left[\frac{1-r}{r} \cdot (u_{i+1}^1 + u_i^0)^2 + (u_{i+1}^1 + u_{i+1}^0)^2 \right]. \end{aligned}$$

Суммируя соотношение по всем пространственным ячейкам, окончательно получаем

$$F_1 + \Phi_1 = F_N + \Phi_l, \quad (1.28)$$

где

$$\Phi_l = \sum_{i=1}^{N-1} -E_{i+1/2}^l; \quad \Phi_1 = \sum_{i=1}^{N-1} {}^+E_{i+1/2}^l.$$

В левой части равенства суммирование производится по «донорным» границам областей G1 и G2, на которых задаются граничные и начальные условия, в правой – по «акцепторным» границам G3 и G4. Равенство (1.28) является, таким образом, дискретным аналогом равенства (1.22) при $m = 2$.

Нетрудно увидеть, что обе части равенства (1.28) представляют собой квадратичные формы, положительно определенные при $0 < r < 1$. Таким образом, неравенство

$$0 < r < 1 \quad (1.29)$$

является достаточным условием устойчивости схемы «КАБАРЕ», а равенство (1.28) устанавливает непрерывную зависимость решения разностной задачи (2) от граничных условий и начальных данных. Методами общей теории устойчивости разностных схем, развитыми в [24], основываясь на соотношении (1.28), можно показать также и непрерывную зависимость численного решения линейной неоднородной задачи

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} \right) + c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} = Q_{i+1/2}^n \quad (1.30)$$

от правой части $Q_{i+1/2}^n$. Из последнего свойства и условия аппроксимации схемой «КАБАРЕ» дифференциального уравнения следует сходимость численного решения к решению дифференциальной задачи.

В работе [10] показано, что для разностного уравнения существует еще один квадратичный закон сохранения, не сводящийся к описанному выше. Если составить линейную комбинацию этих законов, то можно сказать, что для разностного уравнения существует однопараметрическое семейство квадратичных законов сохранения.

1.1.6. Диссипативные и дисперсионные свойства схемы «КАБАРЕ»

Покажем, что линейная система уравнений (1.12) имеет однопараметрическое множество частных решений в виде бегущих волн. Предположим, что консервативные переменные эволюционируют по закону:

$$U_{i+1/2}^n = B \cdot d; \quad U_{i+1/2}^{n+1/2} = A \cdot d \cdot \sqrt{q}; \quad U_{i+1/2}^{n+1} = B \cdot d \cdot q, \quad (1.31)$$

где

$$d = \exp(i \cdot \omega \cdot t_n - i \cdot k \cdot x_{i+1/2}), \quad q = \exp(i \cdot \omega \cdot \tau), \quad i = \sqrt{-1},$$

ω, k – частота и волновой вектор соответственно, A и B – константы.

Потоковые переменные также будем искать в виде бегущей волны с теми же параметрами ω, k :

$$\begin{aligned} u_i^n &= C \cdot d \cdot \exp[i \cdot k \cdot (0,5 \cdot h)]; \quad u_{i+1}^n = C \cdot d \cdot \exp[i \cdot k \cdot (0,5 \cdot h)]; \\ u_i^{n+1} &= C \cdot d \cdot q \cdot \exp[i \cdot k \cdot (0,5 \cdot h)]; \quad u_{i+1}^{n+1} = C \cdot d \cdot q \cdot \exp[i \cdot k \cdot (0,5 \cdot h)], \end{aligned} \quad (1.32)$$

и амплитудой C , которая также является константой.

Подставляя выражения (1.31), (1.32) в (1.22), после ряда несложных алгебраических преобразований, получаем:

$$\mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{q} & \frac{r}{2} \cdot \left(e^{-i \frac{kh}{2}} - e^{i \frac{kh}{2}} \right) \\ q & -\sqrt{q} & \frac{r \cdot q}{2} \cdot \left(e^{-i \frac{kh}{2}} - e^{i \frac{kh}{2}} \right) \\ 0 & -2 \cdot \sqrt{q} & \left(q \cdot e^{-i \frac{kh}{2}} - e^{i \frac{kh}{2}} \right) \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Здесь $r = \frac{C \cdot \tau}{h}$ – безразмерные числа Куранта.

Чтобы система линейных уравнений имела ненулевое решение, матрица $\mathbf{D}$ должна быть вырожденной, т. е. ее определитель должен равняться нулю. Нетрудно показать, что

$$\|\mathbf{D}\| = \sqrt{q} \cdot e^{-i \frac{kh}{2}} \cdot \left[q^2 - q \cdot (1 - 2 \cdot r) \cdot (1 - e^{i kh}) - e^{i kh} \right] = 0. \quad (1.34)$$

Один корень этого уравнения является нулевым, т. е. $q = 0$, а два других корня удовлетворяют квадратичному уравнению с комплексными коэффициентами:

$$q^2 - q \cdot (1 - 2 \cdot r) \cdot (1 - e^{ikh}) - e^{ikh} = 0. \quad (1.35)$$

Уравнение (1.35) часто называют характеристическим уравнением линейной разностной схемы. Оно устанавливает связь между частотой ω и волновым вектором k бегущей волны, которая оказывается зависящей от числа Куранта. Следует отметить, что характеристическое уравнение (1.35) совпадает с характеристическим уравнением для схемы Айзерлиса при постоянном шаге по времени.

Корни характеристического уравнения имеют вид:

$$q_{1,2} = f_{1,2}(r, kh), \quad (1.36)$$

где

$$f_{1,2}(r, kh) = \frac{(1 - 2 \cdot r) \cdot (1 - e^{ikh})}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1 - 2 \cdot r) \cdot (1 - e^{ikh})^2 + 4 \cdot e^{ikh}}. \quad (1.37)$$

В работе [10] показано, что при $0 \leq r \leq 1$ величины $|q_{1,2}|$, которые часто называют модулем перехода с одного временного слоя на следующий, равны единице, т. е.:

$$|q_{1,2}| \equiv 1; \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (1.38)$$

Это означает, что амплитуды всех гармоник при переходе на новый временной слой остаются неизменными. Таким образом, схема «КАБАРЕ» при числах Куранта, меньших или равных единице, является устойчивой и бездиссипативной.

Оба корня уравнения являются комплексными и зависят как от числа Куранта r , так и от «приведенного волнового числа» kh , изменяющегося от нуля до 2π .

Предположим, для простоты, что вместо краевой задачи мы решаем задачу Коши с периодическими начальными условиями, определенными на всей оси x . В этом случае полное решение разностного уравнения можно записать в виде

$$u_j^n = \sum_{k=0}^{N-1} [\alpha(kh) \cdot q_1^n + \beta(kh) \cdot q_2^n] \cdot e^{-ikh}, \quad (1.39)$$

где коэффициенты $\alpha(kh)$ и $\beta(kh)$ определяются по начальным данным, заданным на двух первых слоях расчетной сетки.

Из (1.39), в частности, следует, что при заданном начальном условии на первом слое можно доопределить значение сеточной функции на втором слое таким образом, что последующая временная эволюция решения разностного уравнения будет определяться только каким-либо одним из найденных корней. Второй корень при этом будет оказывать влияние только на область устойчивости.

Естественно, что значения начальных данных на втором временном слое следует задавать так, чтобы исключить влияние на решение корня с худшими дисперсионными свойствами.

Исследуем поведение абсолютных величин корней характеристического уравнения как функций числа Куранта r и приведенного волнового числа kh .

Учитывая, что $q_{1,2} = \exp(i \cdot \omega_{1,2} \cdot \tau)$, находим:

$$\omega_1 \cdot \tau = \arctg[\operatorname{Im}(q_1)/\operatorname{Re}(q_1)]; \quad \omega_2 \cdot \tau = \arctg[\operatorname{Im}(q_2)/\operatorname{Re}(q_2)],$$

откуда нетрудно получить явный вид дисперсионной зависимости:

$$\begin{aligned} \gamma_1(r, kh) &= \frac{\omega_1}{k \cdot c} = \frac{1}{r \cdot kh} \cdot \arctg[\operatorname{Im}(q_1)/\operatorname{Re}(q_1)]; \\ \gamma_2(r, kh) &= \frac{\omega_2}{k \cdot c} = \frac{1}{r \cdot kh} \cdot \arctg[\operatorname{Im}(q_2)/\operatorname{Re}(q_2)]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Если бы схема не вносила фазовых ошибок, величины «приведенных фазовых скоростей» $\gamma_1(r, kh)$ и $\gamma_2(r, kh)$ были бы тождественно равными единице. Степень отклонения параметров $\gamma_1(r, kh)$ и $\gamma_2(r, kh)$ от единицы характеризует несовершенство схемы.

Можно показать, что при числах Куранта $r=1$ и $r=0,5$ фазовая ошибка в схеме «КАБАРЕ» равна нулю, т. е.

$$\gamma[1, (k \cdot h)] = \gamma[0,5, (k \cdot h)] = 1. \quad (1.41)$$

При отсутствии амплитудной ошибки это значит, что схема «КАБАРЕ» при этих числах Куранта является точной. Следует отметить, что многие линейные разностные схемы для простейшего уравнения переноса оказываются точными при $r=1$, когда решение переносится по характеристике из узла на нижнем слое в сдвинутый на единицу узел на следующем временном слое. Однако такая точность достигается на границе области устойчивости. Известно, что при приближении чисел куранта к единице точность таких схем резко возрастает. Схема «КАБАРЕ» оказывается точной и при числе Куранта, находящемся в середине области устойчивости, и ее точность растет при приближении к $r=0,5$ как справа, так и слева.

Ввиду того, что поведение поверхностей $\gamma_1(r, kh)$ и $\gamma_2(r, kh)$ оказывается довольно сложным, их дальнейшее исследование проводилось с помощью программы Mathematica, Wolfram Research, Inc.

Из рис. 1.4 и рис. 1.5 следует, что дисперсионные свойства корней характеристического уравнения существенно различаются. Уже с первого взгляда понятно, что при малых числах Куранта фазовая ошибка первого корня существенно меньше, хотя его фазовая поверхность и имеет некоторые особенности при $kh = \pm\pi, r \rightarrow 0$. Фазовая поверхность второго корня при $r \rightarrow 0$ имеет более сильную особенность при всех «приведенных волновых числах».

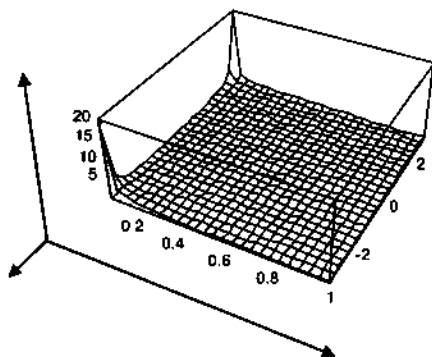


Рис. 1.4. Фрагмент дисперсионной поверхности первого корня характеристического уравнения схемы «КАБАРЕ» для чисел Куранта $(0,01 \leq r \leq 0,1)$ и приведенных волновых чисел $(-\pi \leq kh \leq \pi)$, при $r \rightarrow 0$, $kh \rightarrow \pm \pi$ имеется особенность

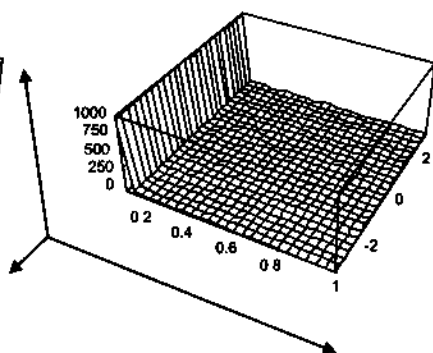


Рис. 1.5. Дисперсионная поверхность второго корня характеристического уравнения схемы «КАБАРЕ» для $(0,01 \leq r \leq 1)$ и $(-\pi \leq kh \leq \pi)$. При $r \rightarrow 0$ имеется особенность

Следует отметить, что наличие особенностей в поведении дисперсионных поверхностей при стремлении числа Куранта к нулю послужило в [23] основанием для выражения сомнений в практической пригодности схемы Айзерлиса для расчетов реальных задач. В дальнейшем будет показано, что существуют эффективные методы регуляризации, позволяющие обойти эту особенность.

На рис. 1.6, 1.7 приведен вид дисперсионных поверхностей первого и второго корня соответственно при $0,5 < r < 1$. Видно, что у первого корня дисперсия на границах указанного отрезка отсутствует, а максимальные «завалы» дисперсионной поверхности при $kh \pm \pi$ не превышают 0,15. «Приведенная фазовая скорость» второго корня при $r = 1$ оказывается равной нулю, что свидетельствует о его «паразитном» характере.

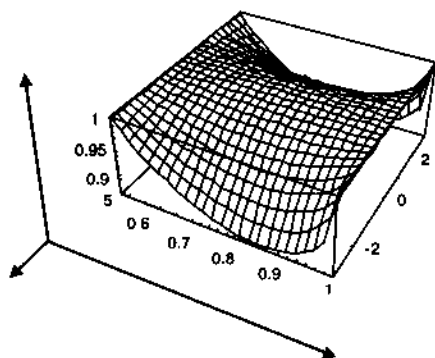


Рис. 1.6. Фрагмент дисперсионной поверхности первого корня (со знаком «+») характеристического уравнения схемы «КАБАРЕ» для чисел Куранта ($0,5 \leq r \leq 1$)

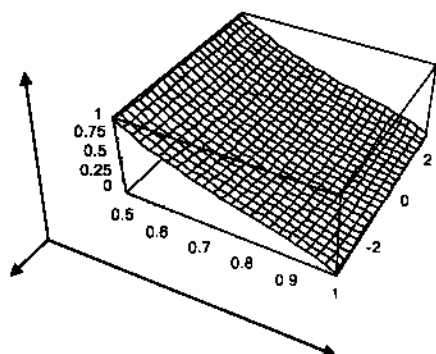


Рис. 1.7. Дисперсионная поверхность второго корня характеристического уравнения схемы «КАБАРЕ» для ($0,5 \leq r \leq 1$) и ($-\pi \leq kh \leq \pi$)

На рис. 1.8, 1.9 приведены дисперсионные и диссипативные поверхности схемы «КАБАРЕ» в области ее устойчивости. Для сравнения, на последующих рисунках представлены аналогичные поверхности для других классических линейных схем разного порядка аппроксимации. Видно (рис. 1.10, 1.11), что у схемы Годунова первого порядка по пространству и по времени (в англоязычной литературе – Simple Upwind) слишком велика диссипация коротковолновых гармоник. Следует отметить, что при $r = 0,5$ эта схема, как и схема «КАБАРЕ», не имеет фазовой ошибки, однако это обстоятельство не заметно на фоне высокой диссипации. Для схемы Лакса – Вендроффа, имеющей второй порядок аппроксимации, диссипация также весьма существенна, хотя в окрестности низких гармоник она имеет второй порядок касания дисперсионной и диссипативной поверхности с единичной плоскостью [25]. В целом, конфигурация диссипативной и дисперсионной поверхностей у этих двух схем весьма схожа.

У схемы «крест» (в англоязычной литературе – Central Leapfrog, CL) диссипация, как и у схемы «КАБАРЕ», отсутствует, однако ее дисперсионные свойства оставляют желать лучшего.

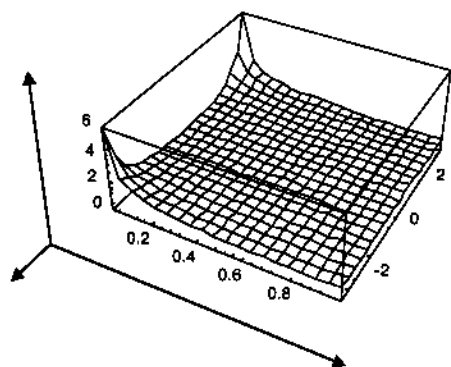


Рис. 1.8. Дисперсионная поверхность схемы «КАБАРЕ» при $(0,01 \leq r \leq 1)$ и $(-\pi \leq kh \leq \pi)$

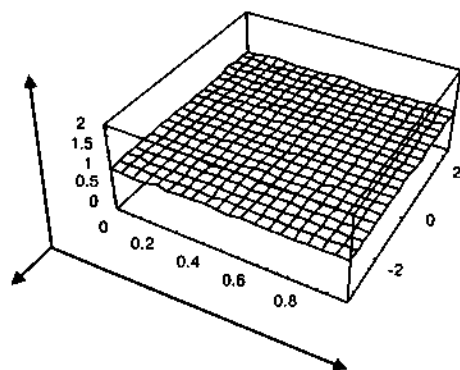


Рис. 1.9. Диссипативная поверхность схемы «КАБАРЕ» при $(0,01 \leq r \leq 1)$ и $(-\pi \leq kh \leq \pi)$

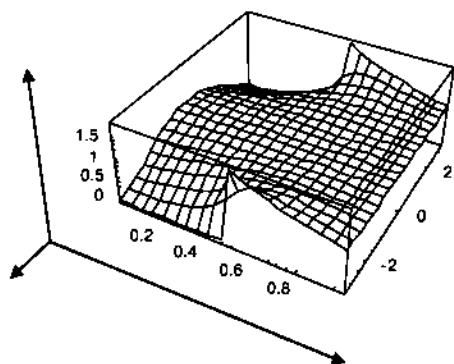


Рис. 1.10. Дисперсионная поверхность схемы «уголок» (Simple Upwind) при $(0 \leq r \leq 1)$ и $(-\pi \leq kh \leq \pi)$

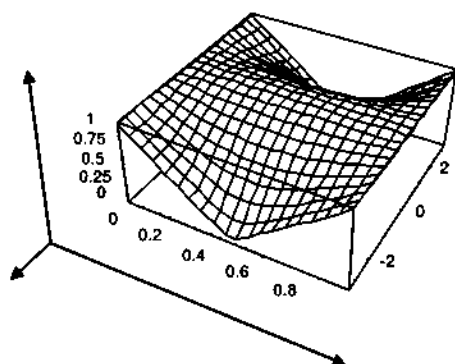


Рис. 1.11. Диссипативная поверхность схемы «уголок» (Simple Upwind) при $(0 \leq r \leq 1)$ и $(-\pi \leq kh \leq \pi)$

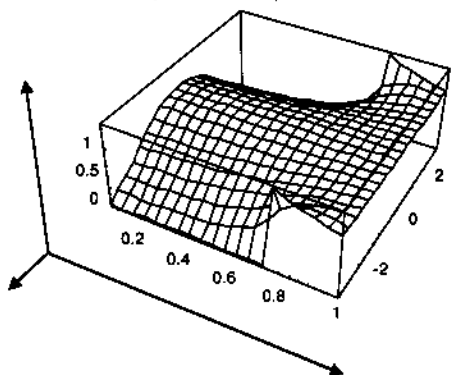


Рис. 1.12. Дисперсионная поверхность схемы Лакса – Вендроффа при $(0 \leq r \leq 1)$ и $(-\pi \leq kh \leq \pi)$

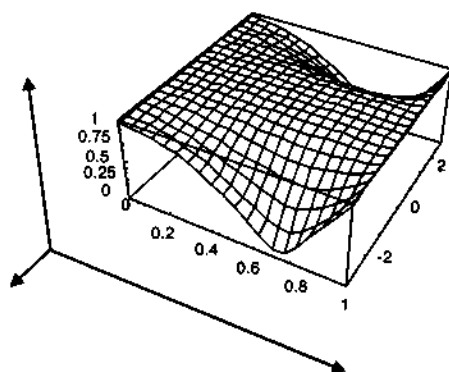


Рис. 1.13. Диссипативная поверхность схемы Лакса – Вендроффа при $(0 \leq r \leq 1)$ и $(-\pi \leq kh \leq \pi)$

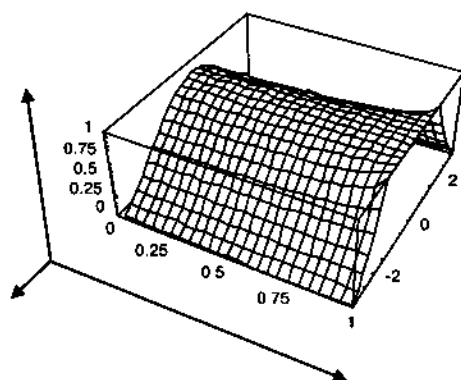


Рис. 1.14. Дисперсионная поверхность схемы «крест» (CL) ($0 \leq r \leq 1$) и ($-\pi \leq kh \leq \pi$)

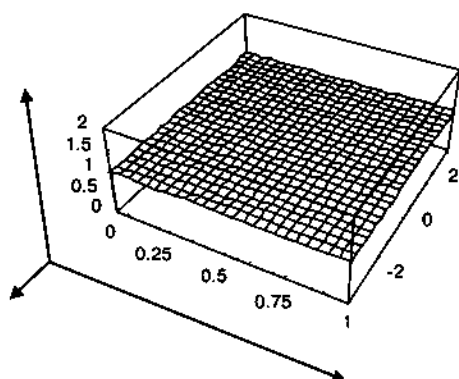


Рис. 1.15. Диссипативная поверхность схемы «крест» (CL) при ($0 \leq r \leq 1$) и ($-\pi \leq kh \leq \pi$)

На рис. 1.16–1.17 приведены дисперсионные и диссипативные поверхности схемы Ван Лири (Van Leer) второго порядка точности, которую часто называют схемой Бима – Ворминга (Beam – Warming). Ее область устойчивости ($0 < r \leq 2$) и эта схема, как и «КАБАРЕ», имеет канал высокой четкости (окрестности числа Куранта, равного единице) в середине области устойчивости. Однако ее вычислительный шаблон охватывает две расчетные ячейки и не является компактным.

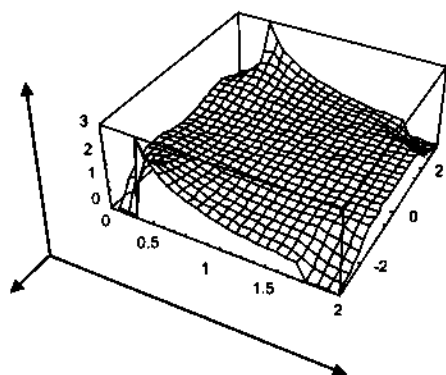


Рис. 1.16. Дисперсионная поверхность схемы Ван Лири ($0 \leq r \leq 1$) и ($-\pi \leq kh \leq \pi$)

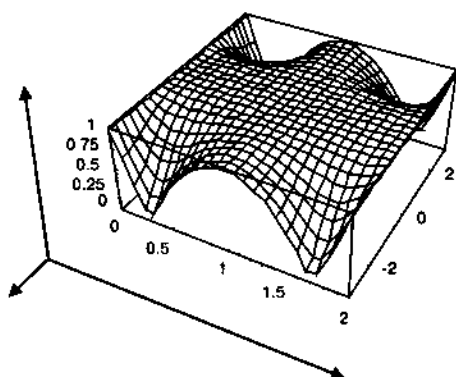


Рис. 1.17. Диссипативная поверхность схемы Ван Лири при ($0 \leq r \leq 1$) и ($-\pi \leq kh \leq \pi$)

Дисперсионные свойства схемы «КАБАРЕ» в трехслойном виде были подробно исследованы в работах [9,10].

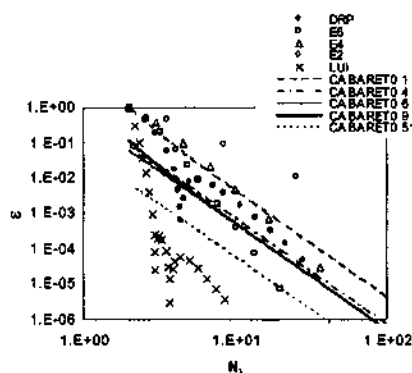
1.1.7. Групповая скорость переноса возмущений в схеме «КАБАРЕ»

Наряду с фазовой ошибкой, другим важным индикатором дисперсионных свойств является групповая скорость

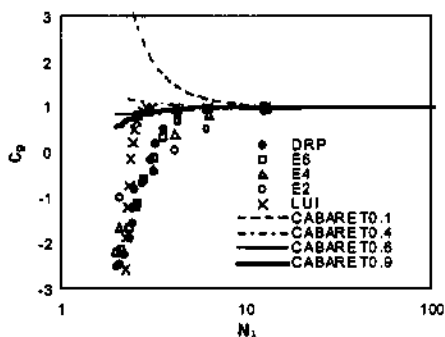
$$c_g = \frac{\tau}{c} \frac{\partial(\omega(k \cdot h))}{\partial(k \cdot h)}.$$

Отличие c_g от 1 указывает на наличие аппроксимационной погрешности в скорости распространения волновых пакетов.

На рис. 1.18 построены графики фазовой (а) и групповой (б) ошибки схемы «КАБАРЕ» при нескольких числах Куранта в зависимости от приведенного волнового числа, $N_\lambda = 2\pi / (k \cdot h)$, соответствующего количеству сеточных узлов на длину волны. Для сравнения на тех же графиках приведены ошибки разностно-дифференциальных центральных схем второго (E2), четвертого (E4) и шестого (E6) порядков аппроксимации, включая схемы с оптимизированным дисперсионным соотношением (DRP, LUI). Результаты для центральных схем соответствуют дискретному шагу по времени с оптимальным по точности числом Куранта. Оптимальность по точности заключается в том, что соответствующий числу Куранта шаг по времени настолько мал, что численная ошибка вследствие дискретизации по времени может приниматься равной нулю. Из графиков видно, что для большинства чисел Куранта и длин волн ошибки схемы «КАБАРЕ» не выходят за пределы ошибок центральных схем 4–6-го порядка аппроксимации. Существенно, что в отличие от центральных схем, групповая скорость которых становится отрицательной для коротких волн, групповая скорость «КАБАРЕ» всегда положительна. Это, в частности, говорит о том, что в схеме «КАБАРЕ» отсутствует эффект паразитного отсечения/отражения сигнала на грубой сетке, который возникает в центральных схемах при частоте сигнала выше некоторого порогового значения [26].



(a)



(b)

Рис. 1.18. Сравнение (a) фазовой ошибки, (b) групповой ошибки схемы «КАБАРЕ» при разных числах Куранта с центральными схемами: $\epsilon = \left| \frac{\omega \cdot \tau}{c \cdot k \cdot h} - 1 \right|$, $c_g = \frac{1}{c} \frac{\partial(\omega \cdot \tau)}{\partial(k \cdot h)}$, где h и τ – шаги по пространству и по времени, $k \cdot h$ – приведенное волновое число, $\omega \cdot \tau$ – приведенная частота, c – скорость переноса, $N_x = \pi / (k \cdot h)$ – параметр разрешения сетки, равный числу узлов сетки на длину волны, ϵ_x – стандартные центральные разности порядка аппроксимации “x”, LUI – оптимизированная компактная схема 6-го порядка (Lui and Lele), DRP – схема DRP 4-го порядка; CABARET x – схема «КАБАРЕ» при Куранте CFL= x

1.1.8. Управление диссипативными и дисперсионными свойствами схемы «КАБАРЕ»

В схему «КАБАРЕ» можно ввести настроечный параметр η , регулирующий диссипативные свойства схемы:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1/2}} &= 0; \\ u_{i+1}^{n+1} &= \frac{2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - (1-\eta)u_i^n}{1+\eta}; \\ \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + c \cdot \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

При $\eta=0$ схема бездиссипативна, при $\eta=1$ – переходит в монотонную схему Годунова (Simple Upwind). Действительно, в этом случае $u_{i+1}^{n+1} = U_{i+1/2}^{n+1/2}$, $u_i^n = U_{i+1/2}^{n-1/2}$, и система сводится к одному уравнению:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + c \cdot \frac{U_{i+1/2}^{n-1/2} - U_{i-1/2}^{n-1/2}}{h_{i+1/2}} = 0. \quad (1.43)$$

Включенный в схему «КАБАРЕ» описанным выше способом искусственный диссипативный процесс получил название диссипатора Паниковского [10]. Можно

утверждать, что схема «КАБАРЕ» с диссипатором Паниковского наследует все позитивные свойства схемы первого порядка аппроксимации, которые справедливы для схемы Годунова, и наделяет ее свойством малой диссипативности (бездиссипативности при переходе к «чистой» «КАБАРЕ»).

В работе [10] показано, что значение коэффициента η может превышать единицу и быть сколь угодно большим. Диссипативные свойства схемы при этом только увеличиваются, а область устойчивости не уменьшается.

Включение диссипатора Паниковского изменяет не только диссипативную поверхность, но и дисперсионную, регуляризируя описанные ранее особые точки.

При постоянных шагах расчетной сетки характеристическое уравнение схемы с учетом диссипатора Паниковского примет вид

$$(1+\eta) \cdot q^2 - q \left[(1-2r) \cdot (1-e^{ikh}) + \eta \cdot (1+e^{ikh}) \right] - (1-\eta) \cdot e^{ikh} = 0. \quad (1.44)$$

Корни этого уравнения определяются выражениями

$$q_1 = \frac{b + \sqrt{D}}{2a}; \quad q_2 = \frac{b - \sqrt{D}}{2a}; \quad a = (1+\eta);$$

$$b = [(1-2r) \cdot (1-e^{ikh}) + \eta \cdot (1+e^{ikh})]; \quad D = b^2 + 4a \cdot (1-\eta) \cdot e^{ikh}.$$

Диссипативные характеристики описываются поведением диссипативных поверхностей

$$|q_1| = \lambda_1(r, kh); \quad |q_2| = \lambda_2(r, kh).$$

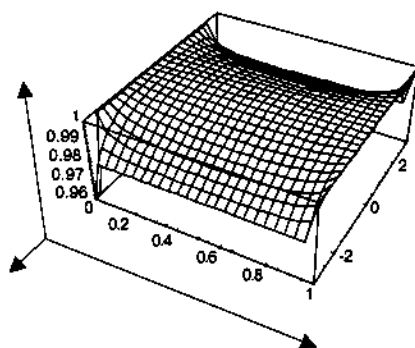


Рис. 1.19. Диссипативная поверхность первого корня при $\eta = 0,02$

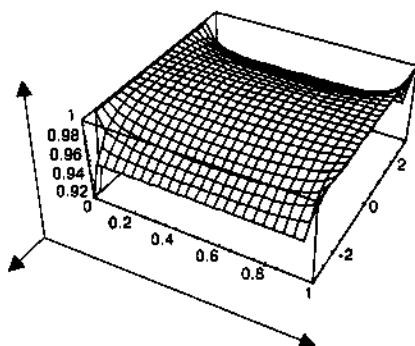


Рис. 1.20. Диссипативная поверхность первого корня при $\eta = 0,04$

На рис. 1.19, 1.20 приведены изображения диссипативных поверхностей первого корня при $\eta = 0,02$ и $\eta = 0,04$ соответственно. Видно, что степень их отклонения от

единицы пропорциональна квадрату приведенного волнового числа kh и прямо пропорциональна коэффициенту η .

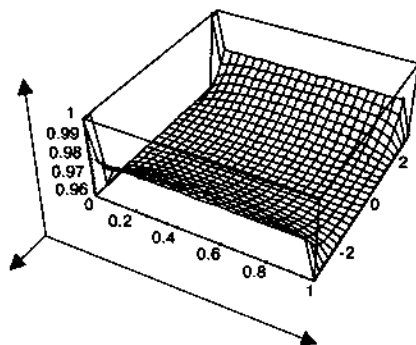


Рис. 1.21. Диссипативная поверхность паразитного корня при $\eta = 0,02$

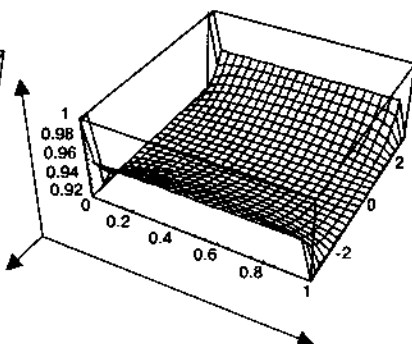


Рис. 1.22. Диссипативная поверхность паразитного корня при $\eta = 0,04$

Совершенно иная картина (рис. 1.21, 1.22) наблюдается для второго корня: максимальная диссипация здесь имеет место при малых волновых числах. При увеличении волновых чисел декремент затухания уменьшается по квадратичному закону, и его минимальное значение также оказывается пропорционально коэффициенту η . Декремент затухания второго корня всюду существенно больше декремента затухания первого. Это говорит о том, что диссипатор Паниковского оказывает наиболее сильное влияние на паразитный корень, приводя к быстрому затуханию обусловленных его существованием и имеющих чисто вычислительную природу осцилляций. При этом содержательная часть решения, описываемая первым корнем характеристического уравнения, практически не диссипирует.

1.1.9. Нелинейная коррекция схемы «КАБАРЕ»

Поскольку схема «КАБАРЕ» обладает вторым порядком аппроксимации, она, в силу теоремы Годунова, не является монотонной и приводит к появлению нефизичных осцилляций при переносе решений с большими градиентами. Эффективным способом регуляризации схемы является введение процедуры нелинейной коррекции потоковых переменных на основе принципа максимума [21, 27].

Согласно принципу максимума, значение потоковой переменной u_{i+1}^{n+1} при числе Куранта меньше единицы ($CFL \leq 1$) не должно быть больше максимального значения

$$\max(u)_{i+1/2}^n = \max_{x \in [x_{i+1}, x_i]} [u(x, t_n)]$$

и меньше минимального значения

$$\min(u)_{i+1/2}^n = \min_{x \in [x_{i+1}, x_i]} [u(x, t_n)].$$

Поскольку непрерывная область заменяется сеточным множеством, то полагается, что:

$$\begin{aligned} \min(u)_{i+1/2}^n &= \min_{x \in [x_{i+1}, x_i]} [u(x, t_n)] \approx \min(u_i^n, U_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n); \\ \max(u)_{i+1/2}^n &= \max_{x \in [x_{i+1}, x_i]} [u(x, t_n)] \approx \max(u_i^n, U_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Нелинейная коррекция состоит в том, что вычисленное по формуле линейной экстраполяции значение потоковой переменной корректируется по правилу:

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} u_{i+1}^{n+1} & \text{if } [\max(u)_{i+1/2}^n \geq u_{i+1}^{n+1} \geq \min(u)_{i+1/2}^n]; \\ \min(u)_{i+1/2}^n & \text{if } u_{i+1}^{n+1} < \min(u)_{i+1/2}^n; \\ \max(u)_{i+1/2}^n & \text{if } u_{i+1}^{n+1} > \max(u)_{i+1/2}^n. \end{cases} \quad (1.46)$$

Следует отметить, что нелинейная коррекция приводит к модификации только потоковых переменных, что не приводит к нарушению законов сохранения. Консервативные переменные остаются неизменными, и для них свойство монотонности может, вообще говоря, не выполняться. Можно показать [28], что для чисел Куранта меньше 0,5 принцип максимума выполняется и для консервативных переменных, однако и за пределами области «полной» монотонности, немонотонность консервативных переменных проявляется в сравнительно редких случаях..

Расширение области чисел Куранта, для которых схема «КАБАРЕ» монотонна для консервативных переменных, до всей области устойчивости, возможно в рамках усложненных модификаций алгоритма коррекции [29, 30], однако они пока не нашли применения в производственных расчетах.

Алгоритм нелинейной коррекции потоков не содержит каких-либо настроечных параметров. Учитывая, что максимумы и минимумы вычисляются с некоторой погрешностью, можно ввести настроечный параметр α , регулирующий ширину «зоны невмешательства» $\Delta_{i+1/2}^n = \max(u)_{i+1/2}^n - \min(u)_{i+1/2}^n$:

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} u_{i+1}^{n+1} & \text{if } [\max(u)_{i+1/2}^n + \alpha \cdot \Delta_{i+1/2}^n \geq u_{i+1}^{n+1} \geq \min(u)_{i+1/2}^n - \alpha \cdot \Delta_{i+1/2}^n]; \\ \min(u)_{i+1/2}^n & \text{if } u_{i+1}^{n+1} < \min(u)_{i+1/2}^n - \alpha \cdot \Delta_{i+1/2}^n; \\ \max(u)_{i+1/2}^n & \text{if } u_{i+1}^{n+1} > \max(u)_{i+1/2}^n + \alpha \cdot \Delta_{i+1/2}^n. \end{cases} \quad (1.47)$$

Модифицированный алгоритм сводится к основному алгоритму нелинейной коррекции при $\alpha = 0$ и приводит к схеме «КАБАРЕ» без коррекции при $\alpha \rightarrow \infty$. Как будет показано ниже, пределы изменения свободного параметра α невелики – для большинства задач достаточным является его изменение в пределах $0 \leq \alpha \leq 0,01$.

1.1.10. Схема «КАБАРЕ» для уравнения конвекции – диффузии

В заключение этого раздела рассмотрим обобщение схемы «КАБАРЕ» на простейшее уравнение конвекции диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad c = \text{const} > 0; \quad \mu = \text{const} \geq 0. \quad (1.48)$$

С использованием конвективных и консервативных переменных, относящихся к различным элементам сеточного множества, аппроксимируем это уравнение следующей консервативной однопараметрической системой разностных уравнений:

(1.49)

где

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau/2} + c \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} &= \mu \cdot L \cdot [2 \cdot \sigma \cdot U^{n+1/2} + (1 - \sigma) \cdot U^{n-1/2}]; \\ u_{i+1}^{n+1} &= 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n; \quad \sigma \in [0, 1]; \\ \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} + c \cdot \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} &= \mu \cdot L \cdot [(1 - \sigma) \cdot U^{n+1/2}], \\ L \cdot U^{n+1/2} &= \frac{U_{i+3/2}^{n+1/2} - 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} + U_{i-1/2}^{n+1/2}}{h^2}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Если сложить первое и третье уравнения системы, то мы получим разностную схему:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{\tau} + c \cdot \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h} = \frac{\mu}{2} \cdot L \cdot [(1 + \sigma) \cdot U^{n+1/2} + (1 - \sigma) \cdot U^{n-1/2}]; \quad \sigma \in [0, 1], \quad (1.51)$$

аппроксимирующую исходное дифференциальное уравнение со вторым порядком по пространственной переменной и, вообще говоря, с первым порядком по времени. Второй порядок аппроксимации по времени достигается только при параметре $\sigma = 1$.

Исследуем систему разностных уравнений на устойчивость по начальным данным. Будем считать область определения задачи бесконечной, а все сеточные функции финитными, т. е. обращающимися в ноль вне некоторого отрезка числовой прямой. Преобразуем исходную систему к более удобному для применения интегральных методов исследования устойчивости виду. Для этого исключим из этой системы все консервативные переменные на целых временных слоях. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2}^{n+3/2} - U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau} + c \cdot \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} &= \mu \cdot L \cdot [\sigma \cdot U^{n+3/2} + (1 - \sigma) \cdot U^{n+1/2}]; \\ u_{i+1}^{n+1} &= 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n; \quad u_{i+1}^{n+2} = 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+3/2} - u_i^{n+1}; \quad \sigma \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Преобразуем правую часть первого уравнения этой системы к виду:

$$L \cdot [\sigma \cdot U^{n+3/2} + (1-\sigma) \cdot U^{n+1/2}] = L \cdot [(\sigma-0,5) \cdot (U^{n+3/2} - U^{n+1/2}) + 0,5 \cdot (U^{n+3/2} + U^{n+1/2})].$$

И умножим на полусумму консервативных переменных $J = 0,5 \cdot (U_{i+1/2}^{n+3/2} + U_{i+1/2}^{n+1/2})$.
В результате находим:

$$\begin{aligned} & \frac{(U_{i+1/2}^{n+3/2})^2 - (U_{i+1/2}^{n+1/2})^2}{2 \cdot \tau} + \frac{c}{4} \cdot J \cdot \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} = \\ & = 0,5 \cdot (U_{i+1/2}^{n+3/2} + U_{i+1/2}^{n+1/2}) \cdot \mu \cdot L \cdot [(\sigma-0,5) \cdot (U^{n+3/2} - U^{n+1/2}) + 0,5 \cdot (U^{n+3/2} + U^{n+1/2})]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Просуммируем последнее равенство по всем пространственным ячейкам расчетной сетки.

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega} \frac{(U_{i+1/2}^{n+3/2})^2 - (U_{i+1/2}^{n+1/2})^2}{2 \cdot \tau} \cdot h + \frac{c}{4} \cdot \sum_{\omega} J^{n+1} \cdot (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) = \\ & = 0,5 \cdot \sum_{\omega} [(U_{i+1/2}^{n+3/2} + U_{i+1/2}^{n+1/2}) \cdot \mu \cdot L \cdot [(\sigma-0,5) \cdot (U^{n+3/2} - U^{n+1/2}) + 0,5 \cdot (U^{n+3/2} + U^{n+1/2})]] \cdot h. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Учитывая самосопряженность оператора диффузии $L = \Lambda^* \cdot \Lambda$, правую часть последнего соотношения можно представить как:

$$\begin{aligned} & 0,5 \cdot \sum_{\omega} [(U_{i+1/2}^{n+3/2} + U_{i+1/2}^{n+1/2}) \cdot \mu \cdot L \cdot [(\sigma-0,5) \cdot (U^{n+3/2} - U^{n+1/2}) + 0,5 \cdot (U^{n+3/2} + U^{n+1/2})]] \cdot h = \\ & = -\mu \cdot \tau \cdot (\sigma-0,5) \cdot \sum_{\omega} \frac{(\Lambda \cdot U^{n+3/2})^2 - (\Lambda \cdot U^{n+1/2})^2}{2 \cdot \tau} \cdot h - \mu \cdot \sum_{\omega} \frac{[\Lambda \cdot (U^{n+3/2} + U^{n+1/2})]^2}{2} \cdot h, \end{aligned}$$

где оператор $L \cdot$ имеет вид

$$(L \cdot U^{n+1/2})_i = \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i-1/2}^{n+1/2}}{h}.$$

Второй член в интегральном равенстве, учитывая, преобразуем к виду

$$\frac{J^{n+1}}{4} \cdot (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) = \frac{1}{8} \cdot [(u_{i+1}^{n+2} + u_{i+1}^{n+1})^2 - (u_i^{n+1} + u_i^n)^2 - (u_{i+1}^{n+2} + u_i^{n+1})^2 + (u_{i+1}^{n+1} + u_i^n)^2],$$

с учетом второй строки системы последнее соотношение можно упростить:

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{\omega} J^{n+1} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) = \frac{1}{8} \cdot \sum_{\omega} [(u_{i+1}^{n+2} + u_{i+1}^{n+1})^2 - (u_i^{n+1} + u_i^n)^2] - \sum_{\omega} \frac{(U_{i+1/2}^{n+3/2})^2 - (U_{i+1/2}^{n+1/2})^2}{2}.$$

Интегральное тождество преобразуется к виду:

$$\sum_{\omega} (1-r) \cdot \frac{(U_{i+1/2}^{n+3/2})^2 - (U_{i+1/2}^{n+1/2})^2}{2 \cdot \tau} \cdot h + \frac{r}{4} \cdot \sum_{\omega} \left[\frac{(u_{i+1}^{n+2} + u_{i+1}^{n+1})^2 - (u_i^{n+1} + u_i^n)^2}{2 \cdot \tau} \right] \cdot h +$$

$$+ \mu \cdot \tau \cdot (\sigma - 0,5) \cdot \sum_{\omega} \frac{(\Lambda \cdot U^{n+3/2})^2 - (\Lambda \cdot U^{n+1/2})^2}{2 \cdot \tau} \cdot h = -\mu \cdot \sum_{\omega} \frac{[\Lambda \cdot (U^{n+3/2} + U^{n+1/2})]^2}{2} \cdot h.$$

Второй член в левой части этого равенства можно представить как

$$\frac{r}{4} \cdot \sum_{\omega} \left[\frac{(u_{i+1}^{n+2} + u_{i+1}^{n+1})^2 - (u_i^{n+1} + u_i^n)^2}{2 \cdot \tau} \right] \cdot h =$$

$$= \frac{r}{4} \cdot \sum_{\omega} \left\{ \frac{[(u_{i+1}^{n+2} + u_{i+1}^{n+1})^2 + (u_i^{n+2} + u_i^{n+1})^2] - [(u_{i+1}^{n+2} + u_i^{n+1})^2 + (u_i^{n+1} + u_i^n)^2]}{2 \cdot \tau} \right\} \cdot h.$$

Откуда следует, что при суммировании по всей сетке с учетом финитности сеточных функций он обнуляется. В результате мы приходим к энергетическому неравенству:

$$\sum_{\omega} \frac{E_{i+1/2}^{n+3/2} - E_{i+1/2}^{n+1/2}}{2 \cdot \tau} \cdot h = -\mu \cdot \sum_{\omega} \frac{[\Lambda \cdot (U^{n+3/2} + U^{n+1/2})]^2}{2} \cdot h \leq 0, \quad (1.55)$$

где

$$E_{i+1/2}^{n+3/2} = (1-r) \cdot (U_{i+1/2}^{n+3/2})^2 + \mu \cdot \tau \cdot (\sigma - 0,5) \cdot 0,5 \cdot [(\Lambda \cdot U^{n+3/2})_{i+1}^2 + (\Lambda \cdot U^{n+3/2})_i^2]. \quad (1.56)$$

Вычислительный алгоритм будет устойчивым, если квадратичная форма будет положительно определенной. Условия положительной определенности будут заведомо выполнены при

$$r < 1; \quad \sigma \geq 0,5. \quad (1.57)$$

Можно показать, что для явной схемы ($\sigma = 0$) отсюда следует жесткое ограничение на величину допустимого шага по времени, характерное для явных разностных уравнений параболического типа:

$$\frac{\mu \cdot \tau}{h^2} \leq \frac{1-r}{2}. \quad (1.58)$$

1.1.11. Примеры тестовых расчетов. Линейный перенос в случае разрывной и непрерывной функции начального распределения

В качестве начальных условий возьмем единичную ступеньку:

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0; \\ 1 & \text{if } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

Для решения такого рода задач в литературе используются разностные схемы со специальными ограничителями – лимитерными функциями [31] (в англоязычной литературе – Total Variation Diminishing Schemes, TVD) [32]. Лимитерные функции – традиционный способ борьбы с паразитными осцилляциями, возникающими у схем в силу дисперсионных ошибок на грубых сетках, заслуживающий самостоятельного обзора. В рамках данной работы достаточно корректным будет отметить, что основная идея лимитерных функций заключается в ограничении производных решения, входящих в потоки разностной схемы. Производные решения ограничиваются таким образом, чтобы в области гладкости решения порядок аппроксимации разностной схемы сохранялся, а в области больших градиентов паразитные осцилляции подавлялись так, чтобы при этом суммарная вариация решения на сетке уменьшалась.

На рис. 1.23 приведены результаты расчетов через $NT = 300$ шагов по времени, полученные по схеме «КАБАРЕ» с коррекцией и трем TVD схемам первого порядка по времени и второго-третьего порядка аппроксимации по пространству типа Ван Лира с различными лимитерными функциями: *minmod*, *SuperBee* и лимитером, предложенным в [33]. В случае последней лимитерной функции использовалась схема 3-го порядка по пространству. Расчет проводился на сетке с $h = 1/25$, с числом Куранта – Фридрихса – Леви $CFL = 0,4$.

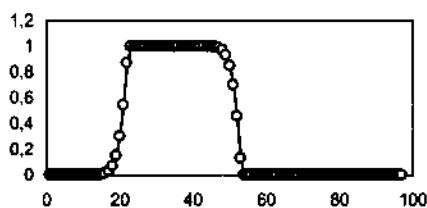


Рис. 1.23а. Результаты расчета переноса «ступеньки» по схеме «КАБАРЕ»

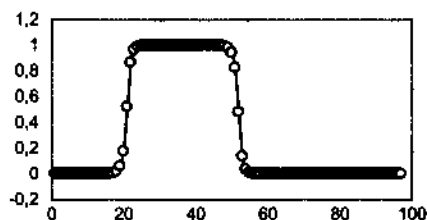


Рис. 1.23б. Результаты расчета переноса «ступеньки» по схеме высокой разрешающей способности с лимитером *minmod*

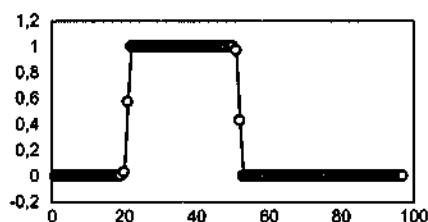


Рис. 1.23с. Результаты расчета переноса «ступеньки» по схеме высокой разрешающей способности с лимитером SuperBee

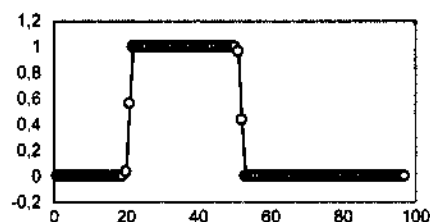


Рис. 1.23d. Результаты расчета переноса «ступеньки» по схеме [33]

Видно, что схема «КАБАРЕ» с коррекцией сопоставима с TVD-схемой с лимитером minmod и несколько уступает остальным схемам. Однако ситуация кардинально меняется, если в качестве начальных данных взять гладкий профиль, например, в виде положительной части синусоиды:

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0; \\ \sin(x) & \text{if } 0 < x \leq \pi; \\ 0 & \text{if } x > \pi. \end{cases}$$

На рис. 1.24 приведены результаты расчетов через $NT = 1000$ шагов по времени, полученные по тем же схемам. Расчеты проводились на сетке с $h = \pi/50$, при $CFL = 0,4$.

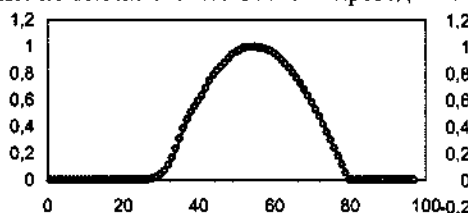


Рис. 1.24а. Результаты расчета переноса параболического профиля по схеме «КАБАРЕ»

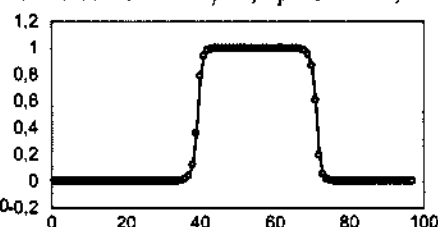


Рис. 1.24b. Результаты расчета переноса параболического профиля по схеме TVD с лимитером minmod

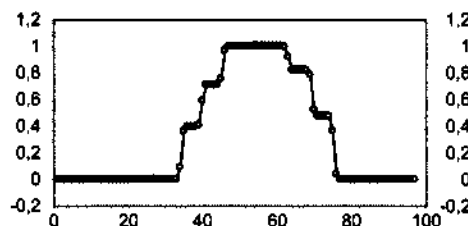


Рис. 1.24а. Результаты расчета переноса параболического профиля по схеме TVD с лимитером SuperBee

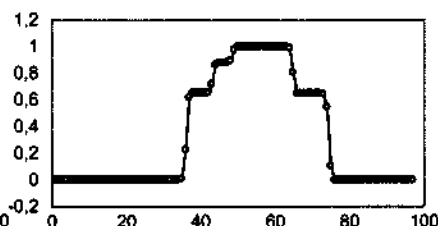


Рис. 1.24b. Результаты расчета переноса параболического профиля по схеме В. Ф. Тиликина

Расчеты при других числах Куранта показывают, что результаты «КАБАРЕ» остаются практически без изменения. В этом примере видно, что использование «КАБАРЕ» в широком диапазоне чисел Куранта не приводит к паразитным артефактам решения типа образования нефизичных разрывов в гладком профиле, в отличие от стандартных схем класса TVD.

1.1.12. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на случай дивергентной формы представления линейного уравнения переноса

В заключение первой части этой главы рассмотрим ситуацию, когда скорость переноса не является константой, а зависит от пространственной координаты. Уравнение при этом остается линейным. Если при переносе с переменной скоростью выполняется закон сохранения, то соответствующее уравнение записывается в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial c \cdot u}{\partial x} = 0; \quad c = c(x). \quad (1.59)$$

Ясно, что описанные ранее варианты алгоритма «КАБАРЕ» здесь не работают. Свойство консервативности является принципиально важным, оно должно быть заложено в основу модификации прежнего алгоритма.

Для коррекции потоковых переменных из принципа максимума нам потребуется и «характеристическая» форма записи этого уравнения в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = Q \equiv -u \cdot \frac{\partial c}{\partial x}; \quad c = c(x). \quad (1.60)$$

На первом этапе модифицированного алгоритма «КАБАРЕ» вычислим промежуточное значение консервативной переменной по дивергентной схеме первого порядка аппроксимации:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{(c \cdot u)_{i+1}^n - (c \cdot u)_i^n}{h} = 0. \quad (1.61)$$

Для нахождения прикидочных величин потоковых переменных на новом временном слое используем линейную экстраполяцию по той или иной диагонали пространственно-временной расчетной ячейки, в зависимости от направления скорости c_{i+1} в соответствующем узле:

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n & \text{if } c_{i+1} > 0 \\ 2 \cdot U_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+2}^n & \text{if } c_{i+1} \leq 0 \end{cases}. \quad (1.62)$$

Для нелинейной коррекции этих величин в соответствии с принципом максимума нам потребуются величины максимумов и минимумов искомой переменной в прилегающих к узлу с номером $(i+1)$ ячейках. Для левой ячейки оценим эти величины как

$$\begin{aligned}\max(u)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \max(u_i^n, U_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n) + \tau \cdot \langle Q \rangle_{i+1/2}; \\ \min(u)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \min(u_i^n, U_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n) + \tau \cdot \langle Q \rangle_{i+1/2};\end{aligned}\quad (1.63)$$

для правой ячейки аналогичным образом:

$$\begin{aligned}\max(u)_{i+3/2}^{n+1/2} &= \max(u_{i+1}^n, U_{i+3/2}^n, u_{i+2}^n) + \tau \cdot \langle Q \rangle_{i+3/2}; \\ \min(u)_{i+3/2}^{n+1/2} &= \min(u_{i+1}^n, U_{i+3/2}^n, u_{i+2}^n) + \tau \cdot \langle Q \rangle_{i+3/2}.\end{aligned}\quad (1.64)$$

Средние величины по ячейкам от правых частей, входящие в эти выражения, можно получить из аппроксимации левой части уравнения по уже вычисленным значениям промежуточных консервативных переменных и ранее известным потоковым переменным на текущем временном слое:

$$\begin{aligned}\langle Q \rangle_{i+1/2} &= \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau/2} + \frac{c_{i+1} + c_i}{2} \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}; \\ \langle Q \rangle_{i+3/2} &= \frac{U_{i+3/2}^{n+1/2} - U_{i+3/2}^n}{\tau/2} + \frac{c_{i+2} + c_{i+1}}{2} \cdot \frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{h}.\end{aligned}\quad (1.65)$$

Блок нелинейной коррекции потоковых переменных на новом временном слое несколько усложняется из-за того, что конвективная скорость в каждом узле может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

При $c_{i+1} > 0$ нелинейная коррекция проводится по левой ячейке:

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} u_{i+1}^{n+1} & \text{if } \min(u)_{i+1/2}^{n+1/2} \leq u_{i+1}^{n+1} \leq \max(u)_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ \min(u)_{i+1/2}^{n+1/2} & \text{if } u_{i+1}^{n+1} < \min(u)_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ \max(u)_{i+1/2}^{n+1/2} & \text{if } u_{i+1}^{n+1} > \max(u)_{i+1/2}^{n+1/2}. \end{cases}\quad (1.66)$$

При $c_{i+1} \leq 0$ – по правой ячейке:

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} u_{i+1}^{n+1} & \text{if } \min(u)_{i+3/2}^{n+1/2} \leq u_{i+1}^{n+1} \leq \max(u)_{i+3/2}^{n+1/2}; \\ \min(u)_{i+3/2}^{n+1/2} & \text{if } u_{i+1}^{n+1} < \min(u)_{i+3/2}^{n+1/2}; \\ \max(u)_{i+3/2}^{n+1/2} & \text{if } u_{i+1}^{n+1} > \max(u)_{i+3/2}^{n+1/2}. \end{cases}\quad (1.67)$$

Как и в предыдущей версии алгоритма, вычислительный цикл завершается вычислением консервативных переменных на новом временном слое по дивергентной разностной схеме:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(c \cdot u)_{i+1}^{n+1} - (c \cdot u)_i^{n+1}}{h} = 0. \quad (1.68)$$

Если сложить (1.61) и (1.68), то получим консервативную аппроксимацию исходного уравнения, обладающую на гладких решениях формально вторым порядком аппроксимации:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{1}{2} \cdot \frac{[(c \cdot u)_{i+1}^{n+1} + (c \cdot u)_{i+1}^n] - [(c \cdot u)_i^{n+1} + (c \cdot u)_i^n]}{h} = 0 \quad (1.69)$$

Эта схема в дальнейшем будет служить универсальной основой для обобщения схемы «КАБАРЕ».

Проиллюстрируем работоспособность описанного алгоритма на простейшей тестовой задаче. Пусть уравнение определено на отрезке $x \in [0, 1]$. Скорость переноса является разрывной функцией и имеет вид:

$$c(x) = \begin{cases} c_L > 0 & \text{if } x < 0,5; \\ c_R > 0 & \text{if } x \geq 0,5. \end{cases} \quad (1.70)$$

Начальные данные – нулевые:

$$u(x, t_0) = 0. \quad (1.71)$$

На левой границе задано граничное условие:

$$u(0, t) = u_L; \quad t \geq t_0. \quad (1.72)$$

Легко построить аналитическое решение этой задачи. В течение времени $\Delta t = 0,5/c_L$ от левой границы вправо со скоростью c_L будет двигаться ступенька с амплитудой u_L . Когда точка разрыва этой ступеньки достигнет координаты $x = 0,5$, ступенька изменит амплитуду на $u_R = (c_L \cdot u_L)/c_R$ и будет до конца области перемещаться со скоростью c_R . На рис. 1.25 приведены профили решения при следующих параметрах:

$u_L = 1$, $c_L = 2$, $c_R = 1$. Число расчетных ячеек $N = 100$, величина шага по времени $\tau = 2,5 \cdot 10^3$.

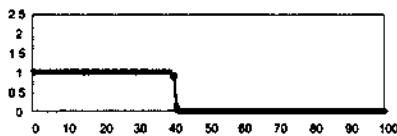


Рис. 1.25а. Распространение ступеньки по левой половине области



Рис. 1.25б. Переход через точку разрыва конвективной скорости, расположенной на середине области.

1.1.13. Некоторые комментарии

Схема «КАБАРЕ» (CABARET) в разных публикациях представлена в различных видах. В первых работах [9, 10] использовано ее трехслойное представление, которое, как впоследствии выяснилось, совпадает с одним из частных случаев более общего семейства схем, исследованных ранее А. Айзерлисом [34]. В западной литературе это семейство схем получило название Upwind LeapFrog. Трехслойное представление обладает тем недостатком, что в исходном виде практически не поддается обобщению на более содержательные случаи. Попытки обобщения этого представления на двумерные уравнения аэроакустики [35, 36] нельзя считать в полной мере успешными. Ситуация существенно изменилась после того, как в схему «КАБАРЕ» были введены т. н. «консервативные» переменные, относящиеся только к промежуточным слоям по времени [19, 29, 37]. Эту форму записи можно было бы назвать «2,5-слойной». Она позволила ввести нелинейную коррекцию потоковых переменных и достаточно успешно обобщить схему «КАБАРЕ» на ряд одномерных и двумерных задач [38, 39]. При этом, однако, оставались проблемы, связанные с аппроксимацией по времени при неравномерных временных шагах. Окончательно двухслойное представление схемы «КАБАРЕ» оформилось в работе [40]. В дальнейшем именно оно стало платформой для успешного применения схемы «КАБАРЕ» в различных областях науки.

Следует подчеркнуть, что диссипативные и дисперсионные свойства схемы «КАБАРЕ» для простейшего линейного уравнения переноса остаются неизменными при переходе от одного ее представления к другому.

Перечислим основные свойства двухслойной схемы «КАБАРЕ» для уравнения линейного переноса.

Двухслойная схема «КАБАРЕ»:

- определена на максимально компактном вычислительном шаблоне;
- имеет второй порядок аппроксимации на неравномерных пространственно-временных расчетных сетках;
- устойчива при числах Куранта от нуля до единицы;
- на равномерных расчетных сетках является точной при двух числах Куранта: 1 и 0,5;
- бездиссипативна, в том числе и на неравномерных сетках (отсутствует амплитудная ошибка);
- проявляет улучшенные дисперсионные свойства;
- обладает однопараметрическим семейством квадратичных законов сохранения;
- позволяет вводить нелинейную коррекцию потоков на основе прямого использования принципа максимума;
- позволяет естественным образом реализовывать алгоритм нелинейной коррекции потоков, базирующийся непосредственно на принципе максимума без каких-либо настроечных параметров;
- при включении дополнительного параметра (диссипатора Паниковского) позволяет управлять диссипативными и дисперсионными свойствами;
- при использовании коррекции потоков монотонна при числах Куранта от 0 до 0,5.

Следует более подробно остановиться на утверждении об «улучшенных дисперсионных свойствах» схемы «КАБАРЕ». В работе [20] на основе интерполяционно-характеристического метода (метода обратной характеристики) были построены все мыслимые явные разностные схемы второго порядка аппроксимации для простейшего линейного уравнения переноса на компактных вычислительных шаблонах. Вычислительный шаблон считался компактным, если минимальное расстояние между его составляющими не превышает размера диагонали пространственно-временной расчетной ячейки. Рассматривались только такие компактные шаблоны, на которых можно было получить только второй и никак не больший порядок аппроксимации.

Было показано, что существует всего 19 таких схем, в число которых входят и все известные ранее схемы, такие как схема Лакса – Вендроффа, схема «крест», «КАБАРЕ» и другие. Были построены диссипативные и дисперсионные поверхности для каждой из таких схем и для устойчивых схем были проведены расчеты по оценке их транспортных свойств на серии тестовых профилей. Оказалось, что при купировании особенностей дисперсионной поверхности схемы «КАБАРЕ» включением диссипатора Паниковского с коэффициентом 0,01, дисперсионные и транспортные (без нелинейной коррекции потоков) характеристики схемы «КАБАРЕ» оказались наилучшими.

К числу недостатков схемы «КАБАРЕ» можно отнести расширение набора независимых переменных, что приводит, особенно в многомерных случаях, к повышенным требованиям на размер оперативной памяти.

1.2. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на одномерные скалярные квазилинейные законы сохранения гиперболического типа

1.2.1. Базовый алгоритм

Следующим этапом в обобщении схемы «КАБАРЕ» на более содержательные случаи является одномерное квазилинейное скалярное уравнение гиперболического типа, выражающее, как правило, какой либо закон сохранения. Рассмотрим простейшее обобщение уравнения линейного переноса в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = Q(x, t); \quad F(u) = c \cdot u; \quad c = \text{const} > 0. \quad (1.73)$$

Аппроксимацию уравнения будем строить на расчетной сетке, описанной в первой части настоящей главы. Как и в линейном случае, наряду с «потокowymi» переменными, относящимися к узлам расчетной сетки (u_i^n), будем использовать и т. н. «консервативные» переменные, определенные как на целых ($U_{i+1/2}^{n+1}$), так и на полуцелых ($U_{i+1/2}^{n+1/2}$) временных слоях.

Применим алгоритм схемы «КАБАРЕ», описанный для линейного случая, к уравнению (1.73). Соответствующую модификацию схемы «КАБАРЕ» удобно также разбить на три последовательных этапа.

Этап 1. Вычисление промежуточных значений консервативных переменных:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{F(u_{i+1}^n) - F(u_i^n)}{h_{i+1/2}} = Q(x_{i+1/2}, t_n). \quad (1.74)$$

Этап 2. Вычисление прикидочных значений потоковых переменных на новом временном слое и их нелинейная коррекция:

$$\tilde{u}_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n; \quad u_{i+1}^{n+1} = \text{MaxMin}(\tilde{u}_{i+1}^{n+1}). \quad (1.75)$$

Этап 3. Вычисление консервативных переменных на новом временном слое:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{F(u_{i+1}^{n+1}) - F(u_i^{n+1})}{h_{i+1/2}} = Q(x_{i+1/2}, t_{n+1}). \quad (1.76)$$

Новым важным обстоятельством является также то, что при наличии ненулевой правой части у уравнения величины $\max(u)_{i+1/2}^n$ и $\min(u)_{i+1/2}^n$, входящие в оператор *MaxMin*, изменятся и будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \max(u)_{i+1/2}^n &= \max(u_i^n, U_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n) + \tau_{n+1/2} \cdot Q(x_{i+1/2}, t_{n+1/2}); \\ \min(u)_{i+1/2}^n &= \max(u_i^n, U_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n) + \tau_{n+1/2} \cdot Q(x_{i+1/2}, t_{n+1/2}). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Нетрудно видеть, что разностные уравнения первого и третьего этапов аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение со вторым порядком по пространству и с первым по времени, однако, если сложить эти уравнения, то консервативные величины на промежуточном слое сократятся, и мы получим центрированную разностную схему

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{F(\bar{u}_{i+1}) - F(\bar{u}_i)}{h_{i+1/2}} = \frac{Q(t_n) + Q(t_{n+1})}{2}; \quad \bar{u}_i = \frac{u_i^{n+1} + u_i^n}{2}, \quad (1.78)$$

имеющую второй порядок аппроксимации как по пространству, так и по времени. Что касается второго этапа, то оператор линейной экстраполяции также аппроксимирует соотношение $U_{i+1/2}^{n+1/2} = 0.5 \cdot (u_{i+1}^{n+1} + u_i^n)$ со вторым порядком, что остается справедливым для переменных шагов по времени.

Полный цикл вычислений можно также разбить и на два этапа – «предиктор» и «корректор».

На этапе «предиктор» происходит вычисление промежуточных консервативных переменных и прикидочных значений потоковых переменных:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{F(u_{i+1}^n) - F(u_i^n)}{h_{i+1/2}} = Q(x_{i+1/2}, t_n); \quad \tilde{u}_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n. \quad (1.79)$$

На этапе «корректор» проводится нелинейная коррекция потоковых переменных и вычисление консервативных переменных на новом слое по времени.

$$u_{i+1}^{n+1} = \text{MaxMin}(\tilde{u}_{i+1}^{n+1});$$

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{F(u_{i+1}^{n+1}) - F(u_i^{n+1})}{h_{i+1/2}} = Q(x_{i+1/2}, t_{n+1}). \quad (1.80)$$

С методической точки зрения более предпочтительна двухэтапная форма записи алгоритма, в то время как эффективность программной реализации выше для трехэтапной формы.

На начальном временном слое консервативные и потоковые переменные в системе «предиктор – корректор» должны быть согласованы. Для этого достаточно сначала задать консервативные переменные и затем определить потоковые величины как:

$$u_{i+1}^1 = 0.5 \cdot (U_{i+1/2}^1 + U_{i+3/2}^1) \quad (1.81)$$

Схема «КАБАРЕ» в форме системы «предиктор – корректор» наиболее просто обобщается на более сложные и содержательные случаи.

1.2.2. Проблема переключения потоков в схеме «КАБАРЕ»

Во всех рассмотренных ранее вариантах представления схемы «КАБАРЕ» предполагалось, что скорость переноса является константой. Если эта константа больше нуля, экстраполяция прикидочного значения потоковой переменной осуществляется по диагонали пространственно-временной расчетной ячейки из левого нижнего угла в правый верхний, если меньше нуля – то из правого нижнего угла в левый верхний. Можно сказать, что направление экстраполяции качественно совпадает с направлением характеристики. Если скорость звука в уравнении не является постоянной и зависит от искомой переменной

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u, x, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.82)$$

то ее знак (направление характеристики) также может меняться от ячейки к ячейке, причем он может оказаться различным даже в разных точках одной и той же ячейки. В этом случае возникает проблема выбора направлений линейной экстраполяции потоковых переменных. Кроме того, в некоторые узловые точки могут приходить сразу две характеристики, а в другие – ни одной. В этом случае, кроме проблемы переключения направлений, возникает проблема выбора одной потоковой переменной из двух, либо одной из нуля вариантов. Все эти вопросы будем называть «задачей переключения потоков».

1.2.3. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на случай нелинейных потоков

Будем считать, что в уравнении (1.73) функция потоков $F(u)$ является достаточно произвольной дифференцируемой функцией. Первую производную этой функции бу-

дем называть скоростью звука и обозначать как $c(u) = F'(u)$. Схему «КАБАРЕ» в форме системы «предиктор – корректор» для уравнения с нелинейной функцией потоков запишем в виде:

– «предиктор»

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{F(u_{i+1}^n) - F(u_i^n)}{h_{i+1/2}} &= Q(x_{i+1/2}, t_n); \\ \tilde{u}_{L,i+1}^{n+1} &= 2 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n; \quad \tilde{u}_{R,i+1}^{n+1} = 2 \cdot U_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+2}^n; \end{aligned} \quad (1.83)$$

– «корректор»

$$\begin{aligned} u_{L,i+1}^{n+1} &= \text{MaxMin}(\tilde{u}_{L,i+1}^{n+1})_{i+1/2}; \quad u_{R,i+1}^{n+1} = \text{MaxMin}(\tilde{u}_{R,i+1}^{n+1})_{i+3/2}; \\ u_{i+1/2}^{n+1} &= G(\tilde{u}_{L,i+1}^{n+1}, \tilde{u}_{R,i+1}^{n+1}, U_{i+1/2}^{n+1/2}, U_{i+3/2}^{n+1/2}); \\ \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{F(u_{i+1}^{n+1}) - F(u_i^{n+1})}{h_{i+1/2}} &= Q(x_{i+1/2}, t_{n+1}). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Здесь оператор $G(\tilde{u}_{L,i+1}^{n+1}, \tilde{u}_{R,i+1}^{n+1}, U_{i+1/2}^{n+1/2}, U_{i+3/2}^{n+1/2})$ – неопределенный пока оператор переключения потоковых переменных $\tilde{u}_{L,i+1}^{n+1}, \tilde{u}_{R,i+1}^{n+1}$.

Первая группа уравнений – «предиктор» – состоит из консервативной разностной схемы для вычисления промежуточного значения консервативной переменной и двух выражений, представляющих собой линейную экстраполяцию потоковой переменной в узел $(i+1, n+1)$ из обеих расчетных ячеек, прилегающих к данному узлу. Тем самым решена первая часть задачи переключения потоков: вместо одного, зависящего от направления прихода характеристики направления экстраполяции, используются сразу оба. Это дает два, равноценных на текущем этапе прикидочных значения, правое $\tilde{u}_{R,i+1}^{n+1}$ и левое $\tilde{u}_{L,i+1}^{n+1}$.

Вторая группа уравнений – «корректор» – содержит операции нелинейной коррекции обоих значений прикидочных потоковых переменных, где оператор $u_{L,i+1}^{n+1} = \text{MaxMin}(\tilde{u}_{L,i+1}^{n+1})_{i+1/2}$ совпадает с

$$\text{MaxMin}(\tilde{u}_{R,i+1}^{n+1})_{i+3/2} = \begin{cases} \tilde{u}_{R,i+1}^{n+1} & \text{if } \min(u)_{i+3/2}^n \leq \tilde{u}_{R,i+1}^{n+1} \leq \max(u)_{i+3/2}^n \\ \max(u)_{i+3/2}^n & \text{if } \tilde{u}_{R,i+1}^{n+1} > \max(u)_{i+3/2}^n \\ \min(u)_{i+3/2}^n & \text{if } \tilde{u}_{R,i+1}^{n+1} < \min(u)_{i+3/2}^n \end{cases}. \quad (1.85)$$

Следует отметить, что процедуры нелинейной коррекции для левого и правого прикидочных значений потоковой переменной реализуются таким образом, как если бы характеристика от левого значения пересекала нижнюю границу левой ячейки, а характеристика от правого значения – нижнюю границу правой ячейки.

Нашей ближайшей целью является построение «универсальной» формы оператора $G(\tilde{u}_{L,i+1}^{n+1}, \tilde{u}_{R,i+1}^{n+1}, U_{i+1/2}^{n+1/2}, U_{i+3/2}^{n+1/2})$, пригодного как для выпуклых, так и невыпуклых потоков.

1.2.4. Частная задача Римана для уравнения с выпуклыми потоками

Предположим вначале, что нелинейная функция потоков является выпуклой (вниз или вверх), т. е.

$$[F''(u) > 0] \wedge [F''(u) < 0] \quad (1.86)$$

и для однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \quad (1.87)$$

рассмотрим задачу Коши с кусочно-постоянными начальными условиями:

$$u(x, t_0) = \begin{cases} U_L, & x \leq 0 \\ U_R, & x > 0. \end{cases} \quad (1.88)$$

Задачу (1.87), (1.88) – называют задачей о распаде разрыва или задачей Римана. Задача Римана является автомодельной и для выпуклых функций потоков легко решается аналитически. Решением является либо ударная волна (сильный разрыв), распространяющаяся в какую-либо сторону, либо волна разрежения, направление движения которой зависит от соотношения величин на разрыве, а форма (пространственный профиль) волны определяется видом первой производной $F'(u)$.

В дальнейшем нас не будет интересовать поведение решения во всех точках пространственной области. Интерес будет представлять только значение решения в точке начального расположения разрыва, т. е. в точке $x = 0$. Такую постановку будем называть *частной задачей Римана*.

Из определения обобщенного решения задачи [2] следует, что скорость распространения разрыва определяется выражением:

$$D = \frac{F(U_R) - F(U_L)}{U_R - U_L}. \quad (1.89)$$

Условия устойчивости разрыва имеют вид

$$\begin{aligned} c_L = F'(U_L) > D > F'(U_R) = c_R, & \quad D \geq 0, \\ c_L = F'(U_L) < D < F'(U_R) = c_R, & \quad D < 0. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Для выпуклых функций возможны или неравенства (1.90), отвечающие устойчивым ударным волнам, либо противоположные неравенства:

$$\begin{aligned} c_L = F'(U_L) < D < F'(U_R) = c_R, & D \geq 0, \\ c_L = F'(U_L) > D > F'(U_R) = c_R, & D < 0, \end{aligned} \quad (1.91)$$

указывающие на волны разрежения.

Выпишем решение частной задачи Римана для функции потока, выпуклой вниз.

Пусть $F'(U_L) > D > F'(U_R)$, $D > 0$, тогда решение будет представлять собой ударную волну, распространяющуюся от точки разрыва вправо. При $F'(U_L) < D < F'(U_R)$, $D > 0$, $F'(U_L) \geq 0$ вправо будет распространяться волна разрежения. В обоих случаях во все последующие моменты времени в точке разрыва будет сохраняться одно и то же значение $u(0, t) = U_L$.

Если $D < 0$, $F'(U_R) \leq 0$, то реализуется ударная волна или волна разрежения, двигающаяся влево, и мы получаем $u(0, t) = U_R$.

Особого рассмотрения заслуживает случай двух волн разрежения, распространяющихся от точки $x = 0$ в разные стороны, реализующийся при условии $F'(U_L) \leq 0$, $F'(U_R) \geq 0$. Тогда мы имеем $u(0, t) = u^*$, где u^* представляет собой точку экстремума, в которой выполняется условие $F'(u^*) = 0$. Для выпуклой вниз функции это будет единственная точка глобального минимума, для выпуклой вверх функции – глобального максимума.

Описанное решение частной задачи Римана удобно представить в виде оператора Римана, сопоставляющего значениям величин U_R, U_L величину u^e , представляющую собой значение точного решения в точке разрыва:

$$u^e = \text{Rim}(U_R, U_L). \quad (1.92)$$

Для выпуклых функций потока этот оператор можно записать в виде:

$$\text{Rim}(U_L, U_R) = \begin{cases} U_L & \text{if } D > 0, F'(U_L) \geq 0 \\ U_R & \text{if } D < 0, F'(U_R) \leq 0 \\ u^* & \text{if } (F'(U_R) > 0) \& (F'(U_L) < 0) \end{cases} \quad (1.93)$$

Для частного, но исключительно важного с точки зрения практики расчетов уравнения Хопфа с выпуклой вниз функцией потока $F(u) = 0.5 \cdot u^2$ этот оператор можно записать как:

$$\text{Rim}(U_L, U_R) = \begin{cases} U_L & \text{if } 2 \cdot D = U_R + U_L \geq 0 \\ U_R & \text{if } 2 \cdot D = U_R + U_L < 0, \\ 0 & \text{if } (U_R > 0) \& (U_L < 0) \end{cases} \quad (1.94)$$

где подразумевается, что перечисленные логические условия выполняются последовательно сверху вниз.

1.2.5. Форма представления оператора Римана, не опирающаяся на свойство дифференцируемости функции потока

Рассмотрим возможные значения оператора Римана в ситуации, когда $U_R \geq U_L$. Неравенство $D \geq 0$ в этом случае реализуется, когда $F(U_R) \geq F(U_L)$. Если, кроме того, $F'(U_L) \geq 0$, то значением оператора Римана оказывается величина, отвечающая меньшей величине потока, т. е. U_L . Если же $F'(U_L) < 0$, то в качестве значения принимается точка глобального минимума потока u , принадлежащая интервалу (U_R, U_L) .

В случае $D < 0$ выполняется неравенство $F(U_R) < F(U_L)$, и при $F'(U_R) \leq 0$ значением оператора является величина U_R , также соответствующая минимальному значению потока. При $F'(U_R) > 0$ значение оператора опять равно u .

Таким образом, при $U_R \geq U_L$, оператор Римана принимает значение, в котором величина потока достигает минимума на замкнутом отрезке $[U_R, U_L]$.

Аналогично можно показать, что при условии $U_R < U_L$ оператор Римана принимает значения, соответствующие максимальной величине потока $F(u)$ на отрезке $[U_R, U_L]$.

Тем самым мы установили, что для выпуклых функций потока оператор можно представить в более компактной форме, не содержащей производных:

$$Rim(U_L, U_R) = \begin{cases} u_{\min} & \text{if } U_R \geq U_L, & u_{\min} = \left[\min_{u \in [U_R, U_L]} (F) \right]^{-1} \\ u_{\max} & \text{if } U_R < U_L, & u_{\max} = \left[\max_{u \in [U_R, U_L]} (F) \right]^{-1} \end{cases} \quad (1.95)$$

где $u_{\min}$ – точка минимума функции $F(u)$ на замкнутом отрезке $u \in [U_R, U_L]$, а $u_{\max}$ – точка максимума этой функции на том же отрезке.

1.2.6. Процедура согласования начальных значений консервативных и потоковых переменных и оператор переключения потоковых переменных

Как уже неоднократно подчеркивалось, в схеме «КАБАРЕ» необходимо согласованным образом задавать значения консервативных и потоковых переменных в полусетках и целых узлах расчетной сетки. При этом консервативные переменные $U_{i+1/2}^1$ естественно считать «основными» и задавать их как «истинные начальные условия», а потоковые – «вспомогательными» и согласовывать их с основными в соответствии с оператором Римана:

$$u_i^1 = Rim(U_{i-1/2}^1, U_{i+1/2}^1). \quad (1.96)$$

Таким образом, это условие согласования можно считать естественным обобщением условия (1.81).

На основе оператора Римана определим оператор $G(u_i, u_r, U_R, U_L)$ как

$$G(u_i, u_r, U_R, U_L) = \begin{cases} u_{\min} & \text{if } U_R \geq U_L, & u_{\min} = \left[\min_{u \in [u_r, u_i]} (F) \right]^{-1} \\ u_{\max} & \text{if } U_R < U_L, & u_{\max} = \left[\max_{u \in [u_r, u_i]} (F) \right]^{-1} \end{cases}.$$

В операторе переключаемыми величинами являются значения u_r, u_l , а условия их переключения совпадают с условиями, определенными в операторе Римана.

1.2.7. Невыпуклые функции потоков. Принцип минимума парциальной локальной вариации

Если условие выпуклости функции потоков (1.86) не выполняется, то структура решения полной задачи Римана заметно усложняется. Результатом распада произвольного разрыва в этом случае могут быть не только ударные волны и волны разрежения, но и их комбинации. Полное описание решения частной задачи Римана в общем случае также превращается в достаточно сложную процедуру. Поэтому, опираясь на точное решение частной задачи Римана для выпуклых функций потока, сформулируем общий принцип и проверим его справедливость на частных решениях уравнения (1.87) с невыпуклыми функциями.

Назовем локальной вариацией консервативной переменной в расчетном узле с номером i величину $Lvar_i^{n+1/2} = |U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i-1/2}^{n+1/2}|$ и проанализируем, как повлияет поток $F(u_i^{n+1})$ в узле i на ее изменение. Из (1.74) и (1.76) находим:

$$\begin{aligned} (U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i-1/2}^{n+1}) &= (U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i-1/2}^{n+1/2}) + \left(\frac{\tau_{n+1/2}}{2h_{i+1/2}} + \frac{\tau_{n+1/2}}{2h_{i-1/2}} \right) F(u_i^{n+1}) - \frac{\tau_{n+1/2}}{2h_{i+1/2}} F(u_{i+1}^{n+1}) - \\ &- \frac{\tau_{n+1/2}}{2h_{i-1/2}} F(u_{i-1}^{n+1}) + \frac{\tau_{n+1/2}}{2} [\mathcal{Q}(x_{i+1/2}, t_{n+1}) - \mathcal{Q}(x_{i-1/2}, t_{n+1})]. \end{aligned}$$

Полагая в правой части отличным от нуля только поток $F(u_i^{n+1})$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} - \Delta U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\varepsilon} &= F(u_i^{n+1}); \quad \varepsilon = \left(\frac{\tau_{n+1/2}}{2h_{i+1/2}} + \frac{\tau_{n+1/2}}{2h_{i-1/2}} \right); \\ \Delta \tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} &= (\tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} - \tilde{U}_{i-1/2}^{n+1}); \quad \Delta U_{i+1/2}^{n+1/2} = (U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i-1/2}^{n+1/2}). \end{aligned} \quad (1.98)$$

Будем считать величину ε бесконечно малой, чтобы исключить эффекты, связанные с конечностью шага по времени. Величину $[(\tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} - \tilde{U}_{i-1/2}^{n+1})]$ будем называть парциальной составляющей локальной вариации $[(U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i-1/2}^{n+1})]$, чтобы подчеркнуть, что она формируется только за счет одного потока в узле i .

Пусть $u_i^{n+1} = u_{\min}$ и $\Delta U_{i+1/2}^{n+1/2} > 0$, тогда получаем

$$\Delta \tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} = \Delta U_{i+1/2}^{n+1/2} + \varepsilon \cdot F(u_{\min}); \quad \Delta \tilde{U}_{*j+1/2}^{n+1} = \Delta U_{i+1/2}^{n+1/2} + \varepsilon \cdot F(u_{*j}^{n+1}), \quad (1.99)$$

где $u_{*j}^{n+1} \in [u_{r,j}^{n+1}, u_{l,j}^{n+1}]$. Вычитая из первого уравнения (1.99) второе, находим:

$$\Delta \tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} - \Delta \tilde{U}_{*j+1/2}^{n+1} = \varepsilon \cdot [F(u_{\min}) - F(u_{*j}^{n+1})] \leq 0$$

или, другими словами, $\Delta \tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} \leq \Delta \tilde{U}_{*j+1/2}^{n+1}$.

Поскольку $\Delta U_{i+1/2}^{n+1/2} > 0$, то при условии ограниченности функции $F(u)$ параметр ε можно всегда взять настолько малым, что будут выполняться неравенства:

$$\Delta \tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} > 0, \quad \Delta \tilde{U}_{*,j+1/2}^{n+1} > 0.$$

Откуда следует неравенство

$$|\Delta \tilde{U}_{i+1/2}^{n+1}| \leq |\Delta \tilde{U}_{*,j+1/2}^{n+1}|. \quad (1.100)$$

Последнее означает, что локальная парциальная вариация при $u_i^{n+1} = u_{\min}$ будет минимальной.

Если $u_i^{n+1} = u_{\max}$ и $\Delta U_{i+1/2}^{n+1/2} < 0$, тогда из (1.98) получаем CV :

$$\Delta \tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} - \Delta \tilde{U}_{*,i+1/2}^{n+1} = \varepsilon \cdot [F(u_{\max}) - F(u_{*,j}^{n+1})] \geq 0; \quad \Rightarrow \quad \Delta \tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} \geq \Delta \tilde{U}_{*,j+1/2}^{n+1}. \quad (1.101)$$

При $\Delta U_{i+1/2}^{n+1/2} < 0$ и условии ограниченности функции $F(u)$ параметр ε можно всегда взять настолько малым, что будут выполняться неравенства $\Delta \tilde{U}_{i+1/2}^{n+1} < 0$, $\Delta \tilde{U}_{*,j+1/2}^{n+1} < 0$, откуда, с учетом (1.101) также приходим к неравенству (1.100). Таким образом, мы доказали, что локальные парциальные вариации во всех случаях будут минимальными, и оператор (1.95) определяет в качестве u_i^{n+1} такое значение из замкнутого отрезка $[u_*, u_i]$, которое приводит к минимальному значению локальной парциальной вариации. Будем называть это утверждение принципом минимума парциальной локальной вариации.

Естественно предположить, что этот принцип будет выполняться и для произвольных измеримых функций потоков $F(u)$. В качестве обобщенного решения уравнения (1.87) в этом случае примем его определение из теории обобщенных решений гиперболических уравнений [41].

1.2.8. Одномерные квазилинейные уравнения с произвольными потоками

Для строго выпуклых потоков задача нахождения максимальных и минимальных значений на отрезке является тривиальной – если точка единственного глобального минимума или максимума находится за пределами отрезка, то нужно сравнить значения потоков только в крайних точках отрезка. Если экстремум лежит на отрезке, то именно он доставляет искомый минимум или максимум.

В более общих случаях поиск минимального или максимального значений может оказаться нетривиальной задачей, тем более, что ее придется решать в каждом узле расчетной сетки и на всех слоях по времени. Общий алгоритм здесь может выглядеть следующим образом:

- по заданным начальным и граничным условиям из принципа максимума определяются максимальные пределы возможного изменения вычисляемой переменной $U_{\max}$ и $U_{\min}$;
- на отрезке возможного изменения решения $u \in [U_{\max}, U_{\min}]$ предварительно находятся все локальные минимумы и максимумы функции потока F :

$$\text{loc max } U(i), i = 1, 2, \dots, n_{\max}; \quad \text{loc min } U(j), j = 1, 2, \dots, n_{\min},$$

если их конечное число. Если локальных минимумов и максимумов – счетное множество, то определяется рекуррентная процедура их последовательного вычисления.

– в каждом расчетном узле для отрезка $[u_{i,j}^{n+1}, u_{i,j}^{n+1}]$, в зависимости от знака $(U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i-1/2}^{n+1/2})$, определяются все входящие в него точки локальных минимумов или максимумов, к которым добавляются границы отрезка, и на этом множестве точек решается задача поиска максимума или минимума функции потока.

Применим этот алгоритм для численного решения ряда тестовых задач.

1.2.9. Примеры тестовых расчетов

А. Случай простейшей выпуклой функции потоков

Рассмотрим случай $F(u) = u^2/2$, CFL = 0,45. Глобальный минимум этой строго выпуклой функции достигается в точке $u = 0$. Рассмотрим в качестве начальных данных единичную ступеньку, так что область значений искомой функции всегда будет находиться в пределах отрезка $u \in [0, 1]$.

Результаты расчетов задачи Хопфа для начальных данных в виде единичной ступеньки, приведенные на рис. 1.25, показывают, что сильный разрыв практически не размазывается, волна разрежения воспроизводится точно, и разрывы производных также не испытывают на себе аппроксимационного сглаживания.

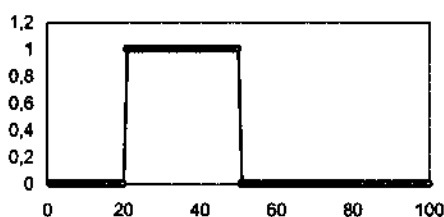


Рис. 1.25a. NT = 0

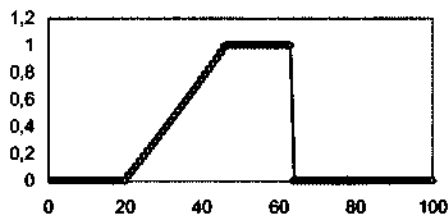


Рис. 1.25b. NT = 60

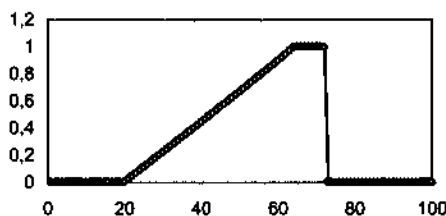


Рис. 1.25c. NT = 100

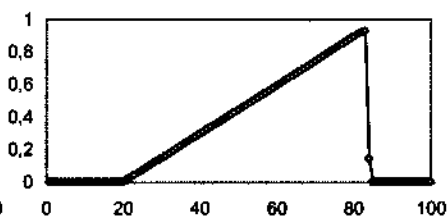


Рис. 1.25d. NT = 150

В. Задача о двух волнах разрежения

Для задачи с потоком Хопфа рассмотрим начальные условия в виде кусочно-постоянной функции:

$$u(x, t_0) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Решение будем искать на временном отрезке $t \in [0, 1]$.

Из принципа максимума следует, что решение должно находиться в интервале $[-1, 1]$.

Если для решения этой задачи использовать вариант алгоритма «КАБАРЕ», приведенный в работе [19], то начальное значение будет оставаться неизменным – распада разрыва в две волны разрежения так и не произойдет. На рис. 1.26 а, б приведены профили решения на два момента времени при включении в алгоритм минимизации точки глобального минимума.

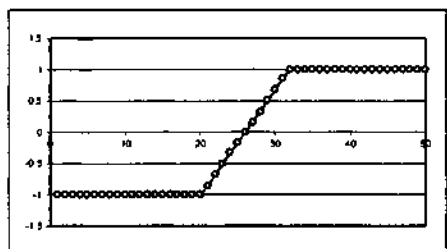


Рис. 1.26а. Профиль решения 1

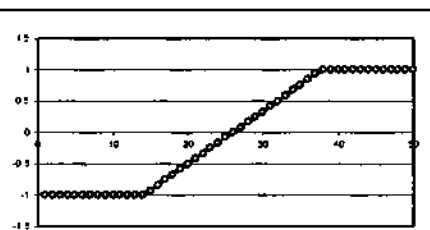


Рис. 1.26б. Профиль решения 2

С. Модельная невыпуклая функция Бакли – Лаверетта

Функция Бакли – Лаверетта $F(u) = \frac{u^2}{4u^2 + (1-u)^2}$ возникает в задачах теории фильтрации в пористых грунтах [42]. Она не является выпуклой. Для невыпуклых функций ударные волны могут соседствовать с волнами разрежения. При начальных данных в виде единичной ступеньки локальных минимумов и максимумов на отрезке $u \in [0, 1]$ нет.

На рис. 1.27 приведены разные фазы решения модельной задачи Бакли – Лаверетта с начальными данными в виде единичной ступеньки. Видно, что решение всегда остается монотонным, и ударные волны размазываются на одну расчетную ячейку.

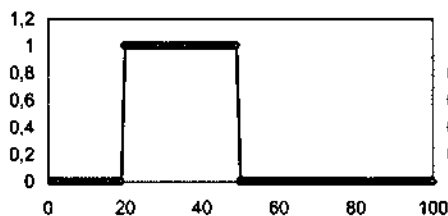


Рис. 1.27а. NT = 0

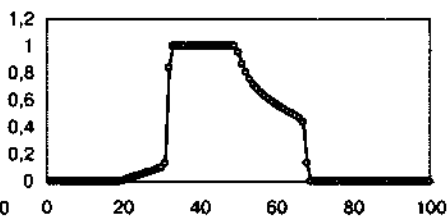


Рис. 1.27б. NT = 50

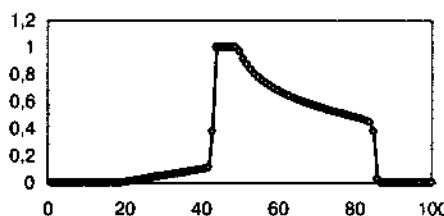


Рис. 1.27c. NT = 100

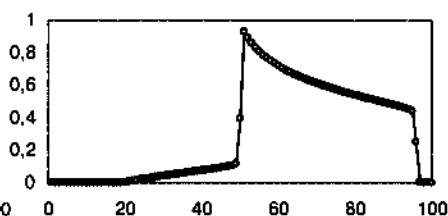


Рис. 1.27d. NT = 130

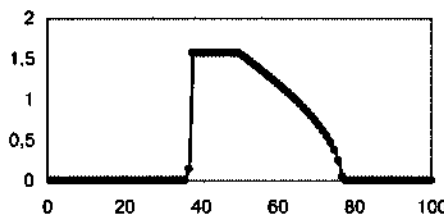
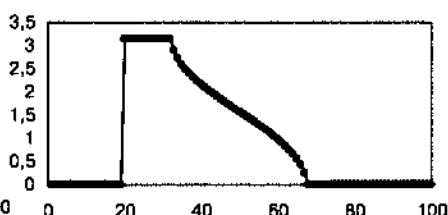
В. Задача для функции потоков с набором локальных экстремумов

Чтобы продемонстрировать возможности предложенного в данной работе алгоритма, рассмотрим задачу Коши для уравнения при $F(u) = \sin(u)$ и начальными данными:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0; \\ \alpha \cdot \pi & \text{if } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

При $0 < \alpha \leq 0,5$ функция потоков является выпуклой, и локальные экстремумы во внутренних точках области существования решения отсутствуют.

На рис. 1.28a приведено численное решение при $\alpha = 0,5$, $h = 1/30$, CFL = 0,45, NT = 60.

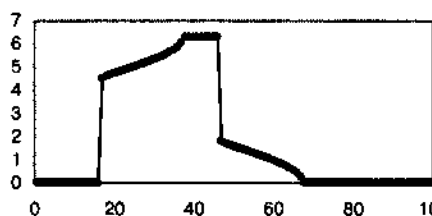
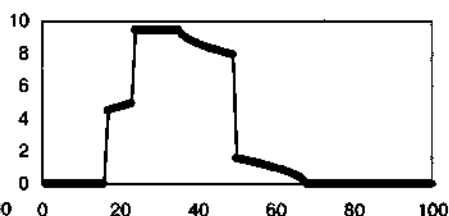
Рис. 1.28a. Решение при $\alpha = 0,5$ Рис. 1.28b. Решение при $\alpha = 1$

При $0 < \alpha \leq 1$ функция потоков остается выпуклой, а скорость звука меняет знак, что отвечает наличию т. н. «звуковой точки». Звуковая точка соответствует точке глобального максимума функции потока, который достигается при $u = 0,5 \pi$.

На рис. 1.28b представлено решение при $\alpha = 1$, $h = 1/30$ и CFL = 0,45, NT = 40.

При $0 < \alpha \leq 2$ функция потоков перестает быть выпуклой, а скорость звука меняет знак два раза. В области определения решения дополнительно появляется локальный минимум при $u = 1,5 \cdot \pi$.

На рис. 1.28c представлено решение при $\alpha = 2$, $h = 1/30$ и CFL = 0,45, NT = 40.

Рис. 1.28c. Решение при $\alpha = 2$ Рис. 1.28d. Решение при $\alpha = 3$

При $0 < \alpha \leq 3$ появляется новый локальный максимум в точке $u = 5\pi/2$.

На рис. 1.28d представлено решение при $\alpha = 3$, $h = 1/30$ и $CFL = 0,45$, $NT = 40$.

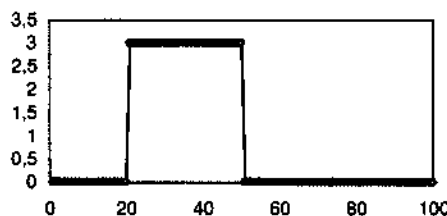
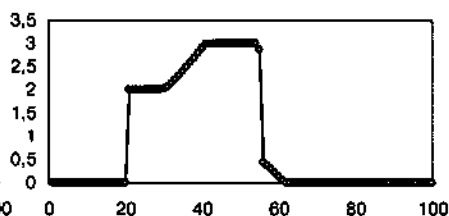
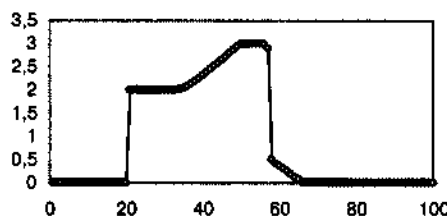
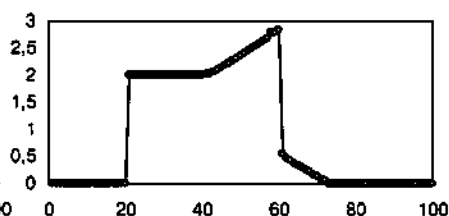
Е. Немонотонная функция потоков с разрывной производной

Например, функция вида $F(u) = |(u-1)^2 - 1|$ имеет один локальный максимум, равный единице при $u = 1$ и два локальных минимума, равных нулю при $u = 0$ и $u = 2$, в которых возникает разрыв производных.

На рис. 1.29 приведены графики решения с начальными данными в виде ступеньки:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0; \\ 3 & \text{if } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

на различные моменты времени. Численное решение хорошо передает как ударные волны, так и волны разрежения.

Рис. 1.29a. $NT = 0$ Рис. 1.29b. $NT = 50$ Рис. 1.29c. $NT = 70$ Рис. 1.29d. $NT = 100$

1.2.10. Некоторые комментарии

При обобщении схемы «КАБАРЕ» с линейного случая на нелинейный, начинают прослеживаться аналогии с другими известными методами. Прежде всего, бросается в глаза близость процедуры линейной экстраполяции потоковых переменных с последующей монотонизацией, основанной на принципе максимума, и технологией подсточного восполнения решения, восходящей к работам В.П. Колгана [31,43,44], А.В. Родионова [45] и др. [33,46,47]. Основное различие состоит в том, что в схеме «КАБАРЕ» сама реконструкция не проводится, а определяются лишь ее последствия в заданных точках. Кроме того, все эти операции осуществляются в пределах одной только расчетной ячейки, что роднит схему «КАБАРЕ» с методом разрывных конечных элементов (Discontinuous Galerkin) [48, 49].

Процедура нахождения численного потока по значениям функции на двух сторонах разрыва также весьма близка к используемым в цитированных выше работах, что и приводит к относительно небольшому отличию численных потоков от потока С.К. Годунова. Принцип минимума локальной вариации переключается с TVD-свойством схем высокой разрешающей способности. Однако, есть и принципиальное различие.

Во всех ранее известных методах подсточная реконструкция проводится только по консервативным переменным (других просто нет) и только в пределах одного временного слоя. Таким образом, численные потоки можно считать функцией только консервативных переменных. В схеме «КАБАРЕ», в определении численных потоков, а стало быть, и потоковых переменных на новом временном слое участвуют не только консервативные, но также и потоковые переменные с текущего временного слоя. Другими словами, потоковые переменные здесь не так жестко связаны с консервативными переменными, как в ставших уже классическими алгоритмах – они как бы начинают жить самостоятельной жизнью. В дальнейшем это их свойство окажется существенным при численном моделировании затухания однородной изотропной турбулентности.

Подсточная локализация разрывов

Расширенный набор переменных («консервативные» и «потоковые») в схеме «КАБАРЕ» предполагает их специализацию. Так консервативные переменные «отвечают» за законы сохранения, и их можно трактовать как средние по ячейке. Потоковые переменные задают величины потоков и имеют смысл поточечных проекций решения дифференциальной задачи в узлы расчетной сетки. Это позволяет однозначно определять «подсточную» координату сильного разрыва внутри расчетной ячейки при условии, что разрыв существует.

Действительно, если $u_{i+1}^n \geq u_i^n$, то можно записать соотношение баланса:

$$(u_{i+1}^n - u_i^n) \cdot (x_{i+1} - x_d) = [U_{i+1/2}^n - u_i^n] \cdot (x_{i+1} - x_i), \quad (1.102)$$

где x_d – координата разрыва. При $u_{i+1}^n < u_i^n$ аналогичное соотношение будет иметь вид:

$$(u_i^n - u_{i+1}^n) \cdot (x_d - x_i) = [U_{i+1/2}^n - u_{i+1}^n] \cdot (x_{i+1} - x_i). \quad (1.103)$$

Из (1.102) и (1.103) однозначно вычисляется x_d .

Важным свойством схемы «КАБАРЕ» является демонстрируемое графиками отсутствие размазывания слабых разрывов. Можно показать, что при решении задачи Хопфа с начальными данными в виде прямоугольника, численное решение будет совпадать с точным.

1.3. Метод «КАБАРЕ» для простейшей системы квазилинейных гиперболических уравнений

Следующий уровень обобщения схемы «КАБАРЕ» связан с переходом к системам гиперболических уравнений. Большая часть таких систем описывает законы сохранения и поэтому записывается в дивергентном виде. Любой консервативный вычислительный алгоритм также должен описывать эти законы сохранения на дискретном уровне. С другой стороны, любую гиперболическую систему уравнений можно представить в характеристической форме. В дискретном случае дивергентная и характеристическая форма представления разностных уравнений не могут быть получены друг из друга и не являются, таким образом, эквивалентными. Вычислителям приходится делать выбор. Обычно предпочтение отдается дивергентной форме записи алгоритмов, обеспечивающей выполнение соотношений Гюгонио на сильных разрывах. С другой стороны, методы, основанные на использовании характеристик [4,5], приводят к существенно более точным результатам в областях гладкости, по крайней мере, для одномерных задач. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на случай систем гиперболических уравнений приводит к естественному объединению этих двух подходов с сохранением положительных сторон каждого из них.

1.3.1. Простейшая система нелинейных гиперболических уравнений (Р-система)

Наиболее простая система квазилинейных уравнений, проявляющая свойства, присущие уравнениям газовой динамики, имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} &= 0; \\ P &= P(\eta) = a \cdot \eta^{-\gamma}; \quad \gamma > 1; a > 0; \eta > 0.\end{aligned}\tag{1.104}$$

Переменным, входящим в эту систему, припишем следующий физический смысл: η – удельный объем, u – скорость, m – массовая переменная, P – давление, t – время.

Система описывает политропные течения газа в лагранжевых переменных. В частном случае $\gamma = 2$ она отвечает приближению «мелкой воды». Следует отметить, что система записана в т. н. «дивергентном» виде, т. е. в виде законов сохранения удельного объема и импульса.

Будем рассматривать эти уравнения как самостоятельный математический объект, описывающий, наряду с реальными, гипотетические течения, не во всем отвечающие течениям реальных сред.

1.3.2. Характеристическая форма представления R-системы. Волны разрежения

Применяя к (1.104) стандартную процедуру приведения систем гиперболических уравнений к характеристическому виду, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} + c_m \cdot \frac{\partial r}{\partial m} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} - c_m \cdot \frac{\partial q}{\partial m} &= 0,\end{aligned}\tag{1.105}$$

где

$$\begin{aligned}r &= u + F(\eta), \quad q = u - F(\eta), \\ c_m &= \sqrt{-(\partial P / \partial \eta)} = \sqrt{a \cdot \gamma} \cdot \eta^{-(\gamma+1)/2}, \\ F(\eta) &= -\int c_m(\eta) \cdot d\eta = \frac{2 \cdot \sqrt{a \cdot \gamma}}{\gamma - 1} \cdot \eta^{-(\gamma-1)/2}.\end{aligned}\tag{1.106}$$

Величины r, q представляют собой инварианты Римана, c_m – массовая скорость звука.

Характеристическая форма уравнений уже не является дивергентной и не описывает каких-либо законов сохранения.

Возникает естественный вопрос: какое из представлений простейшей квазилинейной гиперболической системы положить в основу построения разностной схемы? Вначале проанализируем качество разностной схемы, базирующейся на характеристическом виде уравнений, на некоторых частных решениях. Частным решением системы при некоторых разрывных кусочно-постоянных начальных данных $(u_L, \eta_L, u_R, \eta_R)$ является волна разрежения. Левая волна разрежения возникает при условии $(\eta_L < \eta_R)$ и соответствует постоянному значению правого инварианта Римана ($r = r_L = r_R = \text{const}$). Для существования левой волны разрежения необходимо, чтобы начальные данные удовлетворяли соотношению:

$$u_L + F(\eta_L) = u_R + F(\eta_R).\tag{1.107}$$

Постоянству левого инварианта Римана ($q = q_L = q_R = \text{const}$) отвечает правая волна разрежения, существующая при условиях

$$u_L - F(\eta_L) = u_R - F(\eta_R), \quad \eta_L > \eta_R.\tag{1.108}$$

Перепад скоростей Δu в волнах разрежения удовлетворяет условию:

$$\Delta u = u_R - u_L = |F(\eta_R) - F(\eta_L)| \geq 0.\tag{1.109}$$

Пусть начальное положение разрыва соответствует точке $m = 0$. Аналитическое решение задачи о распространении правой волны разрежения ($r = \text{const}$) имеет вид:

$$\eta(m, t) = \begin{cases} \eta_L, & m \leq -(c_m)_L \cdot t; \\ \left(\frac{1}{\sqrt{a \cdot \gamma}} \cdot \frac{m}{t} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}}, & -(c_m)_L \cdot t < m < -(c_m)_R \cdot t; \\ \eta_R, & m \geq -(c_m)_R \cdot t; \end{cases}$$

$$u(m, t) = \begin{cases} u_L, & m \leq -(c_m)_L \cdot t; \\ u^*(m, t), & -(c_m)_L \cdot t < m < -(c_m)_R \cdot t; \\ u_R, & m \geq -(c_m)_R \cdot t, \end{cases} \quad (1.110)$$

где

$$u^*(m, t) = u_L + F(\eta_L) - F(\eta(m, t)). \quad (1.111)$$

1.3.3. Схема «КАБАРЕ» для расчета волн разрежения Р-системы. Ориентация на характеристическую форму записи

Дискретизация области

Покроем область G равномерной расчетной сеткой с шагами $\tau = \text{const}_1$, $h = \text{const}_2$ по временной и массовой переменной соответственно. Пронумеруем узлы расчетной сетки индексом i в направлении возрастания переменной m ($i=1, \dots, N$) и индексом n – в направлении возрастания переменной t ($n=1, \dots, M$). Подлежащие вычислению дискретные «потокосые» величины η_i^n , u_i^n , r_i^n , q_i^n будем относить к узлам расчетной сетки, соответствующие им «консервативные» переменные $V_{i-1/2}^{n-1/2}$, $U_{i-1/2}^{n-1/2}$, $R_{i-1/2}^{n-1/2}$, $Q_{i-1/2}^{n-1/2}$ – к центрам расчетных ячеек.

Разностная схема

Аппроксимируем систему дифференциальных уравнений разностной схемой «КАБАРЕ» в ее двухслойном представлении с использованием консервативных переменных на половинных слоях по времени:

$$\frac{R_{i+1/2}^{n+1/2} - R_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + \lambda_{i+1/2}^{n-1/2} \cdot \frac{r_{i+1}^n - r_i^n}{h} = 0;$$

$$\frac{Q_{i+1/2}^{n+1/2} - Q_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} - \lambda_{i+1/2}^{n-1/2} \cdot \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} = 0;$$

$$(1.112)$$

$$r_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot R_{i+1/2}^{n+1/2} - r_i^n;$$

$$q_i^{n+1} = 2 \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} - q_{i+1}^n; \quad (1.113)$$

$$\lambda_{i+1/2}^{n-1/2} = c_m \left(V_{i+1/2}^{n-1/2} \right); \quad V_{i+1/2}^{n-1/2} = F^{-1} \left(\frac{R_{i+1/2}^{n-1/2} - Q_{i+1/2}^{n-1/2}}{2} \right);$$

$$\eta_i^n = F^{-1} \left(\frac{r_i^n - q_i^n}{2} \right); \quad F^{-1}(\xi) = \left(\frac{\gamma - 1}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \gamma}} \cdot \xi \right)^{-\left(\frac{2}{\gamma - 1} \right)}.$$
(1.114)

Уравнения (1.112) – (1.114) имеют второй порядок точности на гладких начальных данных и устойчивы при выполнении условия Куранта:

$$\frac{\max(\lambda_{i+1/2}^{n-1/2}) \cdot \tau}{h} \leq 1.$$
(1.115)

Начальные данные и стартовая процедура

В уравнения (1.112) – (1.114) входят величины с разнесенных временных слоев, отвечающие целым и дробным индексам. Поскольку основными мы будем считать консервативные величины, относящиеся к центрам расчетных ячеек, именно они и должны быть заданы в начальный момент времени. Будем считать, что начальному моменту времени соответствует индекс $n = 1/2$. Начальные данные, соответствующие задаче Римана, будут иметь вид:

$$R_{i+1/2}^{1/2} = \begin{cases} u_L + F(\eta_L) & i \leq k_{dis} \\ u_R + F(\eta_R) & i > k_{dis} \end{cases}; \quad Q_{i+1/2}^{1/2} = \begin{cases} u_L - F(\eta_L) & i \leq k_{dis} \\ u_R - F(\eta_R) & i > k_{dis} \end{cases}.$$
(1.116)

Здесь u_L, u_R, η_L, η_R – скорости и удельные объемы по левую и правую стороны разрыва соответственно, k_{dis} – местоположение разрыва в пространстве индексов.

Для нахождения потоковых переменных на первом временном слое предлагается использовать стартовую процедуру, соответствующую схеме Лакса:

$$\frac{r_i^1 - \bar{r}_i^{1/2}}{(\tau/2)} + \bar{\lambda}_i^{1/2} \cdot \frac{R_{i+1/2}^{1/2} - R_{i-1/2}^{1/2}}{h} = 0;$$

$$\frac{q_i^1 - \bar{q}_i^{1/2}}{(\tau/2)} - \bar{\lambda}_i^{1/2} \cdot \frac{Q_{i+1/2}^{1/2} - Q_{i-1/2}^{1/2}}{h} = 0;$$

$$\bar{q}_i^{1/2} = \frac{Q_{i+1/2}^{1/2} + Q_{i-1/2}^{1/2}}{2}; \quad \bar{r}_i^{1/2} = \frac{R_{i+1/2}^{1/2} + R_{i-1/2}^{1/2}}{2};$$

$$\bar{\lambda}_i^{1/2} = \frac{1}{2} \left[(c_m)_{i+1/2}^{1/2} + (c_m)_{i-1/2}^{1/2} \right].$$
(1.117)

Граничные условия

Граничные условия должны соответствовать направлениям приходящих на границу характеристик. Для задачи Римана, на временах, когда возмущения еще не дошли до границ области, имеем:

$$r_i^n = u_L + F(\eta_L), \quad q_N^n = u_R - F(\eta_R).$$
(1.118)

Следует отметить, что применительно к системе (1.112)–(1.114) «консервативные» величины в действительности не консервативны, поскольку уравнения, описывающие динамику их изменения, не являются дивергентными.

Для демонстрации особенностей схемы приведем результаты численного решения задачи Римана с начальными данными $u_L = 1$, $u_R = 2,17$, $\eta_L = 1$, $\eta_R = 0,5$, соответствующими правой волне разрежения.

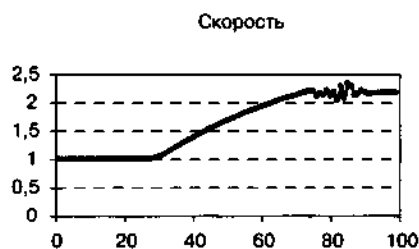


Рис. 1.33. График скорости в волне разрежения.
Расчет в массовых переменных при отсутствии
процедур монотонизации

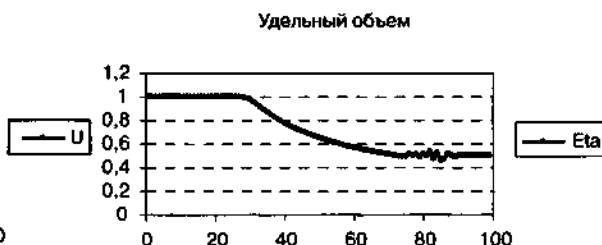


Рис. 1.34. График удельного объема в волне
разрежения в массовых переменных
при отсутствии процедур монотонизации

1.3.4. Схема «КАБАРЕ» с монотонизатором

При использовании экстраполянтов для вычисления новых значений лагранжевых инвариантов в узлах расчетной сетки в окрестности слабых разрывов у численного решения может теряться свойство монотонности. Для устранения этого негативного явления можно использовать линейную комбинацию выражений, обладающих вторым порядком аппроксимации, с выражениями первого порядка точности

$$r_{i+1}^{n+1} = R_{i+1/2}^{n+1/2} ; \quad q_i^{n+1} = Q_{i+1/2}^{n+1/2} , \quad (1.119)$$

гарантирующими свойство монотонности. В результате получаем:

$$\begin{aligned} r_{i+1}^{n+1} &= {}^+ \omega_{i+1/2}^n \cdot (2 \cdot R_{i+1/2}^{n+1/2} - r_i^n) + (1 - {}^+ \omega_{i+1/2}^n) \cdot R_{i+1/2}^{n+1/2} , \\ q_i^{n+1} &= {}^- \omega_{i+1/2}^n \cdot (2 \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} - q_{i+1}^n) + (1 - {}^- \omega_{i+1/2}^n) \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} , \end{aligned} \quad (1.120)$$

где величины ${}^\pm \omega_{i+1/2}^n$ представляют собой неотрицательные весовые параметры, значения которых должны быть максимально близкими к единице. Последнее требование отвечает условию минимальности аппроксимационной вязкости.

Для нахождения ${}^\pm \omega_{i+1/2}^n$, удовлетворяющих сформулированному условию и гарантирующих монотонность решения, можно использовать следующий алгоритм: если при ${}^\pm \omega_{i+1/2}^n = 1$ римановы инварианты, вычисляемые в соответствии с (1.113), удовлетворяют принципу максимума, то они и принимаются за окончательные значения.

Если же они выходят за допустимые принципом максимума пределы, их значения полагаются равными ближайшему из этих пределов. Это дает возможность однозначно определить величины $\pm \omega_{i+1/2}^n$.

Следует отметить, что при описанном подходе величины $\pm \omega_{i+1/2}^n$ самостоятельно не интереса не представляют, и весь алгоритм можно записать как

$$r_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} +r_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{r}_{i+1}^{n+1} > +r_{i+1/2}^n) \\ -r_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{r}_{i+1}^{n+1} < -r_{i+1/2}^n) \\ \tilde{r}_{i+1}^{n+1} & \text{if } (-r_{i+1/2}^n \leq \tilde{r}_{i+1}^{n+1} \leq +r_{i+1/2}^n) \end{cases}, \quad \begin{cases} +r_{i+1/2}^n = \max(r_{i+1}^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_i^n) \\ -r_{i+1/2}^n = \min(r_{i+1}^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_i^n) \\ \tilde{r}_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot R_{i+1/2}^{n+1/2} - r_i^n \end{cases} \quad (1.121)$$

$$q_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} +q_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{q}_{i+1}^{n+1} > +q_{i+1/2}^n) \\ -q_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{q}_{i+1}^{n+1} < -q_{i+1/2}^n) \\ \tilde{q}_{i+1}^{n+1} & \text{if } (-q_{i+1/2}^n \leq \tilde{q}_{i+1}^{n+1} \leq +q_{i+1/2}^n) \end{cases}, \quad \begin{cases} +q_{i+1/2}^n = \max(q_{i+1}^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_i^n) \\ -q_{i+1/2}^n = \min(q_{i+1}^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_i^n) \\ \tilde{q}_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} - q_i^n \end{cases} \quad (1.122)$$

На рис. 1.35 и 1.36 приведены результаты численного решения той же задачи Римана, что и в предыдущем случае ($u_L = 1$, $u_R = 2,17$, $\eta_L = 1$, $\eta_R = 0,5$), но с нелинейной коррекцией. Следует отметить отсутствие каких-либо осцилляций.

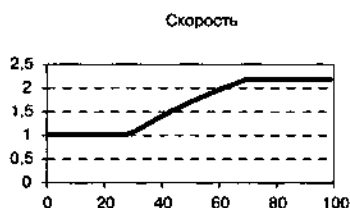


Рис. 1.35. График скорости в волне разрежения. Расчет в массовых переменных с коррекцией потоков на основе принципа максимума

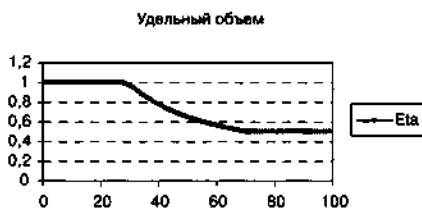


Рис. 1.36. График удельного объема в волне разрежения в массовых переменных с коррекцией потоков на основе принципа максимума

1.3.5. Консервативный вариант схемы «КАБАРЕ»

Характеристическая форма исходных уравнений и их разностный аналог не обладают свойством консервативности. Это обстоятельство практически незаметно при расчете волн разрежения, но оказывается чрезвычайно важным при расчетах ударных волн.

Заменим уравнения естественной консервативной аппроксимацией исходных дивергентных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{V_{i+1/2}^{n+1/2} - V_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} - \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} &= 0, \\ \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + \frac{P_{i+1}^n - P_i^n}{h} &= 0, \end{aligned} \quad (1.123)$$

а новые значения потоковых переменных, относящихся к узлам расчетных ячеек, будем вычислять по значениям римановых инвариантов в соответствии с алгоритмом:

$$u_i^{n+1} = 0,5 \cdot (r_i^{n+1} + q_i^{n+1}), \quad \eta_i^{n+1} = F^{-1} \left(\frac{r_i^{n+1} - q_i^{n+1}}{2} \right), \quad (1.124)$$

где

$$\begin{aligned} r_{i+1}^{n+1} &= 2 \cdot R_{i+1/2}^{n+1/2} - r_i^n; \quad q_i^{n+1} = 2 \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} - q_{i+1}^n; \\ R_{i+1/2}^{n+1/2} &= U_{i+1/2}^{n+1/2} + F(V_{i+1/2}^{n+1/2}); \quad Q_{i+1/2}^{n+1/2} = U_{i+1/2}^{n+1/2} - F(V_{i+1/2}^{n+1/2}); \\ r_i^n &= u_i^n + F(\eta_i^n); \quad q_i^n = u_i^n - F(\eta_i^n). \end{aligned} \quad (1.125)$$

Из (1.125) видно, что новые значения узловых инвариантов Римана вычисляются по тем же формулам, что и в неконсервативном случае. Вместо выражений для сохранения монотонности получаемого решения можно использовать несколько более сложный алгоритм (1.121), (1.122) коррекции потоков на основе принципа максимума.

1.3.6. Сравнение со схемой «крест»

Интересно сравнить результаты расчетов волн разрежения по консервативной схеме «КАБАРЕ» и схеме «крест»:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{P_{i+1/2}^n - P_{i-1/2}^n}{h} &= 0; \quad P_{i+1/2}^n = P(V_{i+1/2}^n); \\ \frac{V_{i+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2}^n}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} &= 0; \quad i = 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Начальные и граничные условия для уравнений имеют вид:

$$\begin{aligned} u_i^0 &= u_L; \quad V_{i+1/2}^0 = \eta_L; \quad i = 1, \dots, N_S - 1; \\ u_i^0 &= u_R; \quad V_{i+1/2}^0 = \eta_R; \quad i = N_S, \dots, N-1; \\ u_1^n &= u_L; \quad u_N^n = u_R. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Специального рассмотрения заслуживает задача о разлете в пустоту. Разлету вправо для схемы «крест» будут отвечать следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} u_i^0 &= 0; \quad V_{i+1/2}^0 = \eta_L; \quad i = 1, \dots, N-1; \\ u_N^0 &= u_R; \quad u_R = F(\eta_L); \\ u_1^n &= 0; \quad u_N^{n+1} = u_N^n + \frac{\alpha \cdot \tau}{h} \cdot P(V_{N-1/2}^n), \end{aligned} \quad (1.128)$$

где параметр α может принимать значения от единицы до двойки.

На рис. 1.37–1.38 представлены графики скорости и плотности $\rho = 1/\eta$ при решении задачи о разлете в пустоту при $\eta_L = 0$ по схеме «КАБАРЕ». Видно, что скорость в правой граничной точке в точности равна аналитическому значению скорости разлета в пустоту. Это одна из интересных особенностей данной схемы. На рис. 1.39–1.40 приведены графики модуля отклонения численного решения от аналитического. Обращают на себя внимание два пика, находящиеся в окрестностях слабых разрывов.

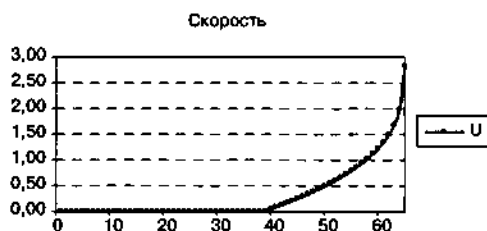


Рис. 1.37. График скорости в волне разрежения. Расчет по схеме «КАБАРЕ» в массовых переменных с коррекцией потоков. Аппроксимируется консервативная форма уравнений



Рис. 1.38. График удельного объема в волне разрежения. Расчет по схеме «КАБАРЕ» в массовых переменных с коррекцией потоков. Аппроксимируется консервативная форма уравнений



Рис. 1.39. График модуля ошибки в скорости волны разрежения. Расчет по схеме «КАБАРЕ» в массовых переменных с коррекцией потоков. Аппроксимируется консервативная форма уравнений

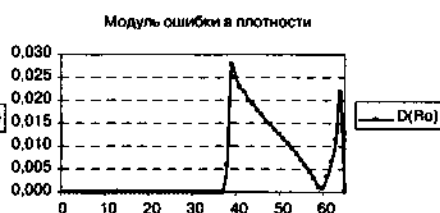


Рис. 1.40. График модуля ошибки в плотности при расчете волны разрежения. Расчет по схеме «КАБАРЕ» в массовых переменных с коррекцией потоков. Аппроксимируется консервативная форма уравнений

На рис. 1.41–1.42 изображены графики скорости и плотности, сосчитанные на тот же момент времени по схеме «крест». Скорость правой граничной точки заметно меньше скорости разлета в пустоту. В приведенном расчете параметр α был выбран равным двойке. При $\alpha = 1$ имеющееся отличие было бы менее ярко выражено. Рисунки 1.43–1.44 представляют величину модуля отклонения численного решения от аналитического. Следует отметить наличие почти одинаковых всплесков в окрестности локализации левого слабого разрыва.



Рис. 1.41. График скорости в волне разрежения. Расчет по схеме «крест» в массовых переменных с коррекцией потоков. Аппроксимируется консервативная форма уравнений

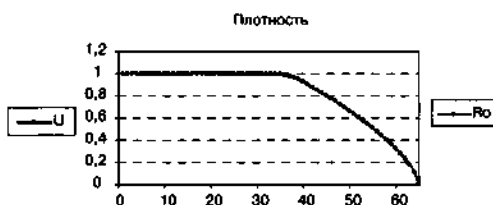


Рис. 1.42. График удельного объема в волне разрежения. Расчет по схеме «крест» в массовых переменных с коррекцией потоков. Аппроксимируется консервативная форма уравнений



Рис. 1.43. График модуля ошибки в скорости волны разрежения. Расчет по схеме «крест» в массовых переменных с коррекцией потоков. Аппроксимируется консервативная форма уравнений



Рис. 1.44. График модуля ошибки в плотности при расчете волны разрежения. Расчет по схеме «крест» в массовых переменных с коррекцией потоков. Аппроксимируется консервативная форма уравнений

1.3.7. Законы сохранения и разрывные решения R-системы

Под разрывными решениями системы понимают т. н. «слабые решения», отвечающие интегральным соотношениям

$$\begin{aligned} \iint_G \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} \right) \cdot dm \cdot dt &= \oint_{\partial G} \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot dm + \oint_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial m} \cdot dt = 0; \\ \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} \right) \cdot dm \cdot dt &= \oint_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dm - \oint_{\partial G} \frac{\partial P}{\partial m} \cdot dt = 0. \end{aligned} \quad (1.129)$$

В окрестности сильного разрыва эта система сводится к соотношениям Гюгонно:

$$\Delta \eta \cdot \delta m + \Delta u \cdot \delta t = 0; \quad (1.130)$$

где

$$\Delta u \cdot \delta m - \Delta P \cdot \delta t = 0,$$

$$\Delta \eta = \eta_R - \eta_L; \quad \Delta u = u_R - u_L; \quad D = \delta m / \delta t. \quad (1.131)$$

Из (1.130) непосредственно следует, что скорость распространения сильного разрыва D должна удовлетворять условиям:

$$D = -\frac{\Delta u}{\Delta \eta}; \quad D = \frac{\Delta P}{\Delta u}. \quad (1.132)$$

Исключая из (1.132) скорости, находим:

$$D = -\text{sign}(\Delta P) \sqrt{-\frac{\Delta P}{\Delta \eta}}. \quad (1.133)$$

Задача Римана для Р-системы. Распад произвольного разрыва

Кратко остановимся на известных соотношениях, характеризующих задачу о распаде разрыва при произвольных кусочно-постоянных начальных данных u_L, η_L, u_R, η_R (т. н. задачу Римана) для системы уравнений (1.104).

Если образуется одна ударная волна, то скорость ее определяется только перепадом удельных объемов $\Delta \eta$ (1.133). С другой стороны, перепад скоростей на ударной волне должен удовлетворять соотношению

$$\Delta u = \frac{\Delta P}{D} = -\left| \frac{\Delta P}{D} \right|. \quad (1.134)$$

Из последнего соотношения, в частности, следует, что дивергенция скорости в окрестности ударной волны всегда отрицательна. Если равенство (1.134) не выполняется, то в случае, когда

$$\Delta u < -\left| \frac{\Delta P}{D} \right|, \quad (1.135)$$

решение будет представлять собой две ударные волны, расходящиеся в разные стороны. Значения величин (u^*, η^*) за фронтами этих волн находятся из соотношений:

$$\begin{aligned} (\Delta u)_L &= -D_L \cdot (\Delta \eta)_L; & (\Delta u)_R &= -D_R \cdot (\Delta \eta)_R; \\ D_L &= \text{sign}(\Delta \eta)_L \sqrt{-\frac{(\Delta P)_L}{(\Delta \eta)_L}}; & D_R &= \text{sign}(\Delta \eta)_R \sqrt{-\frac{(\Delta P)_R}{(\Delta \eta)_R}}, \end{aligned} \quad (1.136)$$

где

$$\begin{aligned} (\Delta u)_L &= u^* - u_L; & (\Delta \eta)_L &= \eta^* - \eta_L; \\ (\Delta u)_R &= u_R - u^*; & (\Delta \eta)_R &= \eta_R - \eta^*. \end{aligned} \quad (1.137)$$

Исключая из системы величину u^* , приходим к одному нелинейному уравнению относительно величины η^* :

$$\sqrt{-(P^* - P_L) \cdot (\eta^* - \eta_L)} + \sqrt{-(P_R - P^*) \cdot (\eta_R - \eta^*)} = -(u_R - u_L). \quad (1.138)$$

При противоположном неравенстве:

$$\Delta u > - \left| \frac{\Delta P}{D} \right| \quad (1.139)$$

возникает волна разрежения, примыкающая к ударной волне. Величины (u^*, η^*) , характеризующие этот комплекс, удовлетворяют системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\Delta u)_L &= -(\Delta F)_L \\ (\Delta u)_R &= -D_R \cdot (\Delta \eta)_R \end{aligned} \right\} \text{if } (P_L > P_R),$$

$$\left. \begin{aligned} (\Delta u)_R &= (\Delta F)_R \\ (\Delta u)_L &= -D_L \cdot (\Delta \eta)_L \end{aligned} \right\} \text{if } (P_L < P_R). \quad (1.140)$$

Исключая величину u^* , приходим к одному нелинейному уравнению относительно неизвестной η^* :

$$F(\eta^*) + (\eta^* - \eta^{\min}) \sqrt{-\frac{P^* - P^{\min}}{\eta^* - \eta^{\min}}} = -(u_R - u_L) + F^{\min}, \quad (1.141)$$

где $f^{\min} = \min(f_R, f_L)$.

По мере возрастания величины Δu интенсивность ударной волны уменьшается до тех пор, пока течение не выродится в чистую волну разрежения. Это происходит при условии

$$\Delta u = |\Delta F|. \quad (1.142)$$

При дальнейшем увеличении Δu решение задачи Римана будет представлять собой две волны разрежения, соединяемые зоной постоянного течения. Параметры этого течения (u^*, η^*) удовлетворяют системе уравнений:

$$r_L = u^* + F(\eta^*); \quad q_R = u^* - F(\eta^*), \quad (1.143)$$

решение которой находится аналитически и имеет вид

$$u^* = 0,5 \cdot (r_L + q_R); \quad \eta^* = F^{-1} [0,5 \cdot (r_L - q_R)]. \quad (1.144)$$

Решение существует пока удельный объем η^* остается конечной величиной. При

$$r_L - q_R \leq 0 \quad (1.145)$$

среда теряет непрерывность, и образуется вакуумная зона, разделяющая две волны разрежения. Области вакуума отвечает величина $\eta^* = \infty$, а волны разрежения характеризуются скоростями:

$$-(c_m)_L < (u_v)_L < (u_v)_R < (c_m)_R,$$

где

$$(u_v)_L = r_L; \quad (u_v)_R = q_R.$$

Таким образом, характер течения при распаде разрыва с заданным перепадом удельных объемов $\Delta\eta$ полностью определяется перепадом скоростей Δu и зависит от того, в какой из интервалов

$$(\Delta u)_{ss} < -\left|\frac{\Delta P}{D}\right| < (\Delta u)_{rs} < |\Delta F| < (\Delta u)_{rr} < |F_R + F_L| < (\Delta u)_{rrr} \quad (1.146)$$

этот перепад попадает. Окончательный результат определяется таблицей:

$$\begin{aligned} \Delta u \in (\Delta u)_{ss} & - \text{две ударные волны;} \\ \Delta u \in (\Delta u)_{rs} & - \text{комплекс из ударной волны и волны разрежения;} \\ \Delta u \in (\Delta u)_{rr} & - \text{две волны разрежения;} \\ \Delta u \in (\Delta u)_{rrr} & - \text{две волны разрежения и вакуум.} \end{aligned} \quad (1.147)$$

1.3.8. Тестовые задачи и эмпирическое исследование скорости сходимости

Задача об ускоряющемся поршне

Пусть в начальный момент времени все покоится, и левая граница области начинает двигаться со скоростью

$$u_L(t) = \sigma \cdot t. \quad (1.148)$$

От этой границы внутрь области побежит простая центрированная волна сжатия. Непрерывное решение будет существовать до момента времени

$$t_{dis} = \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{\eta_0 \cdot c_0}{\sigma}, \quad (1.149)$$

после чего на расстоянии

$$m_{dis} = \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{\eta_0 \cdot c_0^2}{\sigma} \quad (1.150)$$

образуется сильный разрыв.

Особенностью данной задачи в вычислительном плане является то, что все ячейки в зоне волны сжатия, в соответствии с принятой нами идеологией, содержат ударные волны относительно малой интенсивности. Это хорошо видно на рис. 1.45–1.48, представляющих графики консервативных и потоковых значений скорости и удельного объема на момент времени t_{dis} ($n=105$). Данному расчету соответствуют параметры: ($\eta_0 = 1$, $c_0 = \sqrt{2}$, $\sigma = 2$, $CFL = 0.4$). На графиках потоковых переменных (рис. 1.46, 1.48) особенно хорошо видна ступенчатая структура волны сжатия.

Скорость (консервативная переменная)
на момент образования разрыва

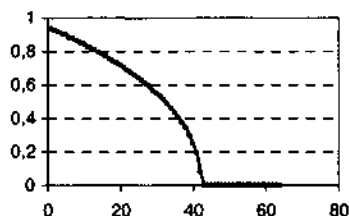


Рис. 1.45. График консервативной переменной скорости в простой волне сжатия на момент образования разрыва

Скорость (потоковая переменная)
на момент образования разрыва

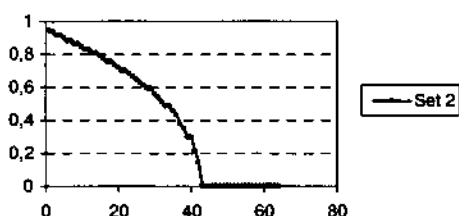


Рис. 1.46. График потоковой переменной скорости в простой волне сжатия на момент образования разрыва

Удельный объем
(консервативная переменная)

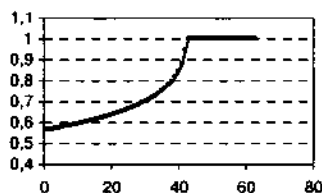


Рис. 1.47. График консервативной переменной удельного объема в простой волне сжатия на момент образования разрыва

Удельный объем
(потоковая переменная)

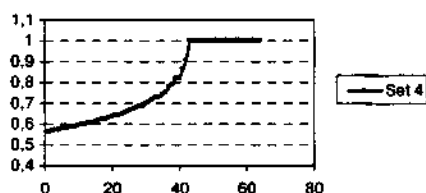


Рис. 1.48. График потоковой переменной удельного объема в простой волне сжатия на момент образования разрыва

На рисунках 1.49–1.50 приведены профили скорости на более поздний момент времени ($n=150$).

Скорости (консервативные переменные)

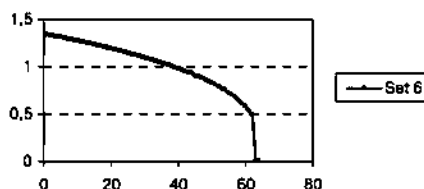


Рис. 1.49. График консервативной переменной скорости в простой волне сжатия после образования разрыва

Скорости (потокосые переменные)

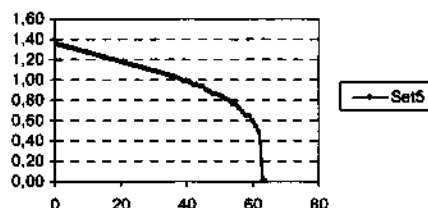


Рис. 1.50. График потокоской переменной скорости в простой волне сжатия после образования разрыва

Две волны разрежения

Эмпирическое исследование сходимости алгоритма проведем на автомоделных задачах о двух волнах разрежения и комплексе из ударной волны и волны разрежения. Рассмотрим первую из этих задач, отвечающую параметрам: $u_R = 0$, $u_L = -0.5$, $\eta_R = 1$, $\eta_L = 1$, $N = 257$, которым соответствуют автомоделные профили скорости и удельного объема, приведенные на рисунках 1.51–1.52.

Скорость

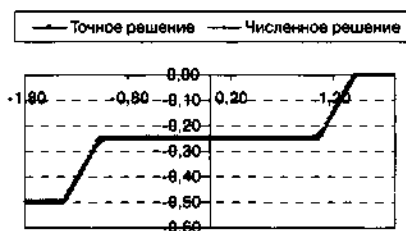


Рис. 1.51. График консервативной переменной скорости в разбегающихся волнах разрежения

Удельный объем

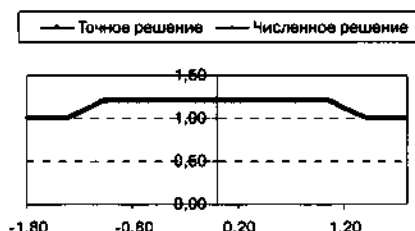


Рис. 1.52. График консервативной переменной удельного объема в разбегающихся волнах разрежения

Расчеты проводились на сгущающихся сетках при одинаковых числах Куранта, и исследовалась сходимость численного решения к аналитическому. На рисунках 1.53–1.54 приведены графики модулей отклонения численных решений от аналитических (по скорости и удельному объему) при числе расчетных точек $N = 257$. Аналогичные графики при $N = 1025$ приведены на рисунках 1.55–1.56. Видно, что максимальная невязка соответствует окрестностям локализации слабых разрезов.



Рис. 1.53. График модуля отклонения консервативной скорости от аналитического решения при числе расчетных ячеек $N = 256$



Рис. 1.54. График модуля отклонения консервативной переменной удельного объема от аналитического решения при числе расчетных ячеек $N = 256$

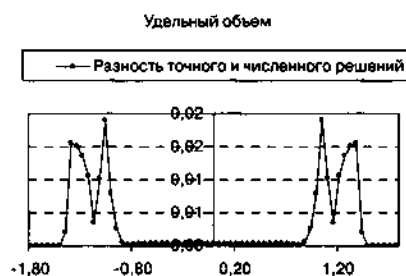


Рис. 1.55. График модуля отклонения консервативной скорости от аналитического решения при числе расчетных ячеек $N = 1024$

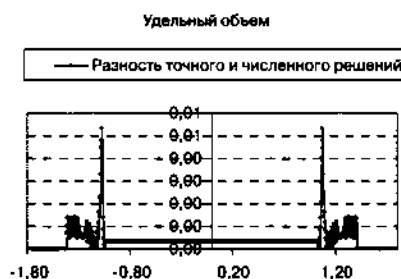


Рис. 1.56. График модуля отклонения консервативной переменной удельного объема от аналитического решения при числе расчетных ячеек $N = 1024$

Результаты наблюдений за сходимостью невязки в разных нормах сведены в таблицу 1.1:

Таблица 1.1. Сходимость невязки в разных нормах

Кол-во точек	Норма C для скорости	Норма C для удельного объема	Норма L2 для скорости	Норма L2 для удельного объема
33	0,0355	0,0274	0,0132	0,01060
65	0,0209	0,0190	0,0078	0,00642
129	0,0151	0,0137	0,0044	0,00360
257	0,0131	0,0119	0,0025	0,00205
513	0,0085	0,0076	0,00132	0,00113
1025	0,0061	0,0053	0,00072	0,00065

$\ln(N)$	$\ln(C(U))$	$\ln(L2(U))$	$\ln(C(h))$	$\ln(L2(h))$
1,82	- 1,66	- 4,33	- 1,92	- 4,55
4,17	- 3,89	- 4,86	- 3,96	- 5,05
4,86	- 4,19	- 5,43	- 4,29	- 5,63
5,55	- 4,34	- 6,01	- 4,43	- 6,19
6,24	- 4,77	- 6,63	- 4,88	- 6,78
6,93	- 5,11	- 7,23	- 5,24	- 7,34

Ударная волна и волна разрежения

Исследование сходимости при наличии ударной волны и волны разрежения проводилось на задаче Римана, отвечающей параметрам: $u_R = 0$, $u_L = 0$, $\eta_R = 4$, $\eta_L = 1$, $N = 257$. Соответствующие автомодельные профили скорости и удельного объема представлены на рисунках 1.57–1.58.



Рис. 1.57. График консервативной скорости в автомодельной задаче об ударной волне и волне разрежения. $N = 256$

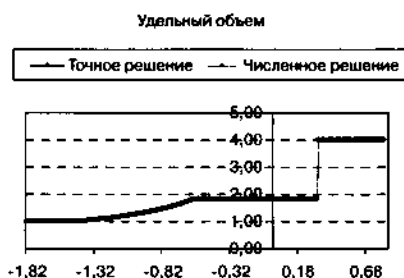


Рис. 1.58. График удельного объема в автомодельной задаче об ударной волне и волне разрежения. $N = 256$

На рисунках 1.59–1.60 представлены графики модуля невязки при $N = 257$.



Рис. 1.59. График модуля отклонения консервативной скорости от аналитического решения при числе расчетных ячеек $N = 256$



Рис. 1.60. График модуля отклонения консервативной переменной удельного объема от аналитического решения при числе расчетных ячеек $N = 256$

Аналогичные графики при $N=1025$ приведены на рис. 1.61–1.62. Как и во всех предыдущих случаях, максимум невязки соответствует слабым разрывам.

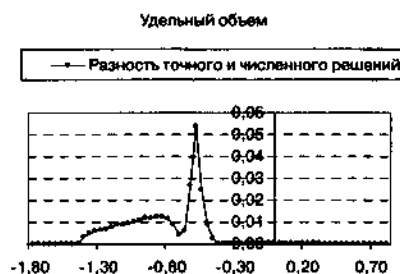


Рис. 1.61. График модуля отклонения консервативной скорости от аналитического решения при числе расчетных ячеек $N = 1024$

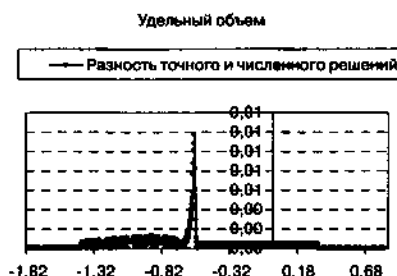


Рис. 1.62. График модуля отклонения консервативной переменной удельного объема от аналитического решения при числе расчетных ячеек $N = 1024$

Представление о поведении невязки в разных нормах дает таблица 1.2.

Таблица 1.2. Поведение невязки в разных нормах

Кол-во точек	Норма C для скорости	Норма C для удельного объема	Норма L2 для скорости	Норма L2 для удельного объема
33	0,0461	0,0765	0,0129	0,0174
65	0,0322	0,0539	0,0069	0,0096
129	0,0215	0,0360	0,0037	0,0053
257	0,0142	0,2390	0,0020	0,1726
513	0,0109	0,0826	0,0011	0,0017
1025	0,0071	0,0118	0,00061	0,00097

$\ln(N)$	$\ln(C(U))$	$\ln(L2(U))$	$\ln(C(h))$	$\ln(L2(h))$
1,817	-3,08	-4,35	-2,57	-4,05
4,174	-1,76	-4,98	-2,92	-4,65
4,860	-3,84	-5,59	-1,64	-5,24
5,549	-4,26	-6,20	-3,73	-5,80
6,240	-4,51	-6,79	-4,00	-6,36
6,932	-4,95	-7,41	-4,44	-6,93

1.3.9. Схема «КАБАРЕ» для одномерных уравнений политропного газа в эйлеровых переменных

Уравнения движения политропного газа в эйлеровых переменных

Уравнения движения политропного газа в эйлеровых переменных представляют собой законы сохранения массы и импульса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0; \quad (1.151)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) = 0;$$

$$P = P(\rho) = a \cdot \rho^\gamma; \quad \gamma > 1; \quad a > 0; \quad \rho > 0.$$

Применяя к (1.151) стандартную процедуру приведения систем гиперболических уравнений к характеристическому виду, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} + (u + c) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial q}{\partial t} + (u - c) \cdot \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1.152)$$

где

$$r = u + F(\rho); \quad q = u - F(\rho); \quad (1.153)$$

$$c = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)} = \sqrt{a \cdot \gamma} \cdot \rho^{(\gamma-1)/2};$$

$$F(\rho) = \int \frac{c(\rho)}{\rho} \cdot d\rho = \frac{2 \cdot \sqrt{a \cdot \gamma}}{\gamma - 1} \cdot \rho^{(\gamma-1)/2}.$$

Частным решением системы при некоторых разрывных кусочно-постоянных начальных данных $(u_L, \rho_L, u_R, \rho_R)$ является волна разрежения. Левая волна разрежения возникает при условии $(\rho_L > \rho_R)$ и соответствует постоянному значению правого инварианта Римана $(r = r_L = r_R = \text{const})$. Для существования левой волны разрежения необходимо, чтобы начальные данные удовлетворяли соотношению:

$$u_L + F(\rho_L) = u_R + F(\rho_R). \quad (1.154)$$

Постоянству левого инварианта Римана $(q = q_L = q_R = \text{const})$ отвечает правая волна разрежения, существующая при условиях

$$u_L - F(\rho_L) = u_R - F(\rho_R); \quad \rho_L < \rho_R. \quad (1.155)$$

Перепад скоростей Δu в волнах разрежения удовлетворяет условию:

$$\Delta u = u_R - u_L = |F(\rho_R) - F(\rho_L)| \geq 0. \quad (1.156)$$

Пусть начальное положение разрыва соответствует точке $x=0$. Аналитическое решение задачи о распространении правой волны разрежения ($r = \text{const}$) имеет вид:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L; & x \leq (u_L - c_L) \cdot t; \\ \left[\left(\frac{\gamma-1}{3-\gamma} \right) \frac{1}{\sqrt{a \cdot \gamma}} \cdot \left(\frac{x}{t} - r_L \right) \right]^{\frac{2}{\gamma+1}}; & (u_L - c_L) \cdot t < x < (u_R - c_R) \cdot t; \\ \rho_R; & x \geq (u_R - c_R) \cdot t; \end{cases}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L; & x \leq (u_L - c_L) \cdot t; \\ u^*(x, t); & (u_L - c_L) \cdot t < x < (u_R - c_R) \cdot t; \\ u_R; & x \geq (u_R - c_R) \cdot t, \end{cases} \quad (1.157)$$

где

$$u^*(x, t) = u_L + F(\rho_L) - F(\rho(x, t)). \quad (1.158)$$

Представление (1.157) нам в дальнейшем потребуется при анализе точности и скорости сходимости вычислительных алгоритмов.

Расчет волн разрежения в эйлеровых переменных

При использовании схемы «КАБАРЕ» для расчета уравнений политропного газа в консервативно-характеристической форме в случае эйлеровых переменных возникает ряд специфических особенностей.

Первая фаза алгоритма, связанная с вычислением консервативных переменных, относящихся к центрам расчетных ячеек, представляет собой разностный аналог дивергентной формы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + \frac{j_{i+1}^n - j_i^n}{h} = 0;$$

$$\frac{J_{i+1/2}^{n+1/2} - J_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + \frac{g_{i+1}^n - g_i^n}{h} = 0, \quad (1.159)$$

где

$\Theta_{i+1/2}^{n+1/2}$ — консервативное значение плотности;

$J_{i+1/2}^{n+1/2}$ — консервативное значение скорости;

$J_{i+1/2}^{n+1/2} = \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2}$ — консервативное значение импульса

и

$$j_i^n = \rho_i^n \cdot u_i^n; \quad g_i^n = j_i^n \cdot u_i^n + P(\rho_i^n).$$

На второй фазе, в рамках принятой идеологии, при вычислении новых значений узловых переменных, следует использовать значения Римановых инвариантов, экстраполируемых в каждый узел расчетной сетки в соответствии с наклоном характеристик. В лагранжевых переменных характеристики всегда приходят в каждый узел с разных сторон, от каждой из прилегающих ячеек. В эйлеровых переменных, если скорость среды в каком-либо узле превышает локальную скорость звука, обе характеристики могут приходить со стороны одной «надветренной» ячейки. С учетом этого обстоятельства алгоритм вычисления новых значений потоковых переменных приобретает вид:

$$\begin{cases} r_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot R_{i+1/2}^{n+1/2} - r_i^n & \text{if } (^+\lambda_{i+1}^n \geq 0) \\ r_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot R_{i+3/2}^{n+1/2} - r_{i+2}^n & \text{if } (^+\lambda_{i+1}^n < 0) \\ q_i^{n+1} = 2 \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} - q_{i+1}^n & \text{if } (-\lambda_i^n \leq 0) \\ q_i^{n+1} = 2 \cdot Q_{i-1/2}^{n+1/2} - q_{i-1}^n & \text{if } (-\lambda_i^n > 0) \end{cases};$$

$$u_i^n = \frac{q_i^n + r_i^n}{2}; \quad \rho_i^n = F^{-1} \left(\frac{r_i^n - q_i^n}{2} \right). \quad (1.160)$$

Здесь

$$\begin{aligned} ^+\lambda_i^n &= u_i^n + c(\rho_i^n); \quad ^-\lambda_i^n = u_i^n - c(\rho_i^n); \quad F^{-1}(\xi) = \left(\frac{\gamma-1}{2 \cdot \sqrt{a \cdot \gamma}} \cdot \xi \right)^{\left(\frac{2}{\gamma-1} \right)}; \\ R_{i+1/2}^{n+1/2} &= U_{i+1/2}^{n+1/2} + F(\Theta_{i+1/2}^{n+1/2}); \quad Q_{i+1/2}^{n+1/2} = U_{i+1/2}^{n+1/2} - F(\Theta_{i+1/2}^{n+1/2}). \end{aligned} \quad (1.161)$$

Особого рассмотрения требуют т. н. «звуковые» ячейки, в пределах которых течение переходит из дозвукового в сверхзвуковое. Такие ячейки являются донорными для трех характеристик (рис. 1.63–1.64)

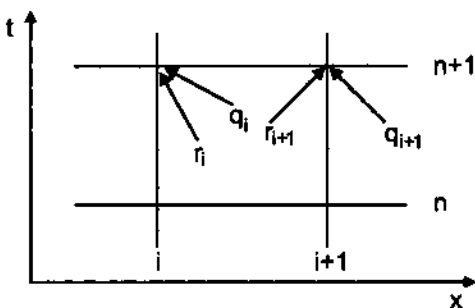


Рис. 1.63. Качественный вид характеристик в «звуковой» ячейке при ускорении потока влево

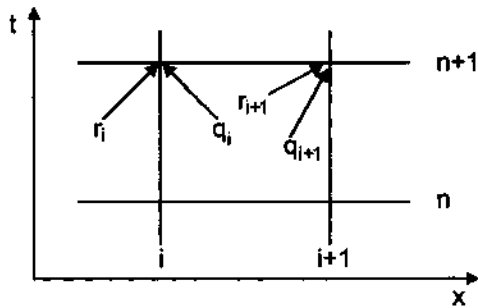


Рис. 1.64. Качественный вид характеристик в «звуковой» ячейке при ускорении потока вправо

В граничных узлах трансзвуковых ячеек алгоритм нуждается в модификации. Тут возможны различные варианты. К хорошим результатам приводит, например, следующий расклад.

Если из трех характеристик две отвечают за перенос Риманова инварианта q , то значения этого инварианта по разные стороны от ячейки вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} q_{i+1}^{n+1} &= \left(1 - \left|(CFL)_{i+1}^L\right|\right) \cdot q_{i+1}^n + \left|(CFL)_{i+1}^L\right| \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ q_i^{n+1} &= \left(1 - \left|(CFL)_i^L\right|\right) \cdot q_i^n + \left|(CFL)_i^L\right| \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ \left|(CFL)_i^L\right| &= \left|\frac{\tau}{h} \cdot (u_i^n - c_i^n)\right|, \end{aligned} \quad (1.162)$$

что соответствует сносу по характеристикам из точек G и H (рис. 1.65–1.66).

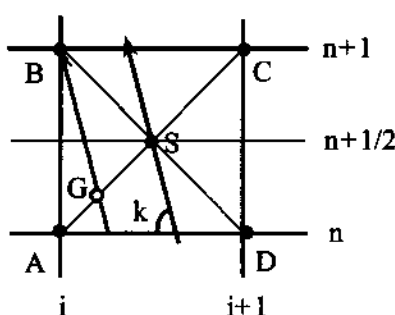


Рис. 1.65. Иллюстрация алгоритма переноса q -характеристики в левый верхний узел трансзвуковой ячейки при ускорении потока влево

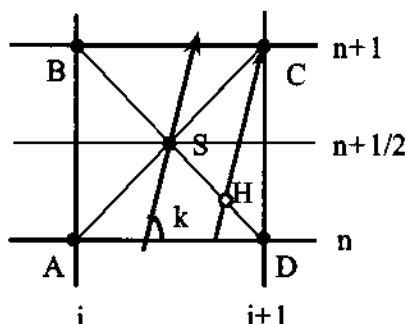


Рис. 1.66. Иллюстрация алгоритма переноса q -характеристики в правый верхний узел трансзвуковой ячейки при ускорении потока влево

Значение инварианта r , вычисленное в соответствии с (1.162), при этом не меняется.

В свою очередь, если две характеристики переносят инвариант r , то ранее вычисленные значения этого инварианта в прилегающих к ячейке узлах заменяются на:

$$\begin{aligned} r_{i+1}^{n+1} &= \left(1 - \left|(CFL)_{i+1}^R\right|\right) \cdot r_{i+1}^n + \left|(CFL)_{i+1}^R\right| \cdot R_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ r_i^{n+1} &= \left(1 - \left|(CFL)_i^R\right|\right) \cdot r_i^n + \left|(CFL)_i^R\right| \cdot R_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ \left|(CFL)_i^R\right| &= \left|\frac{\tau}{h} \cdot (u_i^n + c_i^n)\right|, \end{aligned} \quad (1.163)$$

а инвариант q не модифицируется.

Стартовая процедура, определяющая значения потоковых переменных на нулевом зременном слое, также соответствует сносу по характеристикам:

$$\begin{aligned}
 r_i^0 &= \begin{cases} R_{i-1/2}^{-1/2} & \text{if } \left\{ \left[U_{i-1/2}^{-1/2} + c \left(\Theta_{i-1/2}^{-1/2} \right) \right] > 0 \right\}, \\ R_{i+1/2}^{-1/2} & \text{if } \left\{ \left[U_{i+1/2}^{-1/2} + c \left(\Theta_{i+1/2}^{-1/2} \right) \right] < 0 \right\}, \end{cases} \\
 q_i^0 &= \begin{cases} Q_{i-1/2}^{-1/2} & \text{if } \left\{ \left[U_{i-1/2}^{-1/2} - c \left(\Theta_{i-1/2}^{-1/2} \right) \right] > 0 \right\} \\ Q_{i+1/2}^{-1/2} & \text{if } \left\{ \left[U_{i+1/2}^{-1/2} - c \left(\Theta_{i+1/2}^{-1/2} \right) \right] < 0 \right\}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.164}$$

Если в узел приходят характеристики одного типа из разных ячеек, то берется та из них, тангенс угла которой больше по абсолютной величине.

Схема «КАБАРЕ» с монотонизатором

Для монотонизации численного решения следует использовать алгоритм нелинейной коррекции:

$$r_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} {}^+r_{i+1}^n & \text{if } (\tilde{r}_{i+1}^{n+1} > {}^+r_{i+1}^n) \\ -r_{i+1}^n & \text{if } (\tilde{r}_{i+1}^{n+1} < -r_{i+1}^n) \\ \tilde{r}_{i+1}^{n+1} & \text{if } (-r_{i+1}^n \leq \tilde{r}_{i+1}^{n+1} \leq {}^+r_{i+1}^n) \end{cases}, \tag{1.165}$$

$${}^+r_{i+1}^n = \begin{cases} \max(r_{i+1}^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_i^n) & \text{if } ({}^+\lambda_{i+1}^n \geq 0) \\ \max(r_{i+1}^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_i^n) & \text{if } ({}^+\lambda_{i+1}^n < 0) \end{cases}, \tag{1.166}$$

$$-r_{i+1/2}^n = \begin{cases} \min(r_{i+1}^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_i^n) & \text{if } ({}^+\lambda_{i+1}^n \geq 0) \\ \min(r_{i+1}^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_i^n) & \text{if } ({}^+\lambda_{i+1}^n < 0) \end{cases},$$

$$q_i^{n+1} = \begin{cases} {}^+q_i^n & \text{if } (\tilde{q}_i^{n+1} > {}^+q_i^n) \\ -q_i^n & \text{if } (\tilde{q}_i^{n+1} < -q_i^n) \\ \tilde{q}_i^{n+1} & \text{if } (-q_i^n \leq \tilde{q}_i^{n+1} \leq {}^+q_i^n) \end{cases}, \tag{1.167}$$

$${}^+q_i^n = \begin{cases} \max(q_{i+1}^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_i^n) & \text{if } (-\lambda_i^n \leq 0) \\ \max(q_{i+1}^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_i^n) & \text{if } (-\lambda_i^n > 0) \end{cases},$$

$$-q_i^n = \begin{cases} \min(q_{i+1}^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_i^n) & \text{if } (-\lambda_i^n \leq 0) \\ \min(q_{i+1}^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_i^n) & \text{if } (-\lambda_i^n > 0) \end{cases},$$

1.3.10. Примеры расчетов волн разрежения

Дозвуковая волна разрежения

Начальные параметры разрыва: $u_L = 0$; $\rho_L = 1$; $u_R = 0,828$; $\rho_R = 0,5$. Значение правого инварианта Римана остается постоянным и равным $r = 2,83$. На рисунках 1.67–1.70 приведены графики скорости, давления, скорости звука и график наклона левой характеристики ($u-c$) на момент времени ($NT = 140$). Видно, что угол наклона левой характеристики всюду отрицателен.

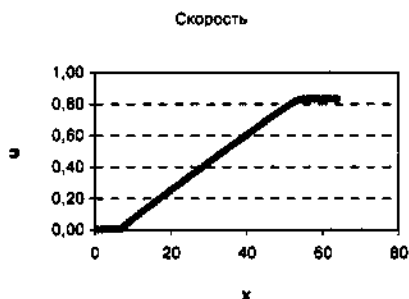


Рис. 1.67. Скорость потока в дозвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных



Рис. 1.68. Скорость звука в дозвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных



Рис. 1.69. Наклон левой характеристики в дозвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных. Всюду отрицателен

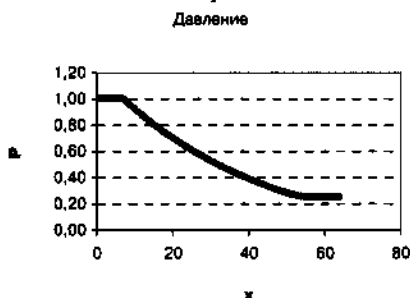


Рис. 1.70. Давление в дозвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных

Сверхзвуковая волна разрежения

Начальные параметры разрыва: $u_L = 2$; $\rho_L = 1$; $u_R = 2,828$; $\rho_R = 0,5$. Значение правого инварианта Римана остается постоянным и равным $r = 4,83$. На рисунках 1.71–1.74 приведены графики скорости, давления, скорости звука и график наклона левой характеристики ($u-c$) на момент времени $t = 0,4146093$ ($NT = 200$). Видно, что тангенс угла наклона левой характеристики всюду положителен.

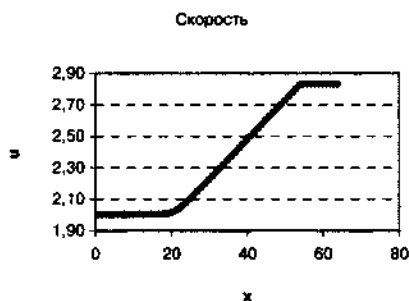


Рис. 1.71. Скорость потока в сверхзвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных



Рис. 1.72. Скорость звука в сверхзвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных



Рис. 1.73. Наклон левой характеристики в сверхзвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных. Всюду положительный



Рис. 1.74. Давление в сверхзвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных

Трансзвуковая волна разрежения

Начальные параметры разрыва: $u_L = 1$; $\rho_L = 1$; $u_R = 1,828$; $\rho_R = 0,5$. Значение правого инварианта Римана остается постоянным и равным $r = 3,83$. На рисунках 1.75–1.78 приведены графики скорости, давления, скорости звука и график наклона левой характеристики ($u-c$) на момент времени $t = 0,5611959$ ($NT = 200$). Видно, что угол наклона левой характеристики меняет знак.



Рис. 1.75. Скорость потока в трансзвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных



Рис. 1.76. Скорость звука в трансзвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных



Рис. 1.77. Наклон левой характеристики в трансзвуковой волне разрежения в эйлеровых переменных. При переходе через «звуковую точку» наклон характеристики меняет знак

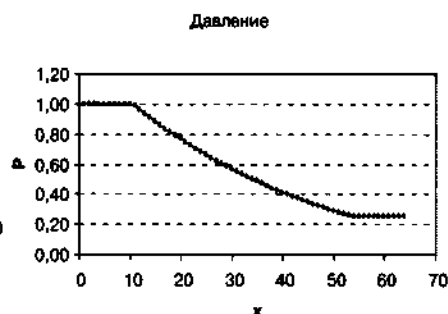


Рис. 1.78. Давление в трансзвуковой волне разрежения, рассчитанной в эйлеровых переменных

Разлет газа в пустоту

Особого внимания заслуживает задача о разлете газа в пустоту как одна из наиболее критических для вычислительных методик в эйлеровых переменных. Начальное состояние для этой задачи соответствует задаче о распаде разрыва с параметрами $u_L = 0$; $\rho_L = 1$; $u_R = 2,828$; $\rho_R = 10^{-6}$.

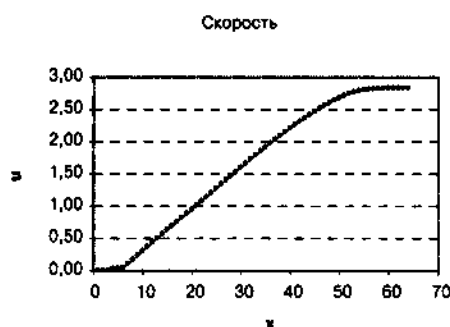


Рис. 1.79. Скорость потока при разлете газа в пустоту. Расчет в эйлеровых переменных



Рис. 1.80. Скорость звука при разлете газа в пустоту. Расчет в эйлеровых переменных



Рис. 1.81. Наклон q-характеристики при разлете газа в пустоту. Расчет в эйлеровых переменных

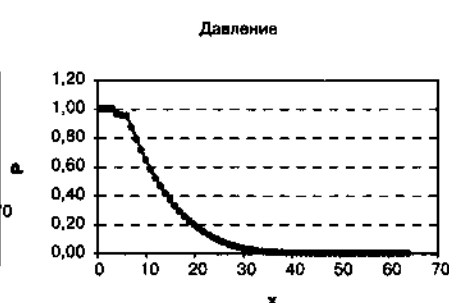


Рис. 1.82. Давление при разлете газа в пустоту. Расчет в эйлеровых переменных

1.3.11. Законы сохранения и разрывные решения для системы уравнений политропного газа в эйлеровых переменных

Под разрывными решениями системы (1.151) понимают т. н. «слабые решения», отвечающие интегральным соотношениям

$$\begin{aligned} \iint_G \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) \cdot dx \cdot dt &= \oint_{\partial G} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx - \oint_{\partial G} \frac{\partial \rho u}{\partial x} \cdot dt = 0; \\ \iint_G \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} \right) \cdot dx \cdot dt &= \oint_{\partial G} \frac{\partial \rho u}{\partial t} \cdot dx - \oint_{\partial G} \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} \cdot dt = 0. \end{aligned} \quad (1.169)$$

В окрестности сильного разрыва эта система сводится к соотношениям Гюгонио:

$$\begin{aligned} [\Delta \rho] \cdot \delta x - [\Delta (\rho u)] \cdot \delta t &= 0; \\ [\Delta (\rho u)] \cdot \delta x - [\Delta (\rho u^2 + P)] \cdot \delta t &= 0, \end{aligned} \quad (1.170)$$

где

$$\begin{aligned} [\Delta \rho] &= \rho_R - \rho_L; \quad [\Delta(\rho u)] = (\rho u)_R - (\rho u)_L; \\ [\Delta(\rho u^2 + P)] &= (\rho u^2 + P)_R - (\rho u^2 + P)_L; \quad D = \delta x / \delta t. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Из (1.130), (1.131) непосредственно следует, что скорость распространения сильного разрыва D должна удовлетворять условиям:

$$D = \frac{[\Delta(\rho u)]}{[\Delta \rho]}, \quad D = \frac{[\Delta(\rho u^2 + P)]}{[\Delta(\rho u)]}. \quad (1.172)$$

Перемножая соотношения (1.172), находим:

$$D^2 = \frac{[\Delta(\rho u^2 + P)]}{[\Delta \rho]}. \quad (1.173)$$

При дальнейших преобразованиях выражений (1.172), (1.173) важную роль будут играть следующие непосредственно проверяемые алгебраические тождества:

$$\begin{aligned} \Delta(a \cdot b) &= \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a; \\ \overline{a \cdot b} &= \bar{a} \cdot \bar{b} + 0,25 \cdot (\Delta a \cdot \Delta b), \end{aligned} \quad (1.174)$$

где $\bar{f} = 0,5 \cdot (f_R + f_L)$.

Из первого соотношения (1.132) с учетом (1.174) получаем:

$$D = \frac{[\Delta(\rho u)]}{[\Delta \rho]} = \frac{[\Delta \rho] \cdot \bar{u} + [\Delta u] \cdot \bar{\rho}}{[\Delta \rho]} = \bar{u} + \bar{\rho} \cdot \frac{[\Delta u]}{[\Delta \rho]}; \quad D - \bar{u} = \bar{\rho} \cdot \frac{[\Delta u]}{[\Delta \rho]}. \quad (1.175)$$

Из (1.173) следует:

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{[\Delta(\rho u^2 + P)]}{[\Delta \rho]} = \frac{[\Delta P]}{[\Delta \rho]} + \frac{[\Delta(\rho u^2)]}{[\Delta \rho]}, \\ \frac{[\Delta(\rho u^2)]}{[\Delta \rho]} &= \frac{[\Delta \rho] \cdot \bar{u}^2 + [\Delta u^2] \cdot \bar{\rho}}{[\Delta \rho]} = \bar{u}^2 + 2 \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{u} \cdot \frac{[\Delta u]}{[\Delta \rho]}, \end{aligned} \quad (1.176)$$

откуда, учитывая (1.175), находим:

$$D^2 - 2 \cdot \bar{u} \cdot D = \frac{[\Delta P]}{[\Delta \rho]} + \bar{u}^2 - 2 \cdot \bar{u} \cdot \bar{u}. \quad (1.177)$$

Квадратное уравнение (1.177) имеет два действительных корня:

$$D_{1,2} = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{[\Delta P]}{[\Delta \rho]} + \frac{[\Delta u]^2}{4}}.$$

Каждая из двух возможностей реализуется, и результат определяется знаком перепада давления ΔP .

$$D = \bar{u} - \text{sign}(\Delta P) \cdot \sqrt{\frac{[\Delta P]}{[\Delta \rho]} + \frac{1}{4} \cdot [\Delta u]^2}. \quad (1.178)$$

Выразим перепад скоростей на ударной волне через термодинамические величины. Подставляя (1.175) в (1.178)

$$-\text{sign}(\Delta P) \cdot \sqrt{\frac{[\Delta P]}{[\Delta \rho]} + \frac{1}{4} \cdot [\Delta u]^2} = \bar{p} \cdot \frac{[\Delta u]}{[\Delta \rho]} \quad (1.179)$$

и возводя полученное равенство в квадрат, получаем:

$$\frac{[\Delta P]}{[\Delta \rho]} = \frac{[\Delta u]^2}{4 \cdot [\Delta \rho]^2} \cdot (4 \cdot \bar{p}^2 - [\Delta \rho]^2), \quad (1.180)$$

откуда следует:

$$[\Delta u]^2 = \frac{\Delta P \cdot \Delta \rho}{\rho_R \cdot \rho_L}. \quad (1.181)$$

С учетом последнего соотношения выражение для скорости ударной волны (1.177) принимает вид:

$$D = \bar{u} + D_s; \quad D_s = -\text{sign}(\Delta P) \cdot \sqrt{\frac{[\Delta P]}{[\Delta \rho]} \cdot \frac{\bar{p}^2}{\rho_R \cdot \rho_L}}. \quad (1.182)$$

Величина D_s представляет собой скорость ударной волны в системе отсчета, движущейся относительно неподвижного наблюдателя со скоростью $\bar{u}$. Выразим эту скорость через скорость ударной волны в массовых переменных D_m . Подставляя в (1.182) вместо плотностей их представление через удельные объемы, находим:

$$D_s = -\text{sign}(\Delta P) \cdot \frac{\bar{p}}{\rho_R \cdot \rho_L} \cdot \sqrt{-\frac{[\Delta P]}{[\Delta \eta]}} = \frac{\bar{p}}{\rho_R \cdot \rho_L} \cdot D_m. \quad (1.183)$$

Перепад скоростей на ударной волне должен быть всегда отрицательным, поэтому при извлечении квадратного корня из (1.181) следует брать его отрицательное значение:

$$\Delta u = -\sqrt{\frac{\Delta P \cdot \Delta \rho}{\rho_R \cdot \rho_L}}. \quad (1.184)$$

Нетрудно увидеть, что последнее выражение совпадает с выражением, ранее полученным для случая лагранжевых переменных.

1.3.12. Задача о распаде произвольного разрыва

Кратко остановимся на известных соотношениях, характеризующих задачу о распаде произвольного разрыва при кусочно-постоянных начальных данных u_L, ρ_L, u_R, ρ_R (т. н. задачу Римана) для системы уравнений (1.151).

Перепад скоростей на ударной волне должен удовлетворять соотношению (1.184). Если равенство (1.184) не выполняется, то в случае, когда

$$\Delta u < -\sqrt{\frac{\Delta P \cdot \Delta \rho}{\rho_R \cdot \rho_L}}, \quad (1.185)$$

решение будет представлять собой две ударные волны, расходящиеся в разные стороны. Значения величин (u^*, ρ^*) за фронтами этих волн находятся из соотношений:

$$\begin{aligned} u^* - u_L &= -\sqrt{\frac{(P^* - P_L) \cdot (\rho^* - \rho_L)}{\rho^* \cdot \rho_L}}, \\ u_R - u^* &= -\sqrt{\frac{(P^* - P_R) \cdot (\rho^* - \rho_R)}{\rho^* \cdot \rho_R}}. \end{aligned} \quad (1.186)$$

Исключая из (1.186) неизвестную величину u^* , приходим к следующему нелинейному уравнению относительно термодинамических переменных:

$$u_R - u_L = -\sqrt{\frac{(P^* - P_L) \cdot (\rho^* - \rho_L)}{\rho^* \cdot \rho_L}} - \sqrt{\frac{(P^* - P_R) \cdot (\rho^* - \rho_R)}{\rho^* \cdot \rho_R}}. \quad (1.187)$$

Это уравнение с точностью до обозначений ($\eta = 1/\rho$) совпадает с аналогичным уравнением для Р-системы. Все последующие уравнения, описывающие неизвестные величины в задаче о распаде произвольного разрыва, также совпадают с приведенными в соответствующем разделе для системы уравнений политропного газа в лагранжевых переменных.



1.3.13. Примеры тестовых расчетов и эмпирическое исследование сходимости

Две волны разрежения

Эмпирическое исследование сходимости алгоритма будем проводить только на автомодельных задачах о двух волнах разрежения и комплексе из ударной волны и волны разрежения. Рассмотрим первую из этих задач, отвечающую параметрам: $u_L = -1$, $u_R = 1$, $\rho_L = \rho_R = 1$, которым соответствуют автомодельные профили, приведенные на рисунках 1

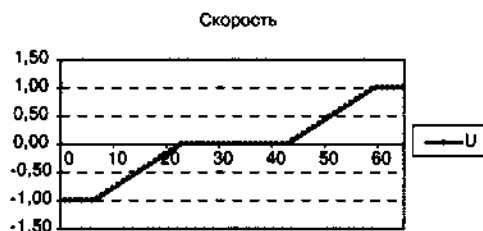


Рис. 1.83. График скорости при расчете автомодельной задачи о двух волнах разрежения. Расчет в зйлеровых переменных



Рис. 1.84. График плотности при расчете автомодельной задачи о двух волнах разрежения. Расчет в зйлеровых переменных

Расчеты проводились на сгущающихся сетках при одинаковых числах Куранта, и исследовалась сходимость численного решения к аналитическому. На рисунках 1.85–1.86 приведены графики модулей отклонения численных решений от аналитических (по скорости и плотности) при числе расчетных точек $N = 64$. Аналогичные графики при $N = 1025$ приведены на рисунках 1.87–1.88. Видно, что максимальная невязка соответствует окрестностям локализации слабых разрезов.

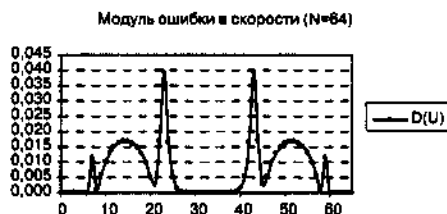


Рис. 1.85. Модуль ошибки скорости при расчете автомодельной задачи о двух волнах разрежения. Расчет в зйлеровых переменных. $N = 64$



Рис. 1.86. Модуль ошибки плотности при расчете автомодельной задачи о двух волнах разрежения. Расчет в зйлеровых переменных. $N = 64$

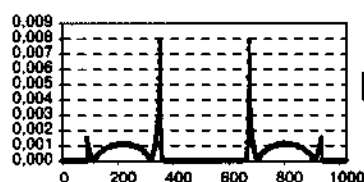
Модуль ошибки в скорости ($N=1024$)

Рис. 1.87. Модуль ошибки скорости при расчете автомодельной задачи о двух волнах разрежения. Расчет в эйлеровых переменных.
 $N = 1024$

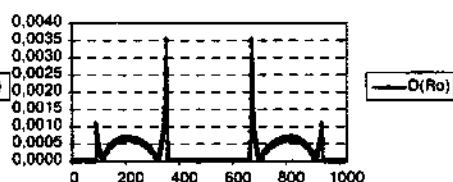
Модуль ошибки плотности ($N=1024$)

Рис. 1.88. Модуль ошибки плотности при расчете автомодельной задачи о двух волнах разрежения. Расчет в эйлеровых переменных. $N = 1024$

Сходимость невязки в разных нормах представлена в таблице 1.3:

Таблица 1.3. Сходимость невязки в разных нормах

Кол-во точек	Норма C для скорости	Норма C для плотности	Норма C для давления	Норма L2 для скорости	Норма L2 для плотности	Норма L2 для давления
32	0,0553	0,0257	0,0423	0,0218	0,0119	0,0144
64	0,0393	0,0182	0,0422	0,0117	0,0063	0,0097
128	0,0270	0,0124	0,0207	0,0063	0,0033	0,0043
256	0,0180	0,0063	0,0120	0,0034	0,0018	0,0023
512	0,0116	0,0053	0,0066	0,0018	0,00093	0,0012
1024	7,77E-03	3,52E-03	3,53E-03	9,78E-04	4,97E-04	6,30E-04

$\ln(N)$	$\ln(C(U))$	$\ln(C(\rho))$	$\ln(C(P))$	$\ln(L2(U))$	$\ln(L2(\rho))$	$\ln(L2(P))$
5	-4,18	-5,28	-4,56	-5,52	-6,40	-6,11
6	-4,67	-5,78	-4,57	-6,41	-7,32	-6,69
7	-5,21	-6,33	-5,59	-7,31	-8,24	-7,85
8	-5,80	-6,92	-6,38	-8,20	-9,15	-8,75
9	-6,43	-7,55	-7,24	-9,10	-10,1	-9,69
10	-7,01	-8,15	-8,14	-10,00	-11,0	-10,6

Ударная волна и волна разрежения

Исследование сходимости при наличии ударной волны и волны разрежения проводилось на задаче Римана, отвечающей параметрам: $u_L = u_R = 0$, $\rho_L = 1$, $\rho_R = 0,1$. Соответствующие автомодельные профили скорости и плотности представлены на рисунках 1.89–1.90.

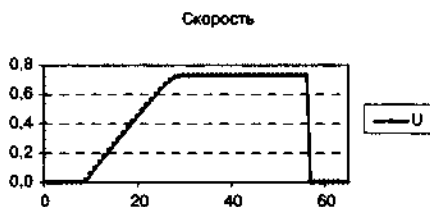


Рис. 1.89. График скорости при расчете автомодельной задачи об ударной волне и волне разрежения. Расчет в эйлеровых переменных. $N = 64$



Рис. 1.90. График плотности при расчете автомодельной задачи об ударной волне и волне разрежения. Расчет в эйлеровых переменных. $N = 64$

На рисунках 1.91–1.92 представлены графики модуля невязки при $N = 65$.

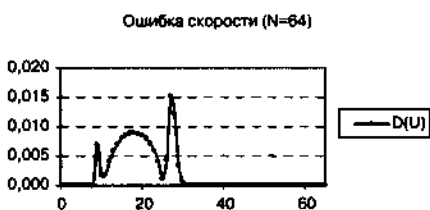


Рис. 1.91. График модуля ошибки скорости при расчете автомодельной задачи об ударной волне и волне разрежения. Расчет в эйлеровых переменных. $N = 64$



Рис. 1.92. График модуля ошибки плотности при расчете автомодельной задачи об ударной волне и волне разрежения. Расчет в эйлеровых переменных. $N = 64$

Аналогичные графики при $N = 1025$ приведены на рисунках 1.93–1.94. Как и во всех предыдущих случаях, максимум невязки соответствует слабым разрывам.

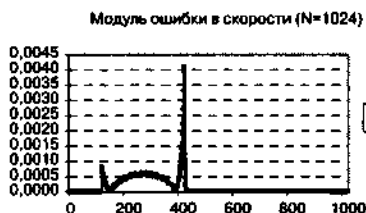


Рис. 1.93. График модуля ошибки скорости при расчете автомодельной задачи об ударной волне и волне разрежения. Расчет в эйлеровых переменных. $N = 1024$

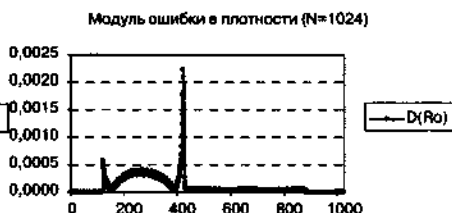


Рис. 1.94. График модуля ошибки плотности при расчете автомодельной задачи об ударной волне и волне разрежения. Расчет в эйлеровых переменных. $N = 1024$

Представление о поведении невязки в разных нормах дает таблица 1.4:

Таблица 1.4. Поведение невязки в разных нормах

Кол-во точек	Норма C для скорости	Норма C для плотности	Норма C для давления	Норма L2 для скорости	Норма L2 для плотности	Норма L2 для давления
32	0,0231	0,0123	0,0269	0,0081	0,0048	0,0071
64	0,0151	0,0080	0,2419	0,0043	0,0025	0,0306
128	0,0134	0,0072	0,2419	0,0024	0,0014	0,0215
256	0,0085	0,0045	0,2419	0,0013	0,00073	0,0152
512	0,0064	0,0035	0,0039	0,00069	0,00040	0,00058
1024	4,10E-03	2,22E-03	2,45E-03	3,66E-04	2,12E-04	3,05E-04

Ln(N)	Ln(C(U))	Ln(C(p))	Ln(C(P))	Ln(L2(U))	Ln(L2(p))	Ln(L2(P))
5	- 5,435	- 6,350	- 5,216	- 6,955	- 7,691	- 7,148
6	- 6,045	- 6,966	- 2,048	- 7,869	- 8,625	- 5,032
7	- 6,217	- 7,134	- 2,048	- 8,717	- 9,501	- 5,541
8	- 6,875	- 7,789	- 2,048	- 9,619	- 10,41	- 6,044
9	- 7,279	- 8,177	- 8,011	- 10,51	- 11,30	- 10,74
10	- 7,932	- 8,814	- 8,676	- 11,42	- 12,20	- 11,68

Заключение к главе 1

При решении систем гиперболических уравнений по схеме «КАБАРЕ» используется подход, объединяющий характеристическую форму записи исходной системы для вычисления потоковых переменных и дивергентную форму записи для вычисления консервативных переменных. Такое объединение оказалось возможным благодаря расширению числа независимых переменных и их специализации. Из характеристической формы записи рассмотренной простейшей системы уравнений мы воспользовались только конкретным видом инвариантов Римана и тем фактом, что для них должен выполняться принцип максимума. Это дало нам возможность провести линейную экстраполяцию этих инвариантов с учетом направления характеристической скорости и применить к результатам экстраполяции процедуру нелинейной коррекции, основанную на принципе максимума. Для вычисления консервативных переменных были использованы дивергентные разностные схемы, гарантирующие выполнение основных законов сохранения на дискретном уровне.

Следует отметить, что для системы уравнений в лагранжевых переменных в каждый расчетный узел всегда приходят две характеристики, по одной из каждой прилегающей ячейки. Это заметно упрощает логику блока вычисления потоковых переменных. При переходе к эйлеровым переменным картина заметно усложняется, поскольку в данный узел могут приходиться две характеристики из одной ячейки, что соответствует сверхзвуковому течению, только единственная характеристика, что отвечает «звуковой точке» и т. д.

Тестовые расчеты показывают, что численное решение всегда остается монотонным, сильные разрывы рассчитываются точно, основная ошибка локализуется вблизи слабых разрывов, которые не «размазываются». Техника, отработанная в данной главе, далее будет использована для интегрирования полной системы уравнений газовой динамики.

Литература к главе 1

1. Петровский И.Г. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными. – 1(3–4(13–14)). – УМН, 1946. – С. 243–247.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978, 688 с.
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 607 с.
4. Жуков А.И. Применение метода характеристик для численного решения одномерных задач газовой динамики // Труды Матем. инс-та им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1960. – 58. – С. 1–152.
5. Магомедов К.Н., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 2003. – 632 с.
7. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Мат. сб. – 47(89)(3). – 1959. – С. 271–306.
8. Lax P.D., Wendroff B. Difference schemes for hyperbolic equation with high order of accuracy // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – 17(3). – P. 381–398.
9. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. – 1998. – 10(1). – P. 86–100.
10. Головизнин, В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы «КАБАРЕ» // Математическое моделирование. – 1998. – 10(1). – P. 101–116.
11. Boris, J.P., Book D.L. Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm That Works // Comp. Physics. – 1997. – 135. – P. 172–186.
12. Kurganov A., Tadmor E. New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws for Convection-Diffusion Equations // Comp. Physics. – 2000. – 160. – P. 214–282.
13. Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite difference schemes // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1984. – 21(1). – P. 1–23.
14. Qiu J., Shu C.-W. Runge – Kutta Descontinuous Galerkin Method Using WENO Limiters // Comp. Physics, 2003.
15. Fedkiw, R.P., Merriman B., Osher S. Simplified Discretization of Systems of Hyperbolic Conservation Laws Containing Advection Equations // Comp. Physics, 2000. – 157(1). – P. 302–326.
16. Leer van B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method // Comp. Phys. – 1979. – 32(1). – P. 101–136.

17. *Shu C.-W.* TVB uniformly high-order schemes for conservation laws // *Math. Comput.* – 1987. – 49(179). – P. 105–121.
18. *Harten A., Osher S.* Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* – 1987. – 24(2). – P. 207–216.
19. Головизнин В.М., Карабасов С.А. Нелинейная коррекция схемы «КАБАРЕ» // Математическое моделирование. – 1998. – 12(1). – P. 107–123.
20. Головизнин В.М., Иванов А.В., Соловьева Е.В. Явные разностные схемы второго порядка аппроксимации для простейшего одномерного уравнения переноса на минимальных компактных вычислительных шаблонах. – Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-2008-09, 2008.
21. Самарский, А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, 1975.
22. *Goloviznin, V.M. and Karabasov S.A.* New Efficient High-Resolution Method for Nonlinear Problems in Aeroacoustics // *AIAA Journal.* – 2007. – 45(12). – P. 2861–2871.
23. *Iserles, A.* Generalized Leapfrog Methods // *IMA Journal of Numerical Analysis.* – 1986. – 6(3). – P. 381–392.
24. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987.
25. Рухтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: МИР, 1972.
26. *Colonus, T. and Lele S.* Computational aeroacoustics: progress on nonlinear problems of sound generation. Progress in Aerospace sciences. – 2004. – 40. – P. 345–416.
27. Годунов С.К. Разностная схема для численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. – 1959. – 47. – P. 271–306.
28. Остапенко В.В. О монотонности балансно-характеристической схемы // Математическое моделирование. – 2009. – 21(7). – P. 29–42.
29. Головизнин, В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М. Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. – 2003. – 15(9). – P. 29–48.
30. Головизнин, В.М., Карабасов С.А. Балансно-характеристические схемы на кусочно-постоянных начальных данных. Прыжковый перенос // Математическое моделирование. – 2003. – 15(10). – P. 71–83.
31. Колган, В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики. – Уч. зап. ЦАГИ. – 1972. – 3(6). – P. 68–77.
32. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *Comp. Phys.* – 1983. – 49. – P. 357–393.
33. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Математическое моделирование. – 1989. – 1(5). – P. 95–120.
34. *Iserles A.* Generalised lapfrog methods // *IMA Journal of Numerical Analysis.* – 1986. – 6.
35. *Kim C.* Multi-Dimensional Upwind Leapfrog Schemes and their Application. – The University of Michigan, 1997.
36. *Thomas, J.P., Kim C., Roe P.L.* Progress towards a new computational Scheme for aeroacoustics. – AIAA 12th Computational Fluid Dynamics Conference, 1995. – AIAA Paper 95-1758.

37. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М. Балансно-характеристический метод решения одного квазилинейного гиперболического уравнения. – Итерационные методы и матричные вычисления. – Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 2002. – С. 472–480.
38. Головизнин, В.М. и др. Новый вычислительный алгоритм для математического моделирования просачивания влаги сквозь ненасыщенную трещиноватую геологическую среду с низкой проницаемостью. – Препринт ИБРАЭ № IBRAE-2006-07, 2006.
39. Goloviznin V.M., Hynes T.P., Karabasov S.A. CABARET finite-difference schemes for the one-dimensional Euler equations // *Mathematical Modelling and Analysis*, 2001. – 6(2). – P. 210–220.
40. Karabasov S.A., Goloviznin V.M., Compact Accurately Boundary-Adjusting high-Resolution Technique for fluid dynamics // *Comp. Physics*. – 2009. – 228. – P. 7426–7451.
41. Кружков С.Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными. // *Мат. сб.* – 1966. – 70(112)(3). – P. 394–415.
42. Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacements in sands. *Transactions of the AIME*. – 1942. – 146. – P. 107–116.
43. Колган В.П. Конечно-разностная схема для расчета разрывных решений нестационарной газовой динамики. – Уч. зап. ЦАГИ. – 1975. – 6(1). – P. 9–14.
44. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений уравнений газовой динамики. – Ученые зап. ЦАГИ. – 1972. – 6(1). – P. 68–77.
45. Родионов А.В. Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // *ЖВМиМФ*. – 1987. – 27(12). – P. 1853–1860.
46. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Квазимонотонные схемы для уравнений газодинамики. – 1987. – М.: Препринт №175 ИПМ АН СССР.
47. Вязников К.В. и др. О методе построения квазимонотонных схем повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса. – 1989. – М.: Препринт №141 ИПМ АН СССР.
48. Lesaint P., Raviart P. On a finite element method for solving the neutron transport equation // *Mathematical Aspects of Finite Element in Partial Differential Equations*, 1974.
49. Jonson C., Szepessy A., Hansbo R. On the convergence of shock-capturing streamline diffusion finite element methods for hyperbolic conservation laws // *Mathematics of computation*. – 1990. – 54. – P. 107–129.

Численное моделирование затухания однородной турбулентности в одномерном случае

Обобщение схемы «КАБАРЕ» на одномерное уравнение Бюргерса, описанное в первой главе, дает возможность проверить ее качество в сравнении с другими классическими схемами на модельной задаче о затухании однородной одномерной турбулентности. Одномерная турбулентность представляет собой исключительно математический объект, не имеющий никакого отношения к реальности, однако ее математическое моделирование дает возможность познакомить читателя с основными понятиями, необходимыми для понимания технологии расчетов двумерной и трехмерной свободной турбулентности, представленных далее.

Введение

Одномерным аналогом уравнений Навье – Стокса для несжимаемой жидкости можно считать уравнение Бюргерса [1], которое представляет собой нелинейное уравнение конвекции – диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

где величину u можно рассматривать как скорость с размерностью $[x][t]^{-1}$. Положительная константа ν играет роль кинематической вязкости с размерностью $[x]^2[t]^{-1}$.

У классической системы уравнений Навье – Стокса и уравнения (2.1) много общего. Например, квадратичная нелинейность в адвективном слагаемом и линейная вязкость в правой части. Что касается свойств решений, то они совершенно разные. У уравнения Бюргерса при коэффициенте вязкости ν , стремящемся к нулю, формируются как сильные (ударные волны), так и слабые разрывы, в то время как решения уравнений Навье – Стокса такими особенностями не обладают. Уравнение (2.1) с помощью преобразования Хопфа сводится к линейному уравнению параболического типа, что позволяет проанализировать все особенности решения при произвольных начальных данных. Отсюда, в частности, следует, что все стохастические свойства ансамбля решений полностью определяются стохастическими свойствами начальных данных.

Тем не менее, уравнение Бюргерса является объектом пристального внимания исследователей, изучающих свойства турбулентности [2–5]. Задача обычно ставится следующим образом. На отрезке $x \in [0, 2\pi]$ задаются случайные начальные данные с заданными статистическими свойствами, и решается нестационарное уравнение (2.1)

с периодическими граничными условиями. В этом случае говорится, что исследуется затухание однородной «бюргуленции».

Начальные данные формируются рядом Фурье с заданными коэффициентами c_k и случайными фазами θ_k , равномерно распределенными на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$u(x, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp[i(kx + \theta_k)]. \quad (2.2)$$

Коэффициенты c_k вычисляются как:

$$c_k = \sqrt{E_{k0}}, \quad (2.3)$$

где E_{k0} – начальный спектр кинетической энергии возмущений скорости. График начального спектра возрастает в низкочастотной области и экспоненциально убывает в высокочастотной области (рис. 2.1), согласно уравнению [6]:

$$E_{k0} = A \sigma^5 k^4 e^{-\sigma^2 k^2/2}. \quad (2.4)$$

Здесь константа $A = \frac{U_0^2}{3\sqrt{2}\pi}$, $U_0^2 = \langle u_0^2(x) \rangle$ – средняя кинетическая энергия в момент $t=0$, σ – параметр, характеризующий ширину начального спектра энергии, k – волновое число.

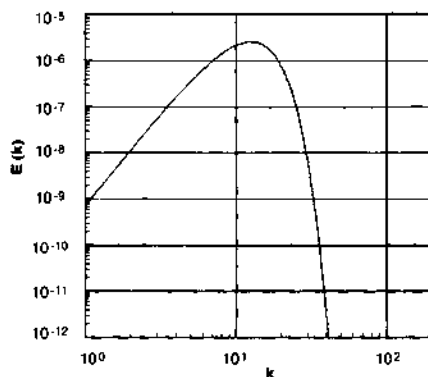


Рис. 2.1. Начальный спектр возмущений

Спектр энергии E_{k0} достигает максимального значения в точке $(k)_{\max} = \frac{2}{\sigma}$.

Целью расчетов является изучение поведения во времени некоторых средних по ансамблю величин (например, полной кинетической энергии, спектральных функций

энергии, структурных функций случайного поля скоростей и т. д.) и сравнение полученных результатов с известными теоретическими оценками.

Известно, что коэффициент наклона спектральной кривой на логарифмической плоскости в одномерном случае равен не $-5/3$, как в трехмерном случае, а -2 . Это обстоятельство обычно используется для тестирования новых алгоритмов, ориентированных на метод крупных вихрей (LES) [7]. В настоящей главе мы воспользуемся данной задачей для тестирования классических одномерных разностных схем Годунова, Лакса – Вендроффа, Аракавы, «Крест», а также схемы «КАБАРЕ», развиваемой в ИБРАЭ РАН и отличающейся большой простотой и вычислительной эффективностью [8–13].

2.1. Разностные схемы

Разобьем отрезок $x \in [0, 2\pi]$ на N ячеек и занумеруем узлы полученной расчетной сетки от 0 до N . Проекцию флуктуации скорости на узлы расчетной сетки обозначим u_i , где $i \in [0, N]$ – номер узла. Пространственный шаг сетки постоянный: $h = 2\pi/N$, шаг по времени – τ . Номер шага по времени $n = 0, 1, 2, \dots$

2.1.1. Схема «КАБАРЕ»

Схема «КАБАРЕ» имеет компактный двухслойный шаблон (рис. 2.2).

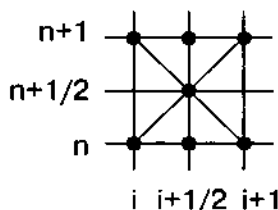


Рис. 2.2. Сеточный шаблон схемы «КАБАРЕ»

Отличительной особенностью схемы «КАБАРЕ» является то, что она оперирует с двумя типами переменных: с потоковыми, относящимися к узлам сетки, и с консервативными, относящимися к центрам расчетных ячеек. Начальные данные задаются для консервативных переменных, начальные потоковые переменные при этом вычисляются простым переносом соседней консервативной переменной по направлению скорости.

Алгоритм расчета переменных на новом временном слое состоит из трех последовательных шагов. На первом шаге вычисляются промежуточные консервативные переменные на промежуточном временном слое (рис. 2.3):

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^n}{\tau/2} = -\frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{h} + Q_{i+1/2}^n, \quad (2.5)$$

где

$$F_i^n = \frac{(u_i^n)^2}{2} \quad (2.6)$$

и «вязкое» слагаемое

$$Q_{i+1/2}^n = \mu \frac{u_{i+3/2}^n - 2u_{i+1/2}^n + u_{i-1/2}^n}{h^2}. \quad (2.7)$$

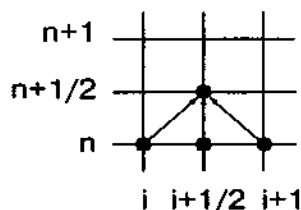


Рис. 2.3. Иллюстрация к первому шагу по схеме «КАБАРЕ»

На втором шаге, в зависимости от направления скорости, вычисляются предварительные значения потоковых переменных на новом временном слое (рис. 2.4).

Если $(u_{i+1/2}^n + u_{i+3/2}^n)/2 \geq 0$, то

$$\tilde{u}_{i+1}^{n+1} = 2u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_i^n, \quad (2.8)$$

иначе

$$\tilde{u}_{i+1}^{n+1} = 2u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i+2}^n. \quad (2.9)$$

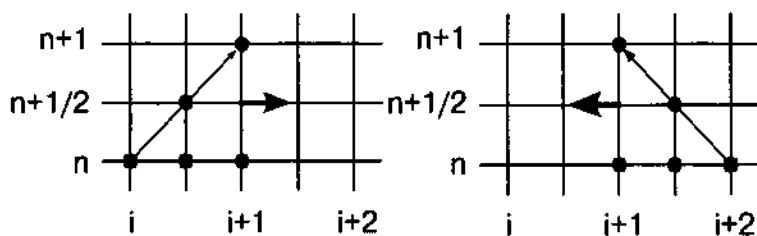


Рис. 2.4. Иллюстрация ко второму шагу по схеме «КАБАРЕ»

Затем, согласно принципу максимума, осуществляется коррекция полученных потоковых переменных:

Если $(u_{i+1/2}^n + u_{i+3/2}^n)/2 \geq 0$, то

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{u}_{i+1}^{n+1} & \text{if } \min_{i+1/2} \leq \tilde{u}_{i+1}^{n+1} \leq \max_{i+1/2}; \\ \min_{i+1/2} & \text{if } \tilde{u}_{i+1}^{n+1} < \min_{i+1/2}; \\ \max_{i+1/2} & \text{if } \tilde{u}_{i+1}^{n+1} > \max_{i+1/2}. \end{cases} \quad (2.10)$$

иначе

$$u_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{u}_{i+1}^{n+1} & \text{if } \min_{i+3/2} \leq \tilde{u}_{i+1}^{n+1} \leq \max_{i+3/2}; \\ \min_{i+3/2} & \text{if } \tilde{u}_{i+1}^{n+1} < \min_{i+3/2}; \\ \max_{i+3/2} & \text{if } \tilde{u}_{i+1}^{n+1} > \max_{i+3/2}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \min_{i+1/2} &= \min \{u_i^n, u_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n\} + \tau Q_{i+1/2}^n, \\ \max_{i+1/2} &= \max \{u_i^n, u_{i+1/2}^n, u_{i+1}^n\} + \tau Q_{i+1/2}^n. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Дополнительно требуется осуществить коррекцию потоковых величин в области распада разрыва. Данную область можно идентифицировать по соседним консервативным переменным. Если консервативные скорости в соседних ячейках направлены в разные стороны, то есть $u_{i+1/2}^{n+1/2} < 0$ и $u_{i+3/2}^{n+1/2} > 0$, то новая потоковая переменная в текущем узле принимается равной нулю: $u_{i+1}^{n+1} = 0$.

На последнем, третьем шаге по найденным значениям потоковых и консервативных переменных вычисляются окончательные значения консервативных переменных на новом временном слое (рис. 2.5):

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} = -\frac{F_{i+1}^{n+1} - F_i^{n+1}}{h} + Q_{i+1/2}^n. \quad (2.13)$$

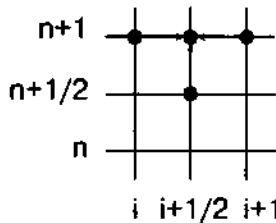


Рис. 2.5. Иллюстрация к третьему шагу по схеме «КАБАРЕ»

Потоки F вычисляются по переменным на новом временном слое $(n+1)$ по формуле (2.6). «Вязкое» слагаемое Q берется с предыдущего временного слоя. Схема

«КАБАРЕ» имеет второй порядок аппроксимации по времени и по пространству (при отсутствии вязкости). Метод устойчив при выполнении условий Куранта:

$$CFL_c = \frac{\tau U_{\max}}{h} < \frac{1}{2}; \quad U_{\max} = \max \{u_i\}; \quad (2.14)$$

$$CFL_\mu = \frac{\tau \nu}{h^2} < 1. \quad (2.15)$$

Исходя из данных условий на каждом временном слое определяется максимально допустимый шаг по времени τ .

Для устойчивости схемы «КАБАРЕ» не требуется введения искусственной вязкости. Это одна из ключевых особенностей данного метода, которая выгодно его отличает от большинства классических разностных схем (см. ниже). Дальнейшие расчеты по схеме «КАБАРЕ» будут проведены при $\nu = 0$.

2.1.2. Схема Лакса – Вендроффа

Это двухслойная разностная схема (рис. 2.6), которая, на первый взгляд, похожа на схему «КАБАРЕ».

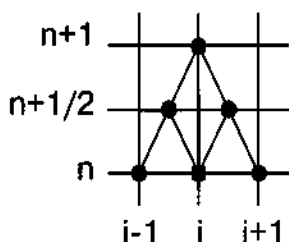


Рис. 2.6. Сеточный шаблон схемы Лакса – Вендроффа

Алгоритм Лакса – Вендроффа может быть представлен в т. н. двухэтапной форме. На первом этапе находятся промежуточные переменные на временном слое $n+1/2$:

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2}}{\tau/2} = -\frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{h}, \quad F_i^n = \frac{(u_{i+1}^n)^2}{2} \quad (2.16)$$

На втором шаге по найденным промежуточным переменным вычисляются переменные на новом временном слое:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = -\frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}}{h}, \quad F_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{(u_{i+1/2}^{n+1/2})^2}{2}. \quad (2.17)$$

С учетом вязкости:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = - \frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n-1/2}}{h} + \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}. \quad (2.18)$$

Метод имеет (при исчезающей вязкости) второй порядок аппроксимации по времени и по пространству.

Анализ фон Неймана, основанный на преобразовании Фурье, дает лишь необходимое условие устойчивости разностной схемы (2.18) и показывает, что данная схема может быть устойчива при числах Куранта меньше 1 и любых $\nu \geq 0$. Однако можно показать [14], что при наличии в начальном поле скоростей коротких волн (длиной $2h$), пульсации скоростей с течением времени будут неограниченно возрастать. Для обеспечения устойчивости схемы требуется введение некоторой ненулевой вязкости ν .

Возникающая при отсутствии вязкости неустойчивость обусловлена нелинейными эффектами, а именно, возникающей квадратичной нелинейностью. Впервые она была обнаружена и проанализирована при численном решении нелинейного баротропного уравнения вихря Филлипсом [14–15]. Такая неустойчивость свойственна численному решению уравнений, содержащих слагаемые с частными пространственными производными от квадратов величин, зависящих от пространственных координат, как, например, в уравнениях газовой динамики и, в частности, в уравнении Бюргерса.

Коэффициент искусственной вязкости ν следует выбирать таким, чтобы вязкое слагаемое обеспечивало эффективное подавление возникающей квадратичной нелинейности, но при этом не приводило к существенной диссипации решения с течением времени. Оптимальный коэффициент, таким образом, будет зависеть от шага сетки: $\nu = \varepsilon h$, где ε – положительная константа, выбираемая эмпирически.

2.1.3. Схема «Крест»

Это трехслойная явная разностная схема с сеточным шаблоном в виде креста (рис. 2.7).

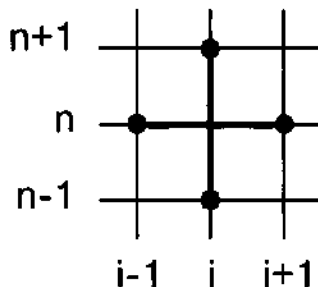


Рис. 2.7. Сеточный шаблон схемы «Крест»

На первом временном слое значения неизвестных переменных могут быть рассчитаны с помощью схемы Годунова (см. главу 2.2.5). На остальных слоях новые переменные рассчитываются по схеме:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} + \frac{u_{i+1}^2 - u_{i-1}^2}{4h} = \nu \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{h^2}, \quad (2.19)$$

Следует обратить внимание на то, что вязкость берется с нижнего временного слоя ($n-1$).

Данная схема при нулевой вязкости имеет второй порядок аппроксимации по времени и по пространству. В линейном приближении схема устойчива при числах Куранта меньше единицы, но в данном случае, на уравнении Бюргерса с квадратичной нелинейностью при $\nu = 0$ схема «Крест», как и схема Лакса – Вендроффа, подвержена нелинейной неустойчивости Филлипса. Для ее стабилизации требуется задание ненулевого коэффициента вязкости $\nu = \varepsilon h$, где ε – положительная константа, выбираемая эмпирически.

2.1.4. Схема Аракawy

Схема Аракawy во многом напоминает схему «Крест», но в отличие от последней, аппроксимирует уравнение, записанное в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{3} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u^2 \right). \quad (2.20)$$

Таким образом, разностная схема принимает вид:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = -\frac{1}{3} \left(u_i^n \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) + \frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2h} \right). \quad (2.21)$$

В потоковой форме:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = -\frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{2h}, \quad (2.22)$$

где

$$F_{i+1/2}^n = \frac{1}{3} \left((u_{i+1}^n)^2 + u_i^n u_{i+1}^n + (u_i^n)^2 \right). \quad (2.23)$$

С учетом вязкости:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = -\frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{2h} + \nu \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{h^2}. \quad (2.24)$$

Схема также имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству и устойчива с введением искусственной вязкости $\nu = \varepsilon h$, $\varepsilon > 0$ при числах Куранта меньше единицы.

2.1.5. Схема Годунова

Схема Годунова имеет сеточный шаблон в виде «уголка», ориентация которого зависит от направления средней скорости в ячейке (рис. 2.8).

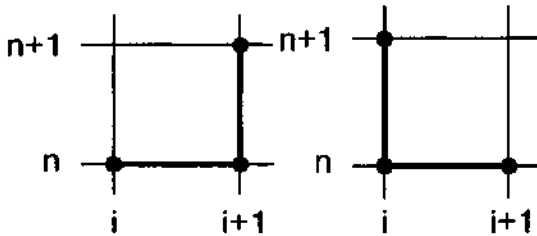


Рис. 2.8. Сеточные шаблоны схемы Годунова

Схема выглядит следующим образом:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = - \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{h}, \quad (2.25)$$

где

$$F_{i+1/2}^n = \begin{cases} (u_i^n)^2/2, & \text{if } (u_i^n + u_{i+1}^n)/2 \geq 0; \\ (u_{i+1}^n)^2/2, & \text{if } (u_i^n + u_{i+1}^n)/2 < 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

С учетом вязкости схема принимает вид:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = - \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{h} + \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}. \quad (2.27)$$

Для предотвращения возникновения в численном решении «стоячих разрывов» требуется осуществить коррекцию скоростей в области распада разрыва. Данная область идентифицируется следующим образом. Если скорости в соседних ячейках по отношению к i -ой направлены в противоположные стороны, то есть $u_{i-1}^n < 0$ и $u_{i+1}^n > 0$, то новое значение скорости в текущем узле принимается равным нулю: $u_i^{n+1} = 0$.

Следует отметить, что метод Годунова не требует введения искусственной вязкости для обеспечения устойчивости решения. Этот факт, вероятно, объясняется высокой аппроксимационной вязкостью схемы, достаточной для подавления нелинейной неустойчивости Филлипса, которая возникает, например, при использовании разностных методов Лакса – Вендроффа, «Крест» и Аракавы.

Метод Годунова имеет первый порядок аппроксимации по времени и по пространству и является устойчивым (при малых коэффициентах вязкости) при числах Куранта от нуля до единицы.

2.2. Примеры расчетов

Рассмотрим уравнение (2.1) при отсутствии вязкости: $\nu = 0$. Граничные условия – периодические.

Заданному начальному спектру энергии (2.4) удовлетворяет бесконечное множество различных распределений пульсаций скорости. Пример одного случайного распределения пульсаций с заданным спектром и его эволюция с течением времени, рассчитанная по схеме «КАБАРЕ», представлена на следующей серии рисунков (2.9–2.11).

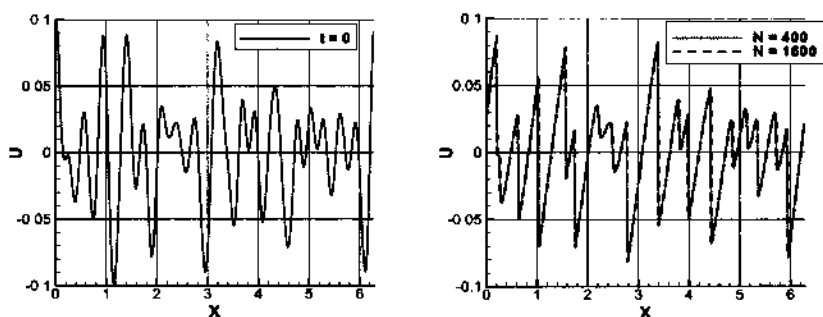


Рис. 2.9. Исходное случайное поле скоростей ($t = 0$) и на момент времени $t = 2,5$

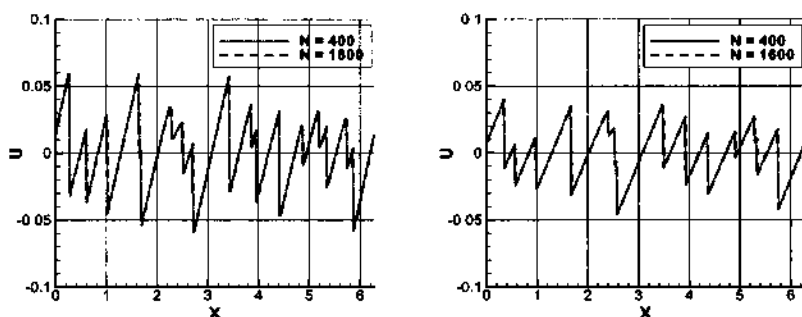


Рис. 2.10. Распределение скоростей на моменты времени 5 и 10

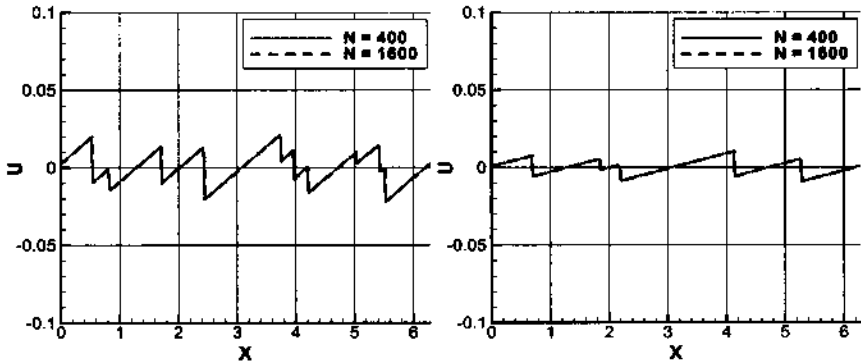


Рис. 2.11. Распределение скоростей на моменты времени 30 и 100

Видно, что решение представляет собой суперпозицию ударных волн (сильных разрывов) и волн разрежения. При распространении сильных разрывов происходит диссипация энергии, причем в пределе исчезающей вязкости скорость диссипации зависит только от интенсивности разрыва, и при высоком качестве разностных схем не зависит от густоты сетки. Из приведенных графиков также видно, что коротковолновые возмущения затухают быстрее, усиливая длинноволновые моды. Из этого наблюдения можно сделать вывод, что в одномерной однородной турбулентности существует каскад кинетической энергии, направленный в сторону длинных волн, т. е. в направлении, противоположном существующему в трехмерном случае.

Для количественного анализа точности полученных численных решений рассмотрим в качестве эталона решение, полученное методом «КАБАРЕ» на очень подробной сетке $N = 51200$ в контрольный момент времени $t = 30$. Исследуем сеточную сходимость решений каждого численного метода к выбранному эталонному решению. Для этого выберем следующую последовательность расчетных сеток, от самой грубой до средней: $N = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560$ и 5120 ячеек. Отклонение решений от эталона оценим в трех стандартных нормах, C , $L1$ и $L2$: $\|\varepsilon\|_C = \max(\varepsilon)$, $\|\varepsilon\|_{L_1} = \sum |\varepsilon_i| / N$, $\|\varepsilon\|_{L_2} = \sqrt{\sum (\varepsilon_i)^2 / N}$. Графики сходимости решений для каждой из предложенных схем в трех нормах представлены на рис. 2.12. Оценки численного порядка аппроксимации по пространству, полученные по наклону графика нормы $L2$, приведены в таблице 2.1.

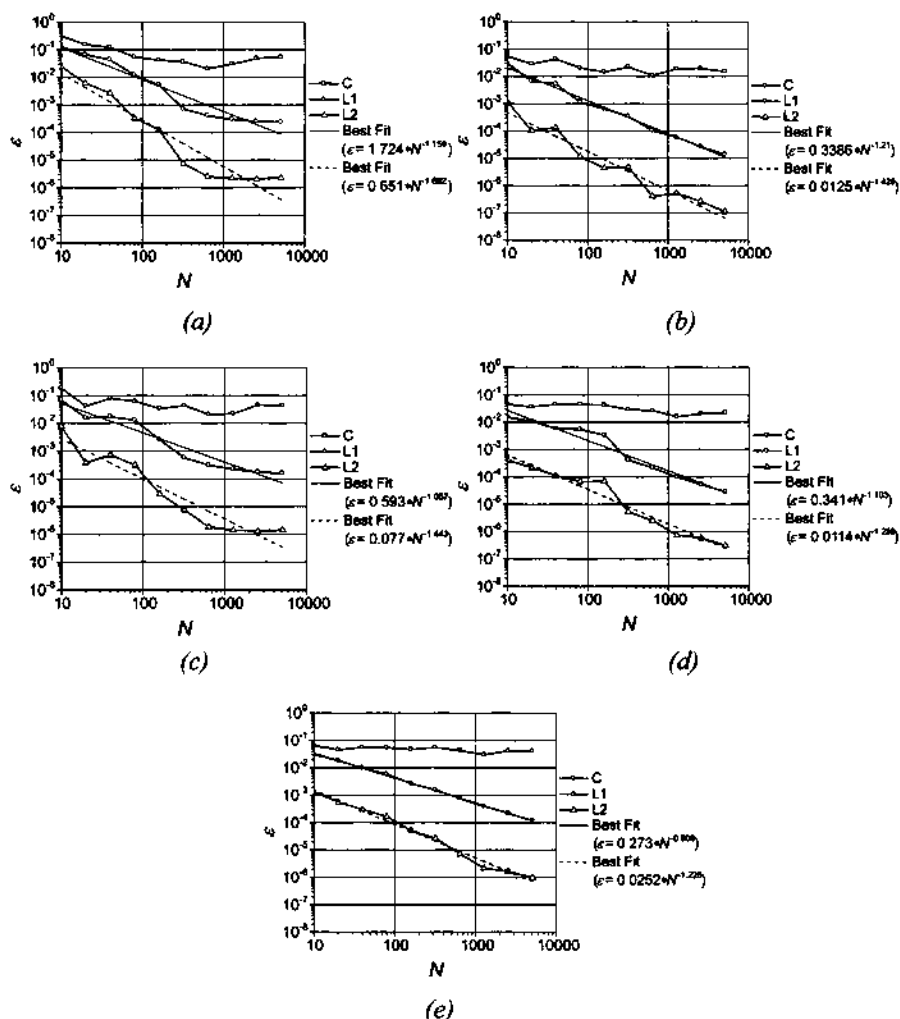


Рис. 2.12. Сеточная сходимость численных решений в нормах C, L1 и L2 для схем: (a) «Крест», (b) «КАБАРЕ», (c) Аракавы, (d) Лакса – Вендроффа, (e) Годунова

Таблица 2.1. Средние порядки аппроксимации, полученные по наклону графика нормы L2

Схема	«Крест»	Лакса – Вендроффа	Аракавы	Годунова	«КАБАРЕ»
Сходимость в норме L1	1,2	1,1	1,1	0,9	1,2
Сходимость в норме L2	1,7	1,3	1,4	1,2	1,4

Как видно, в норме L2 все схемы второго порядка показывают скорость сходимости около 1,5. В норме L1 схемы второго порядка имеют скорость сходимости чуть выше 1.

Схема «Крест» демонстрирует наивысшую скорость сходимости (1,7 в норме L_2), в то же время, схема «КАБАРЕ» показывает минимальную абсолютную ошибку во всех нормах на большинстве сеток. Схема Годунова сходится с самой низкой скоростью (около 1) из всех представленных схем в обеих интегральных нормах.

Результаты сходимости, таким образом, подтверждают, что найденные отклонения численных решений от эталона для всех представленных схем убывают в соответствии с их порядком аппроксимации. Это является подтверждением того, что выбранные схемы для численного решения уравнения Бюргера с бесконечно малой вязкостью описаны и запрограммированы корректно.

2.3. Спектры энергии для различных разностных схем

На следующей серии рисунков (2.13–2.15) представлены спектры энергии, рассчитанные методом «КАБАРЕ» на различных расчетных сетках: 50, 100, 200, 400, 800 и 1600 ячеек. Осреднение спектров производилось по ансамблю из 30 реализаций. Вязкость равна нулю. Моменты времени выбраны те же, что и на предыдущей серии рисунков (2.9–2.11).

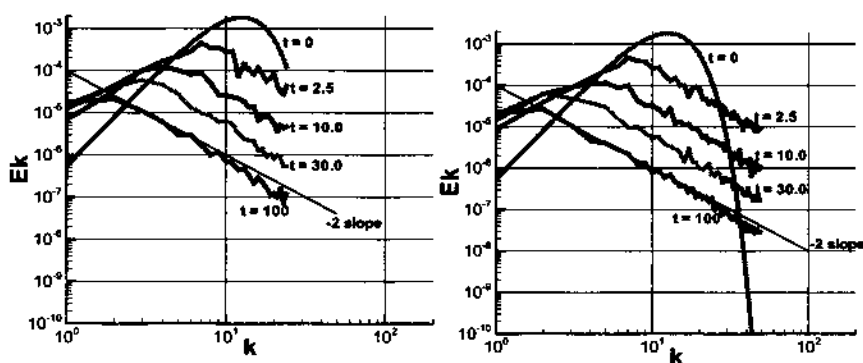


Рис. 2.13. Спектры энергии на сетке 50 (слева) и 100 (справа) ячеек

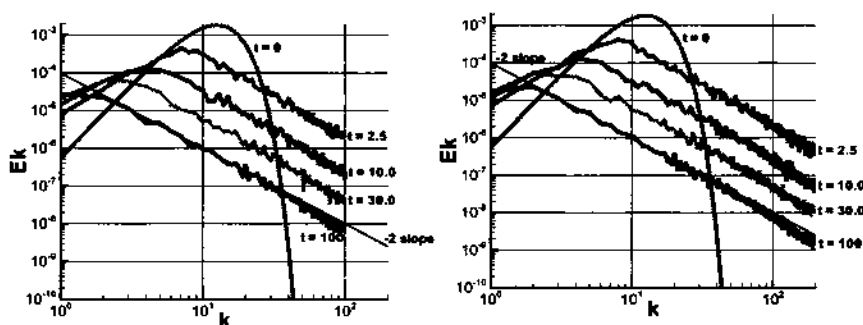


Рис. 2.14. Спектры энергии на сетке 200 (слева) и 400 (справа) ячеек

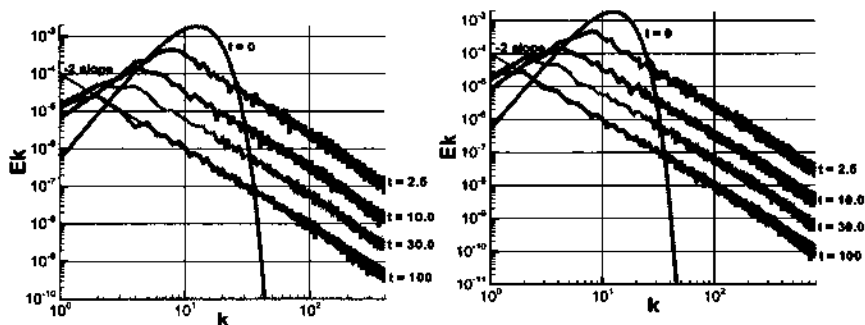


Рис. 2.15. Спектры энергии на сетке 800 (слева) и 1600 (справа) ячеек

Как видно, даже на грубых сетках спектры энергии удовлетворяют степенному закону с наклоном -2 . При измельчении сетки результаты становятся еще лучше, четко прослеживается сходимость по сетке. В области коротковолновых гармоник видна некоторая диссипация кинетической энергии, однако, как будет показано ниже, данная диссипация гораздо меньше, чем при расчетах по классическим разностным схемам.

Переток энергии по каскаду имеет одинаковую интенсивность как для средних, так и для коротких (в масштабах заданной расчетной сетки) длин волн, что говорит об аккуратном моделировании каскада даже на самых грубых сетках.

Классические схемы, в отличие от метода «КАБАРЕ», не могут обеспечить наклона -2 в высокочастотной области спектра. Коротковолновые гармоники решений, полученных по классическим алгоритмам, затухают заметно быстрее средних по причине наличия как аппроксимационной, так и искусственной вязкости даже на достаточно подробных сетках. На следующих рисунках (2.16–2.17) представлены спектральные характеристики пульсаций, полученных по классическим схемам на сетке 400 ячеек. Данные рисунки можно сравнить с результатами для схемы «КАБАРЕ» (рис. 2.13 справа).

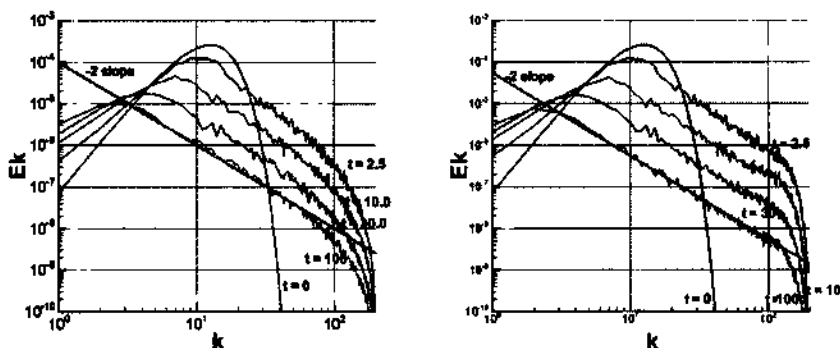


Рис. 2.16. Спектры энергии для схемы Годунова (слева) и схемы «Крест» (справа)

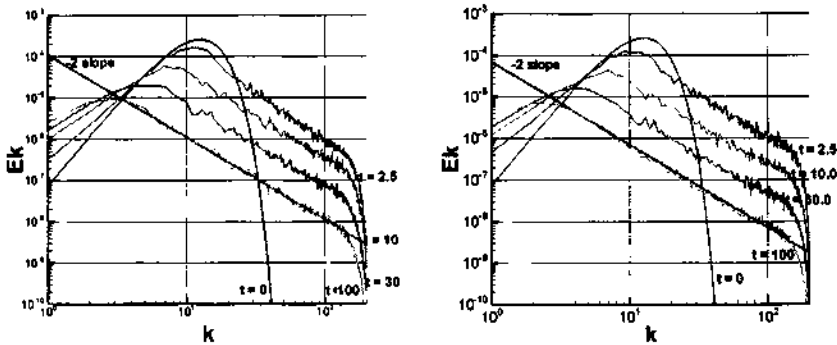


Рис. 2.17. Спектры энергии для схемы Аракавы (слева) и Лакса – Вендроффа (справа)

Характер поведения спектров в окрестности частоты Котельникова – Найквиста для классических схем свидетельствует об их излишней диссипативности. Видно, что представленные классические схемы не передают с достаточной точностью от 50 до 100 коротковолновых гармоник спектра (из 200). Такая же ситуация наблюдается и при измельчении сетки: до половины всех гармоник в высокочастотной области будут переданы с заметными искажениями, хотя сходимость по сетке, как и в схеме «КАБАРЕ», присутствует.

Для количественной оценки точности найденных спектральных характеристик примем за эталонное решение осредненный спектр, полученный методом DNS в момент времени $t = 30$. В качестве DNS-метода выберем схему «КАБАРЕ» на сетке 51200 ячеек. На рисунке 2.18 для сравнения представлен эталонный спектр и спектры, полученные по схемам «КАБАРЕ» и Аракавы на сетке $N = 200$.

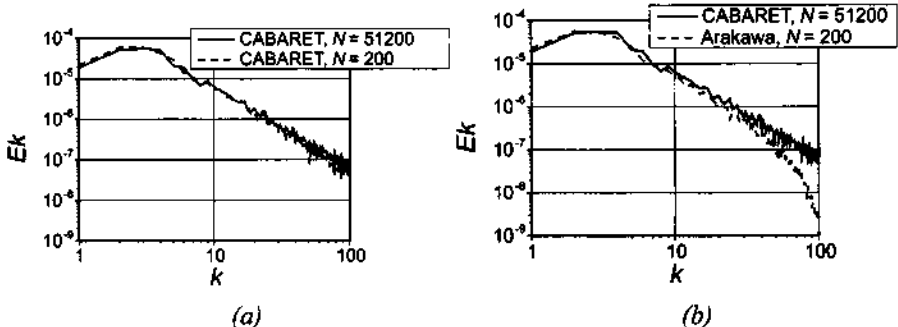


Рис. 2.18. Сравнение спектров кинетической энергии с эталонным DNS-решением для схем: (a) «КАБАРЕ» ($N = 200$), (b) Аракавы ($N = 200$)

Определим абсолютную интегральную ошибку спектра кинетической энергии, как это сделано в [6]:

$$\varepsilon(E_k) = \frac{1}{k_h - k_l + 1} \sum_{k=k_l}^{k=k_h} |E_k^{\text{reference}} - E_k|, \quad (2.28)$$

где k_l и k_h — нижняя и верхняя границы волновых чисел, в диапазоне которых производится сравнение. В данной работе k_l и $k_h = 0$, что для сетки $N = 100$ соответствует средне- и коротковолновому диапазону волновых чисел.

Помимо абсолютной ошибки, введем понятие относительной ошибки:

$$\varepsilon_r^{(E_k)} = \frac{1}{k_h - k_l + 1} \sum_{k=k_l}^{k=k_h} |E_k^{\text{reference}} - E_k| / E_k^{\text{reference}}, \quad (2.29)$$

которая более точно характеризует отклонение решения от эталона в коротковолновой части спектра, поскольку по абсолютной величине спектр для высоких частот на порядки ниже, чем для средних.

Результаты сравнения численных методов по абсолютным и относительным ошибкам на различных сетках представлены в таблицах 2.2 и 2.3 соответственно. Осреднение производилось по ансамблю из 30 и 100 реализаций. Для самой подробной сетки, $N = 1600$, сходимость всех схем сводится к одному значению, которое уменьшается при увеличении количества реализаций, взятых для осреднения. Схема «Крест» демонстрирует худшую точность. Схема «КАБАРЕ» имеет наименьшие спектральные ошибки для большинства расчетных сеток. Для достижения точности схемы «КАБАРЕ» другим схемам требуются более подробные сетки (в 2–4 раза).

Таблица 2.2. Абсолютные ($\varepsilon^{(E_k)}$) и относительные ($\varepsilon_r^{(E_k)}$) (в скобках) спектральные ошибки для ансамбля из 30 реализаций

Сетка, N	100	200	400	800	1600
«КАБАРЕ»	$2,76 \cdot 10^{-7}$ (0,26)	$2,13 \cdot 10^{-7}$ (0,18)	$1,74 \cdot 10^{-7}$ (0,17)	$1,66 \cdot 10^{-7}$ (0,18)	$1,68 \cdot 10^{-7}$ (0,18)
Годунова	$3,14 \cdot 10^{-7}$ (0,34)	$2,17 \cdot 10^{-7}$ (0,21)	$1,48 \cdot 10^{-7}$ (0,17)	$1,73 \cdot 10^{-7}$ (0,19)	$1,65 \cdot 10^{-7}$ (0,18)
Лакса – Вендроффа	$5,19 \cdot 10^{-7}$ (0,34)	$3,45 \cdot 10^{-7}$ (0,38)	$1,87 \cdot 10^{-7}$ (0,20)	$1,63 \cdot 10^{-7}$ (0,17)	$1,67 \cdot 10^{-7}$ (0,18)
«Крест»	$4,14 \cdot 10^{-7}$ (0,46)	$4,45 \cdot 10^{-7}$ (0,49)	$2,26 \cdot 10^{-7}$ (0,24)	$1,68 \cdot 10^{-7}$ (0,16)	$1,68 \cdot 10^{-7}$ (0,17)
Аракawy	$2,83 \cdot 10^{-7}$ (0,28)	$3,76 \cdot 10^{-7}$ (0,33)	$1,88 \cdot 10^{-7}$ (0,19)	$1,67 \cdot 10^{-7}$ (0,17)	$1,68 \cdot 10^{-7}$ (0,17)

Таблица 2.3. Абсолютные ($\varepsilon^{(E_k)}$) и относительные ($\varepsilon_r^{(E_k)}$) (в скобках) спектральные ошибки для ансамбля из 100 реализаций

Сетка, N	100	200	400	800	1600
«КАБАРЕ»	$2,45 \cdot 10^{-7}$ (0,27)	$1,58 \cdot 10^{-7}$ (0,14)	$1,37 \cdot 10^{-7}$ (0,10)	$1,45 \cdot 10^{-7}$ (0,11)	$1,05 \cdot 10^{-7}$ (0,11)
Годунова	$2,52 \cdot 10^{-7}$ (0,33)	$1,85 \cdot 10^{-7}$ (0,17)	$1,46 \cdot 10^{-7}$ (0,11)	$1,49 \cdot 10^{-7}$ (0,11)	$1,09 \cdot 10^{-7}$ (0,11)
Лакса – Вендроффа	$4,53 \cdot 10^{-7}$ (0,62)	$2,72 \cdot 10^{-7}$ (0,35)	$1,65 \cdot 10^{-7}$ (0,16)	$1,43 \cdot 10^{-7}$ (0,10)	$1,05 \cdot 10^{-7}$ (0,11)
«Крест»	$3,62 \cdot 10^{-7}$ (0,51)	$3,69 \cdot 10^{-7}$ (0,46)	$1,98 \cdot 10^{-7}$ (0,21)	$1,55 \cdot 10^{-7}$ (0,12)	$1,17 \cdot 10^{-7}$ (0,12)
Аракавы	$2,23 \cdot 10^{-7}$ (0,36)	$3,27 \cdot 10^{-7}$ (0,34)	$1,44 \cdot 10^{-7}$ (0,12)	$1,46 \cdot 10^{-7}$ (0,11)	$1,11 \cdot 10^{-7}$ (0,11)

2.4. Структурные функции

Рассмотрим две точки, отстоящие друг от друга на расстоянии l . В качестве характеристики интенсивности флуктуаций скорости на масштабе l выберем в общем случае разность проекций скорости в этих точках на направление, связывающее эти точки:

$$\delta u_i = u_i(\vec{r} + \vec{l}) - u_i(\vec{r}). \quad (2.30)$$

Введенная таким образом величина δu_i характеризует продольные флуктуации скорости. Статистические моменты данных флуктуаций

$$S_q(l) = \langle (\delta u_i)^q \rangle \quad (2.31)$$

называют структурными функциями.

В трехмерном случае однородной изотропной турбулентности структурные функции, согласно второй гипотезе Колмогорова [16], зависят только от масштаба длины l и скорости диссипации энергии ε : $S_q(l) = F(\varepsilon, l)$. Это, с привлечением соображения размерности, приводит к закону Колмогорова – Обухова [16]:

$$S_q(l) \sim (\varepsilon l)^{q/3}. \quad (2.32)$$

В одномерном случае роль скорости диссипации энергии $\mathcal{E}$ играет скорость диссипации максимальной вариации скорости η :

$$\eta = \frac{d}{dt} \left\{ \max_{x_1, x_2 \in [0, 2\pi]} (|u(x_1) - u(x_2)|) \right\}, \quad (2.33)$$

имеющая размерность $[м/сек^2]$. Соображения размерности приводят в этом случае к зависимости

$$S_q(l) \sim (\mathcal{E} l)^{q/2}. \quad (2.34)$$

В расчетах с применением схемы «КАБАРЕ» были построены структурные функции 2, 3, 4 и 6 порядков на сетке 100 узлов (рис. 2.19). Осреднение проводилось по 100 реализациям.

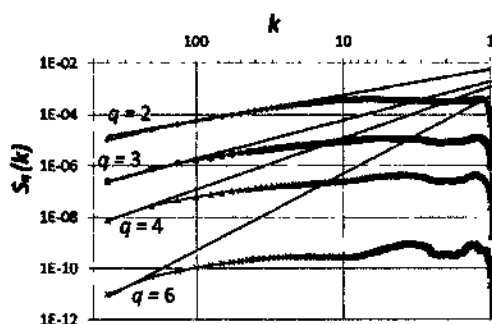


Рис. 2.19. Структурные функции для схемы «КАБАРЕ»

Результаты показывают, что до некоторого расстояния l расчетные показатели близки к теоретическим (прямые сплошные линии). Чем ниже порядок структурной функции, тем лучше он описывается формулой (2.34).

Аналогичные расчеты проведены для классических разностных схем (рис. 2.20–2.21).

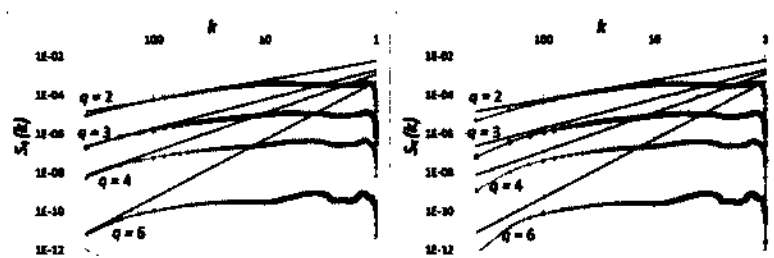


Рис. 2.20. Структурные функции для схемы Годунова (слева) и схемы «Крест» (справа)

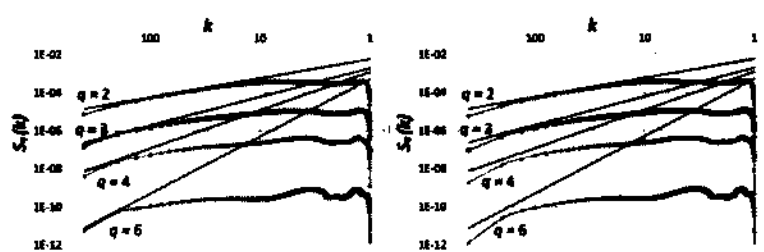


Рис. 2.21. Структурные функции для схемы Аракавы (слева) и схемы Лакса – Вендроффа (справа)

Для классических алгоритмов результаты практически одинаковы и также близки к теоретическим для $q \leq 4$. Тем не менее, видно, что полученные структурные функции для малых l хуже согласуются с аналитическими результатами, чем при расчете по схеме «КАБАРЕ».

Заключение к главе 2

Быстрое развитие суперкомпьютеров и рост вычислительных ресурсов ставят перед вычислителями задачу разработки новых высокоэффективных методов численного моделирования турбулентных потоков, встречающихся во многих важнейших практически значимых задачах. Этим объясняется повсеместный рост интереса к методу крупных вихрей (LES-алгоритмам) и, в частности, к одному из его вариантов — неявному методу LES – Implicit LES (ILES) [17].

При построении численных методов решения уравнения Бюргерса на первый план выходят проблемы оптимизации свойств разностных операторов, позволяющих правильно передавать энергетический каскад и согласованно уводить его на подсеточный уровень. Эта проблема во многом напоминает проблему улавливания положения разрывов в газовой динамике, где изначально ее пытались решить с помощью введения искусственной вязкости и в конце концов пришли к алгоритмам коррекции потоков. Нечто подобное происходит сейчас и в методах ILES – начали с вязкости Смагоринского и сейчас активно пытаются выработать альтернативные идеи управления диссипативными потоками.

Одна из таких идей реализована в схеме «КАБАРЕ», первоначально ориентированной на задачи газовой динамики. Ограничители потоков в этой схеме базируются на прямом действии принципа максимума, не требуют настроечных параметров и обеспечивают оптимальный во всех смыслах отвод энергетических потоков на подсеточные масштабы.

Расчеты затухания однородной и изотропной турбулентности в одномерном случае, выполненные в настоящей работе по различным алгоритмам, показали, что схема «КАБАРЕ» может быть допущена к следующему туру состязаний, которые будут разворачиваться на задачах моделирования слоев смешения и пристеночной турбулентности в двумерном и трехмерном случаях.

Литература к главе 2

1. Burgers J.M. The Nonlinear Diffusion Equation, Asymptotic Solutions and Statistical Problems. – D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A.
2. Gurbatov S.N., Simdyankin S.I., Aurell E.A., Frisch U., Toth G. On the decay of Burgers turbulence // Fluid Mech. – 1997. – Vol. 344. – 339–374.
3. Frisch U., Bec J. Burgulence. Les Houches 2000: New Trends in Turbulence. – M. Lesieur. – Ed. Springer EDP-Sciences.
4. Zikanov O., Thess A. Burgers equation // Phys. Fluids. – 9 (5). – 1997. – 1362–1367.
5. Love M.D. Subgrid modeling studies with Burgers equation // Fluid Mech. – 1980. – Vol. 100. – Part 1. – Pp. 87–110.
6. Aproxitola A., Denaro F.M. On the application of congruent upwind discretizations for large eddy simulations // Journal of Computational Physics. – 2004. – Vol. 194. – Pp. 329–343.
7. Bernard P.S., Wallace J.M. Turbulent Flow. Analysis, Measurement, and Prediction. – John Wiley & Sons, 2002.
8. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Мат. Моделирование. – 1998. – 10:1. – 86–100.
9. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы «КАБАРЕ» // Мат. Моделирование. – 1998. – 10:1. – 101–116.
10. Головизнин В.М., Карabasov С.А. Нелинейная коррекция схемы «КАБАРЕ». – 1998. – 10:12. – 107 – 123.
11. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact Accurately Boundary Adjusting High-Resolution Technique for Fluid Dynamics // Comp. Phys. – 228. – 2009. – 7426–7451.
12. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. New Efficient High-Resolution Method for Nonlinear Problems in Aeroacoustics // AIAA Journal. – 2007. – Vol. 45. – No 12. – Pp. 2861–2871.
13. Karabasov S.A., Berloff P.S., Goloviznin V.M. CABARET in the Ocean Gyres // Ocean Model. – 30. – 2009. – Pp. 155–168.
14. Phillips N.A. The atmosphere and the Sea in Motion. – Rockefeller Inst. Press. – New York. – 1959. – Pp. 501–504.

15. Сороковикова О.С. О нелинейной неустойчивости и преимуществах полностью консервативной аппроксимации конвективных потоков в задачах газовой динамики // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5. – № 10. – С. 106–113.
16. Колмогоров Ф.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. – Докл. АН СССР. – Т. 30. – № 4. – С. 299–303.
17. Margolin L.G., Rider W.J. The design and construction of implicit LES-models // Numer. Meth. Fluids. – 2005. – 47. – 1173–1179.

Схема «КАБАРЕ» для одномерных уравнений газовой динамики

3.1. Схема «КАБАРЕ» для одномерных уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных

Лагранжевые переменные обычно используются для описания течений с относительно небольшими локальными сдвиговыми деформациями и значительными изменениями в геометрических размерах расчетной области [1]. Классическим примером могут служить задачи математического моделирования физических процессов при лазерном термоядерном синтезе (ЛТС) [2].

Разностные схемы для уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных имеют богатую историю, которую можно проследить по отечественным и зарубежным монографиям [3–5]. Особое значение имеют здесь одномерные задачи с осевой и сферической симметрией. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на одномерные задачи газовой динамики в лагранжевых переменных приводит к новым алгоритмам, которые для задач с критической точностью можно отнести к алгоритмам нового поколения.

3.1.1. Базовый алгоритм

Уравнения газовой динамики, описывающие одномерные потоки в лагранжевых переменных представляют собой законы сохранения удельного объема, импульса и полной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial pu}{\partial m} = 0, \\ E &= \varepsilon + \frac{u^2}{2}, \quad p = (\gamma - 1) \cdot \frac{\varepsilon}{\eta}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь η – удельный объем, u – скорость, t – время, p – давление, m – массовая координата, ε – удельная внутренняя энергия, E – полная энергия.

Эти уравнения часто записываются в т. н. матричной форме:

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial m} = 0; \quad \vec{\varphi}^T = (\eta, u, p), \quad (3.2)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & c_m^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad c_m^2 = \left(p \cdot \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \right), \quad (3.3)$$

а величина c_m^2 представляет собой массовую скорость звука.

Приведем систему (3.2), (3.3) к характеристической форме [6]. Для этого вычислим собственные числа λ матрицы $\mathbf{A}$ и соответствующие им левые собственные векторы $\bar{l}_\lambda$. По определению

$$\bar{l}_\lambda^T \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot \bar{l}_\lambda^T \Rightarrow \|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}\| = 0, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Подставляя в (3.4) конкретный вид матрицы (3.3), находим три различных действительных собственных числа:

$$\lambda_1 = c_m; \quad \lambda_2 = -c_m; \quad \lambda_3 = 0. \quad (3.5)$$

Соответствующие левые собственные векторы будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}_{\lambda_1}^T &= (0, 1, c_m^{-1}); \\ \bar{l}_{\lambda_2}^T &= (0, 1, -c_m^{-1}); \\ \bar{l}_{\lambda_3}^T &= (c_m^2, 0, -1); \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c_m^{-1} \\ 0 & 1 & -c_m^{-1} \\ c_m^2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Умножая систему (3.2) на матрицу левых собственных чисел Ω , приходим к характеристическому представлению одномерных уравнений газовой динамики (3.1) в лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c_m} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + c_m \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial m} + \frac{1}{c_m} \cdot \frac{\partial p}{\partial m} \right) &= 0; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c_m} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) - c_m \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial m} - \frac{1}{c_m} \cdot \frac{\partial p}{\partial m} \right) &= 0; \\ \frac{\partial p}{\partial t} - c_m^2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Следует отметить, что последнее уравнение этой системы представляет собой тождество и может быть отброшено.

При дискретизации области решения задачи будем использовать как множество узлов ω , так и множество ячеек ω расчетной сетки. Введем два типа дискретных величин: консервативные, которые относятся к центрам ячеек и обозначаются за-

главными буквами с полуцелыми пространственными индексами $U_{i+1/2}^{n+1/2}, V_{i+1/2}^{n+1/2}, E_{i+1/2}^{n+1/2}, U_{i+1/2}^n, V_{i+1/2}^n, E_{i+1/2}^n$, и потоковые, обозначаемые строчными буквами с индексами u_i^n, p_i^n . Здесь $U_{i+1/2}^{n+1/2}$ – скорости, $V_{i+1/2}^{n+1/2}$ – удельные объемы, $E_{i+1/2}^{n+1/2}$ – полные энергии. u_i^n – потоковые скорости, p_i^n – потоковые давления.

Аппроксимируем консервативную форму представления дифференциальных уравнений (3.1) консервативной [1] разностной схемой:

$$\begin{aligned} \frac{V_{i+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{m,i+1/2}} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{m,i+1/2}} \right) &= 0; \\ \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h_{m,i+1/2}} + \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{h_{m,i+1/2}} \right) &= 0; \\ \frac{E_{i+1/2}^{n+1} - E_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{1}{2} \left[\frac{(pu)_{i+1}^n - (pu)_i^n}{h_{m,i+1/2}} + \frac{(pu)_{i+1}^{n+1} - (pu)_i^{n+1}}{h_{m,i+1/2}} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$E_{i+1/2}^n = \mathcal{E}_{i+1/2}^n + (U_{i+1/2}^n)^2 / 2.$$

Нетрудно увидеть, что разностная схема (3.8) обладает вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству на неравномерных расчетных сетках, однако, она пока не замкнута – не хватает уравнений для определения потоковых переменных на новом временном слое. Тем не менее, вопрос о задании начальных условий уже требует решения.

В начальный момент времени для системы (3.8) требуется задать согласованным образом как потоковые, так и консервативные величины. Хорошо в практическом плане зарекомендовала себя следующая процедура: вначале задаются консервативные переменные, представляющие собой средние величины по ячейкам, затем на границах ячеек решается задача о распаде разрыва (задача Римана), определяющая значения потоковых переменных. Следует подчеркнуть, что задача Римана решается только один раз для согласования консервативных и потоковых переменных в начальный момент. В последующих расчетах эта процедура не используется.

Для вычисления потоковых переменных на новом временном слое вычислим вначале консервативные переменные на половинном слое по времени, используя явную консервативную систему разностных уравнений первого порядка аппроксимации по времени:

$$\begin{aligned} \frac{V_{i+1/2}^{n+1/2} - V_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} - \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{m,i+1/2}} \right) &= 0; & \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \left(\frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h_{m,i+1/2}} \right) &= 0; \\ \frac{E_{i+1/2}^{n+1/2} - E_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \left[\frac{(pu)_{i+1}^n - (pu)_i^n}{h_{m,i+1/2}} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$E_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathcal{E}_{i+1/2}^{n+1/2} + (U_{i+1/2}^{n+1/2})^2 / 2.$$

Используем эти промежуточные консервативные величины и характеристическую форму записи исходных дифференциальных уравнений (3.7) для замыкания системы разностных уравнений (3.8).

Рассмотрим пространственно-временную ячейку $\Omega_{i+1/2}^{n+1/2}$ расчетной сетки с центром в точке $(i+1/2, n+1/2)$. Считая величину удельного объема в пределах данной ячейки постоянной и равной $V_{i+1/2}^{n+1/2}$, первые два уравнения системы (3.7) приведем к виду:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c_m \cdot \frac{\partial r}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} - c_m \cdot \frac{\partial q}{\partial m} = 0, \quad (t, m) \in \Omega_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad (3.10)$$

где величины

$$r = u + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{p}, \quad q = u - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{p}, \quad G_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{2}{\sqrt{(\gamma/V_{i+1/2}^{n+1/2})}} \quad (3.11)$$

представляют собой локальные инварианты Римана, определенные только в пределах данной ячейки. Будем, в дальнейшем, называть их также «квазиинвариантами». Квазиинварианты (3.11) будем называть «изохорическими». Нетрудно увидеть, что уравнения (3.10) в пределах ячейки $\Omega_{i+1/2}^{n+1/2}$ аппроксимируют первые два уравнения системы (3.7) со вторым порядком точности.

Следует отметить, что квазиинварианты можно определить и другим способом. Можно, например, считать, что в пределах каждой пространственно-временной ячейки будет оставаться постоянным значение энтропии $S_{i+1/2}^{n+1/2}$, вычисленной по параметрам консервативных термодинамических переменных на промежуточном временном слое:

$$S_{i+1/2}^{n+1/2} = \ln(p \cdot \eta^r)_{i+1/2}^{n+1/2}. \quad (3.12)$$

В этом случае вместо «изохорических» локальных инвариантов (3.11) мы получим «изоэнтропические»:

$$r = u + \tilde{G}_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p^\mu, \quad q = u - \tilde{G}_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p^\mu, \quad \mu = \frac{\gamma-1}{2 \cdot \gamma};$$

$$\tilde{G}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{2 \cdot \gamma}{(\gamma-1) \sqrt{\gamma}} \left[\exp S_{i+1/2}^{n+1/2} \right]^{\frac{1}{2\gamma}}. \quad (3.13)$$

Из опыта расчетов можно сделать вывод о предпочтительности «изоэнтропических» квазиинвариантов над «изохорическими». Тем не менее, в первой части этой главы мы будем использовать последние, подразумевая, что переход к другим локальным инвариантам не вызовет у читателя каких-либо затруднений.

По известным значениям консервативных и потоковых переменных в ячейке $\Omega_{i+1/2}^{n+1/2}$ вычислим значения квазиинвариантов на временных слоях n и $n+1/2$:

$$\begin{aligned} r_{i+1}^n &= u_{i+1}^n + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{p_{i+1}^n}, & q_{i+1}^n &= u_{i+1}^n - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{p_{i+1}^n}, \\ r_i^n &= u_i^n + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{p_i^n}, & q_i^n &= u_i^n - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{p_i^n}, \\ R_{i+1/2}^{n+1/2} &= U_{i+1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{P_{i+1/2}^{n+1/2}}, & Q_{i+1/2}^{n+1/2} &= U_{i+1/2}^{n+1/2} - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{P_{i+1/2}^{n+1/2}}, \\ P_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\gamma - 1) \cdot \mathcal{E}_{i+1/2}^{n+1/2} / V_{i+1/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Новые значения квазиинвариантов на $n+1$ временном слое определим методом линейной экстраполяции с учетом направлений соответствующих характеристик, как это делается в схеме «КАБАРЕ»:

$$r_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot R_{i+1/2}^{n+1/2} - r_i^n, \quad q_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} - q_i^n. \quad (3.15)$$

Нетрудно видеть, что такая процедура обеспечивает второй порядок аппроксимации.

По вычисленным значениям (r_i^{n+1}, q_i^{n+1}) однозначно определяются новые значения потоковых переменных:

$$p_i^{n+1} = \left[\frac{r_i^{n+1} - q_i^{n+1}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}} \right]^2, \quad u_i^{n+1} = \left[\frac{G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot r_i^{n+1} + G_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot q_i^{n+1}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}} \right]. \quad (3.16)$$

Уравнения (3.8), (3.9), (3.15), (3.16) образуют замкнутую систему разностных уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных.

3.1.2. Нелинейная коррекция потоков

Полученная система разностных уравнений обладает вторым порядком аппроксимации на гладких решениях и приводит к осцилляциям в окрестностях больших градиентов. Для придания ее решениям свойства монотонности введем процедуру нелинейной коррекции потоков. Будем считать значения квазиинвариантов Римана, вычисленные в соответствии с (3.15), предварительными и обозначать их как $\tilde{r}_{i+1}^{n+1}, \tilde{q}_{i+1}^{n+1}$. Их окончательные значения определим из достаточных условий соблюдения принципа максимума для решений характеристических уравнений (3.10):

$$r_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{r}_{i+1}^{n+1}, & \text{if } \min(r_i^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_{i+1}^n) \leq \tilde{r}_{i+1}^{n+1} \leq \max(r_i^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_{i+1}^n), \\ \min(r_i^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_{i+1}^n), & \text{if } \tilde{r}_{i+1}^{n+1} < \min(r_i^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_{i+1}^n), \\ \max(r_i^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_{i+1}^n), & \text{if } \tilde{r}_{i+1}^{n+1} > \max(r_i^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_{i+1}^n), \end{cases} \quad (3.17)$$

$$q_i^{n+1} = \begin{cases} \tilde{q}_i^{n+1}, & \text{if } \min(q_i^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_{i+1}^n) \leq \tilde{q}_i^{n+1} \leq \max(q_i^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_{i+1}^n), \\ \min(q_i^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_{i+1}^n), & \text{if } \tilde{q}_i^{n+1} < \min(q_i^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_{i+1}^n), \\ \max(q_i^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_{i+1}^n), & \text{if } \tilde{q}_i^{n+1} > \max(q_i^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_{i+1}^n). \end{cases} \quad (3.18)$$

Очевидно, что данная процедура не приводит к нарушению консервативности схемы, поскольку корректируются только потоковые переменные.

3.1.3. Управляемая схемная диссипация

Описанная выше схема «КАБАРЕ» с коррекцией (3.17), (3.18), если не считать некоторого произвола в выборе локальных римановских инвариантов, не содержит ни одного настраиваемого параметра. Это не всегда удобно, поскольку иногда возникает необходимость в усилении диссипативных свойств, заложенных в описанной выше процедуре нелинейной коррекции. Дополнительную схемную вязкость может обеспечить т. н. «диссипатор Паниковского», встраиваемый в (3.15). С диссипатором Паниковского эти соотношения примут вид:

$$r_{i+1}^{n+1} = \frac{2 \cdot R_{i+1/2}^{n+1/2} - (1-\sigma) \cdot r_i^n}{(1+\sigma)}, \quad q_i^{n+1} = \frac{2 \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} - (1-\sigma) \cdot q_{i+1}^n}{(1+\sigma)}. \quad (3.19)$$

При $\sigma = 0$ добавочная диссипация отсутствует. По мере увеличения σ она возрастает, и при $\sigma = 1$ диссипативные свойства балансно-характеристической схемы оказываются такими же, как у схемы Годунова. Величину параметра σ можно сделать переменной, отключая дополнительную вязкость на волнах разрежения. Включение диссипатора Паниковского не приводит к сужению области устойчивости.

Случай цилиндрической и сферической геометрии

При осевой и центральной симметрии систему законов сохранения массы, импульса и полной энергии запишем как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial m} (x^{l-1} \cdot u) &= 0; & \frac{\partial u}{\partial t} + x^{l-1} \cdot \frac{\partial p}{\partial m} &= 0; \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial m} (x^{l-1} \cdot p u) &= 0; & \frac{\partial x}{\partial t} &= u; \\ E &= \varepsilon + \frac{u^2}{2}, \quad p = (\gamma - 1) \cdot \frac{\varepsilon}{\eta}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Параметру $l=3$ отвечает сферическая, $l=2$ – цилиндрическая и $l=1$ – плоская симметрия. Следует отметить, что при $l > 1$ появляется еще одно уравнение, описывающее кинематику координат лагранжевых частиц. Это требует дополнительного начального условия: $x(m, t_0) = x_0(m)$. При этом функция $x_0(m)$ должна удовлетворять условию согласования:

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial x_0^l}{\partial m} = \eta(m, t_0).$$

Матричная форма этих уравнений выглядит как:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial m} = \bar{f}; \quad \bar{\Phi}^T = (\eta, u, p, x); \quad \bar{f}^T = \left(\frac{u \cdot (l-1) \cdot \eta}{x^{l-1}}, 0, \frac{c_m^2 \cdot u \cdot (l-1) \cdot \eta}{x^{l-1}}, u \right), \quad (3.21)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -x^{l-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{l-1} & 0 \\ 0 & c_m^2 \cdot x^{l-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ имеют вид:

$$\lambda_1 = x^{l-1} \cdot c_m; \quad \lambda_2 = -x^{l-1} \cdot c_m; \quad \lambda_3 = 0; \quad \lambda_4 = 0. \quad (3.23)$$

Левые собственные векторы выглядят так же, как (3.6). Умножая (3.21) на матрицу левых собственных чисел Ω , приходим к характеристическому представлению одномерных уравнений газовой динамики (3.1) в лагранжевых переменных для случаев сферической и осевой симметрии:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c_m} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + c_m \cdot x^{l-1} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial m} + \frac{1}{c_m} \cdot \frac{\partial p}{\partial m} \right) &= g_1; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c_m} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) - c_m \cdot x^{l-1} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial m} - \frac{1}{c_m} \cdot \frac{\partial p}{\partial m} \right) &= g_2; \\ \frac{\partial p}{\partial t} - c_m^2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= u, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$g_1 = \frac{c_m \cdot u \cdot (l-1) \cdot \eta}{x^{l-1}}; \quad g_2 = -\frac{c_m \cdot u \cdot (l-1) \cdot \eta}{x^{l-1}}.$$

Консервативная разностная схема (3.8) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\frac{V_{i+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{X_{i+1}^n \cdot u_{i+1}^n - X_i^n \cdot u_i^n}{h_{m,i+1/2}} + \frac{X_{i+1}^{n+1} \cdot u_{i+1}^{n+1} - X_i^{n+1} \cdot u_i^{n+1}}{h_{m,i+1/2}} \right) &= 0; \\
\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{X_{i+1}^n + X_i^n}{2} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h_{m,i+1/2}} + \frac{X_{i+1}^{n+1} + X_i^{n+1}}{2} \cdot \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{h_{m,i+1/2}} \right) &= 0; \\
\frac{E_{i+1/2}^{n+1} - E_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{1}{2} \left[\frac{(X \cdot pu)_{i+1}^n - (X \cdot pu)_i^n}{h_{m,i+1/2}} + \frac{(X \cdot pu)_{i+1}^{n+1} - (X \cdot pu)_i^{n+1}}{h_{m,i+1/2}} \right] &= 0,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

где $X_i^n = (x^{i-1})_i^n$.

Для замыкания системы уравнений (3.25) вычислим вначале промежуточные значения консервативных переменных:

$$\begin{aligned}
\frac{V_{i+1/2}^{n+1/2} - V_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} - \left(\frac{X_{i+1}^n \cdot u_{i+1}^n - X_i^n \cdot u_i^n}{h_{m,i+1/2}} \right) &= 0; \\
\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \left(\frac{X_{i+1}^n + X_i^n}{2} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h_{m,i+1/2}} \right) &= 0; \\
\frac{E_{i+1/2}^{n+1/2} - E_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \left[\frac{(X \cdot pu)_{i+1}^n - (X \cdot pu)_i^n}{h_{m,i+1/2}} \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Для «изохорических» локальных инвариантов в каждой ячейке можно записать неоднородные уравнения переноса:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c_m \cdot x^{i-1} \cdot \frac{\partial r}{\partial m} = g_1; \quad \frac{\partial q}{\partial t} - c_m \cdot x^{i-1} \cdot \frac{\partial q}{\partial m} = g_2, \tag{3.27}$$

где r и q определены согласно (3.11).

Знание промежуточных консервативных переменных дает возможность вычислить новые значения локальных инвариантов в соответствии с (3.14) и (3.15). Неоднородность уравнений (3.24), обусловленная геометрическим фактором, учитывается в алгоритме нелинейной коррекции значений инвариантов на новом временном слое следующим образом: для инварианта r

$$r_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{r}_{i+1}^{n+1}, & \text{if } \min(r)_{i+1/2}^{n+1/2} \leq \tilde{r}_{i+1}^{n+1} \leq \max(r)_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ \min(r)_{i+1/2}^{n+1/2}, & \text{if } \tilde{r}_{i+1}^{n+1} < \min(r)_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ \max(r)_{i+1/2}^{n+1/2}, & \text{if } \tilde{r}_{i+1}^{n+1} > \max(r)_{i+1/2}^{n+1/2}, \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}\min(r)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \min(r_i^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_{i+1}^n) + \tau_{n+1/2} \cdot \langle g_1 \rangle_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ \max(r)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \max(r_i^n, R_{i+1/2}^{n+1/2}, r_{i+1}^n) + \tau_{n+1/2} \cdot \langle g_1 \rangle_{i+1/2}^{n+1/2}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

И для инварианта q

$$q_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{q}_{i+1}^{n+1}, & \text{if } \min(q)_{i+1/2}^{n+1/2} \leq \tilde{q}_{i+1}^{n+1} \leq \max(q)_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ \min(q)_{i+1/2}^{n+1/2}, & \text{if } \tilde{q}_{i+1}^{n+1} < \min(q)_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ \max(q)_{i+1/2}^{n+1/2}, & \text{if } \tilde{q}_{i+1}^{n+1} > \max(q)_{i+1/2}^{n+1/2}, \end{cases}\quad (3.30)$$

где

$$\begin{aligned}\min(q)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \min(q_i^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_{i+1}^n) + \tau_{n+1/2} \cdot \langle g_2 \rangle_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ \max(q)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \max(q_i^n, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, q_{i+1}^n) + \tau_{n+1/2} \cdot \langle g_2 \rangle_{i+1/2}^{n+1/2}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

В выражения (3.29) и (3.31) входят величины в угловых скобках, для определения которых следует воспользоваться аппроксимацией неоднородных уравнений переноса (3.27).

$$\begin{aligned}\frac{R_{i+1/2}^{n+1/2} - R_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (c_m)_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{X_{i+1}^n + X_i^n}{2} \cdot \frac{r_{i+1}^n - r_i^n}{h_{m,i+1/2}} &= \langle g_1 \rangle_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ \frac{Q_{i+1/2}^{n+1/2} - Q_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (c_m)_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{X_{i+1}^n + X_i^n}{2} \cdot \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h_{m,i+1/2}} &= \langle g_2 \rangle_{i+1/2}^{n+1/2}.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Действительно, все величины, входящие в левые части этих разностных соотношений нам известны, и это дает возможность с первым порядком точности определить неизвестные правые части.

Для нахождения новых значений координат узлов расчетной сетки x_i^{n+1} , согласованных с разностным уравнением сохранения удельного объема, заметим, что величины $h_{m,i+1/2}$ представляют собой массу, заключенную внутри каждой расчетной ячейки. Из этого следует, что

$$h_{m,i+1/2} \cdot V_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{l} \left[(x_{i+1}^{n+1})^l - (x_i^{n+1})^l \right].\quad (3.33)$$

Учитывая это соотношение, из первого уравнения системы (3.25) приходим к нетривиальной аппроксимации кинематического соотношения $\frac{\partial x}{\partial t} = u$:

$$\frac{1}{l} \left[(x_{i+1}^{n+1})^l - (x_i^{n+1})^l \right] - \tau_{n+1/2} \cdot \frac{(x_{i+1}^{n+1})^{l-1} \cdot u_{i+1}^{n+1} + (x_i^{n+1})^{l-1} \cdot u_i^n}{2} = 0.\quad (3.34)$$

В осесимметричном случае ($l=2$) это уравнение решается в квадратурах, при сферической симметрии задачи ($l=3$) для решения уравнения (3.34) можно использовать метод Ньютона.

3.1.4. Сильная ударная волна в лагранжевых переменных

Для иллюстрации вычислительных особенностей схемы «КАБАРЕ» в лагранжевых переменных приведем примеры расчетов сильной ударной волны с параметрами $\rho_R=1$, $u_R=0$, $p_R=1$, $\eta_L=1/\rho_L=0,250001$, $\gamma=5/3$ при различных числах Куранта

Давление, CFL=0.5, NT=70

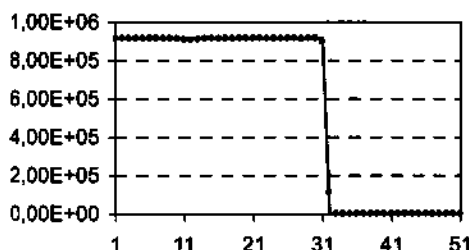


Рис. 3.1. График давления в сильной ударной волне при числе Куранта CFL = 0,5

Плотность, CFL=0.5, NT=70

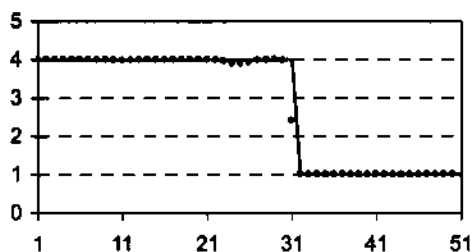


Рис. 3.2. График плотности в сильной ударной волне при числе Куранта CFL = 0,5

Скорость, CFL=0.5, NT=70

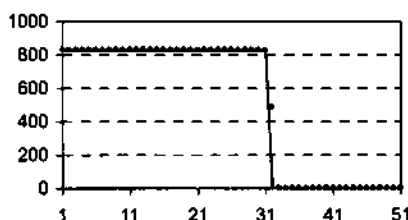


Рис. 3.3. График скорости в сильной ударной волне при числе Куранта CFL = 0,5

Полная энергия, CFL=0.5, NT=70

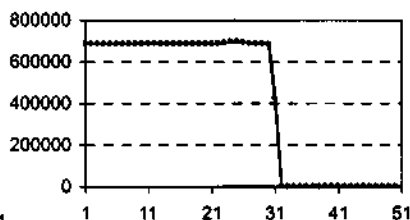


Рис. 3.4. График полной энергии в сильной ударной волне при числе Куранта CFL = 0,5

Известно, что схема «КАБАРЕ» для простейшего уравнения переноса имеет особенности в дисперсионной поверхности при малых числах Куранта – Фридрихса – Леви. В первой главе было показано, что процедура нелинейной коррекции на основе принципа максимума устраняет эту особенность. На рисунках 3.5–3.8 приведены аналогичные графики, полученные на тот же момент времени в расчете с числом Куранта – Фридрихса – Леви в сто раз меньшем.

Давление, CFL=0.005, NT=7000

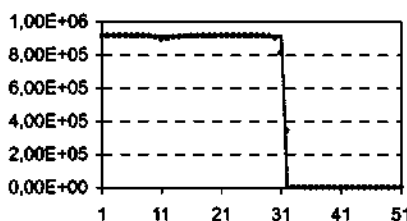


Рис. 3.5. График давления в сильной ударной волне при числе Куранта CFL = 0,005

Плотность, CFL=0.005, NT=7000

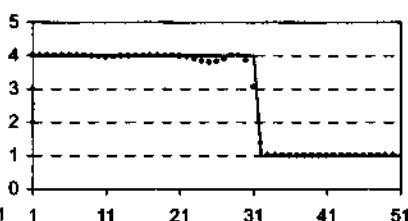


Рис. 3.6. График полной плотности в сильной ударной волне при числе Куранта CFL = 0,005

Скорость, CFL=0.005, NT=7000

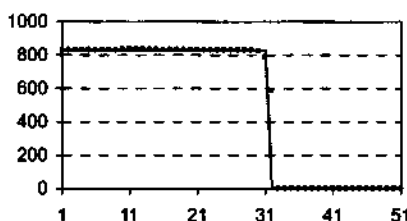


Рис. 3.7. График скорости в сильной ударной волне при числе Куранта CFL = 0,005

Полная энергия, CFL=0.005, NT=7000

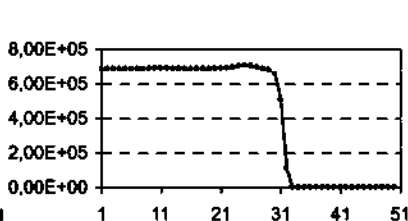


Рис. 3.8. График полной энергии в сильной ударной волне при числе Куранта CFL = 0,005

Из сравнения приведенных графиков при различных числах CFL можно сделать вывод о несущественном влиянии стократного уменьшения шага по времени на качество расчетов.

3.1.5. Сильная волна разрежения в лагранжевых переменных

Результаты расчетов сильной волны разрежения, соответствующие параметрам $\rho_R=1$, $u_R=0$, $p_R=1$, $u_L=-2 \cdot c_R = -2 \cdot \sqrt{\gamma}$, представлены на рисунках 3.9–3.12.

Давление, CFL=0.5, NT=60

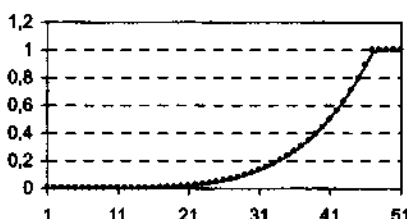


Рис. 3.9. График давления в сильной волне разрежения при числе Куранта CFL = 0,5

Плотность, CFL=0.5, NT=60

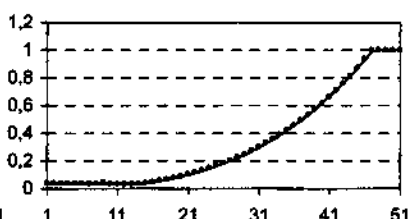


Рис. 3.10. График плотности в сильной волне разрежения при числе Куранта CFL = 0,5

Скорость, CFL=0.5, NT=60

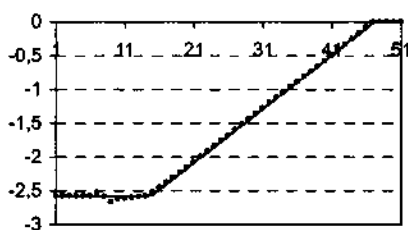


Рис. 3.11. График скорости в сильной волне разрежения при числе Куранта CFL = 0,5

Полная энергия, CFL=0.5, NT=60

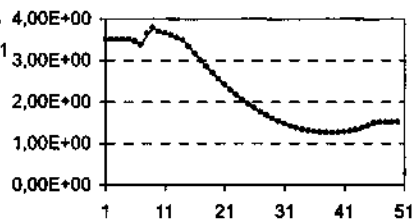


Рис. 3.12. График полной энергии в сильной волне разрежения при числе Куранта CFL = 0,5

В скорости и полной энергии наблюдается существование «энтропийных следов».

3.1.6. Модельные задачи

Теоретически, на гладких решениях, описанная выше схема «КАБАРЕ» формально имеет второй порядок точности. Включение процедуры нелинейной коррекции уменьшает этот порядок в окрестности «точек включения» до первого. Ниже приведены результаты эмпирического исследования точности на последовательности сгущающихся сеток на двух модельных задачах. Первая модельная задача формулируется для плоского случая, вторая – для сферического.

Нестационарная ударная волна, формируемая треугольным импульсом граничного давления

Левое полупространство, заполненное покоящимся газом с параметрами: $\rho_{нач} = 1,0$, $e_{нач} = 2,5$, $u_{нач} = 0$ и уравнением состояния $p = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot e$, $\gamma = 1,4$, подвергается воздействию импульса давления, приложенного к правой лагранжевой границе. Прикладываемое давление зависит от времени как:

$$P_0(t) = \begin{cases} 1,0, & t < 0; \\ 1 + \Delta P \cdot (1 - t/t_1), & 0 < t < t_1; \\ 1,0, & t < t_1, \end{cases}$$

где $t_1 = 1$, $\Delta P = 10, 0, 0,1, 0,001$ (три варианта). Расчеты проводились до момента времени $t_{кон} = 100$. Требовалось определить практическую точность описания давления на фронте ударной волны и длины (или ширины) т. н. «положительной фазы». Под «длиной положительной фазы» понимается размер пространственной области, прилегающей к ударной волне, в которой давление положительно. Эта величина в дальнейшем будет обозначаться как DLPPAZ.

За время $t_{кон} - t_0$ звуковое возмущение от правой границы проходит расстояние $d = 118,3216$. Задача решалась в области с начальными размерами ($0 \leq x \leq 200$). Вид решения при $\Delta P = 10$ представлен на рисунках 3.13, 3.14.

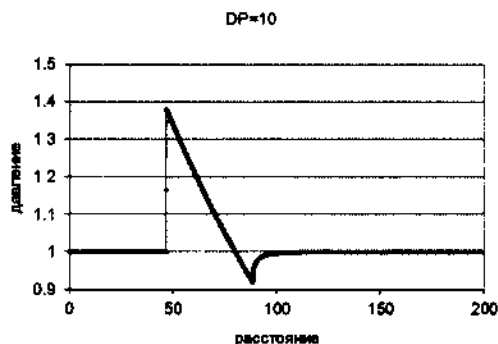


Рис. 3.13. Мгновенный профиль давления в импульсе на момент времени $t = 100$ на расчетной сетке с числом ячеек $N = 40000$

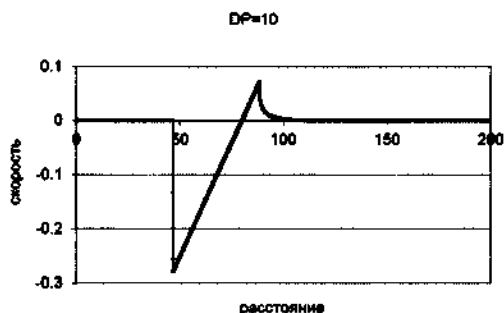


Рис. 3.14. Мгновенный профиль скорости в импульсе на момент времени $t = 100$ на расчетной сетке с числом ячеек $N = 40000$

Результаты расчетов сведены в таблицы, где использованы следующие обозначения:

N – полное число расчетных узлов;

h – начальный пространственный шаг расчетной сетки;

CFL – число Куранта;

$DP = \Delta P$ – максимальная амплитуда граничного импульса давления;

$PMAX$ – максимальное давление в расчетной области на момент $t_{кон}$;

$PMIN$ – минимальное давление в расчетной области на момент $t_{кон}$;

DE – приращение внутренней энергии газа на момент $t_{кон}$;

$DEKIN$ – приращение кинетической энергии газа на момент $t_{кон}$.

В таблице 3.1 приведены данные по самому сильному импульсу с $\Delta P = 10$, где наиболее сильно проявляются нелинейные эффекты.

Таблица 3.1. Результаты эмпирического исследования точности алгоритма на последовательности сгущающихся сеток при $\Delta P = 10$

N	h	CFL	DP	P _{MAX}	DLPFAZ	P _{MIN}	DE	DEKIN
201	1,00	0,5	10	1,373E+00	3,512E+01	9,397E-01	1,274E+01	5,809E-01
301	0,67	0,5	10	1,376E+00	3,466E+01	9,336E-01	1,224E+01	5,593E-01
401	0,50	0,5	10	1,375E+00	3,446E+01	9,322E-01	1,197E+01	5,470E-01
501	0,40	0,5	10	1,376E+00	3,357E+01	9,314E-01	1,180E+01	5,403E-01
601	0,33	0,5	10	1,375E+00	3,361E+01	9,293E-01	1,170E+01	5,357E-01
701	0,29	0,5	10	1,376E+00	3,367E+01	9,281E-01	1,162E+01	5,331E-01
801	0,26	0,5	10	1,376E+00	3,344E+01	9,279E-01	1,157E+01	5,312E-01
901	0,22	0,5	10	1,377E+00	3,329E+01	9,275E-01	1,153E+01	5,295E-01
1001	0,20	0,5	10	1,376E+00	3,333E+01	9,271E-01	1,149E+01	5,283E-01
2001	0,10	0,5	10	1,378E+00	3,321E+01	9,238E-01	1,134E+01	5,230E-01
3001	0,07	0,5	10	1,379E+00	3,317E+01	9,228E-01	1,130E+01	5,216E-01
4001	0,05	0,5	10	1,379E+00	3,310E+01	9,219E-01	1,127E+01	5,209E-01
5001	0,04	0,5	10	1,379E+00	3,307E+01	9,220E-01	1,126E+01	5,205E-01
6001	0,03	0,5	10	1,379E+00	3,307E+01	9,216E-01	1,125E+01	5,202E-01
7001	0,03	0,5	10	1,379E+00	3,307E+01	9,208E-01	1,125E+01	5,201E-01
8001	0,03	0,5	10	1,379E+00	3,305E+01	9,208E-01	1,124E+01	5,199E-01
9001	0,02	0,5	10	1,379E+00	3,306E+01	9,204E-01	1,124E+01	5,198E-01
10001	0,02	0,5	10	1,380E+00	3,306E+01	9,207E-01	1,124E+01	5,198E-01
11001	0,02	0,5	10	1,380E+00	3,306E+01	9,201E-01	1,123E+01	5,197E-01
12001	0,02	0,5	10	1,380E+00	3,305E+01	9,200E-01	1,123E+01	5,196E-01
13001	0,02	0,5	10	1,380E+00	3,305E+01	9,197E-01	1,123E+01	5,196E-01
14001	0,01	0,5	10	1,380E+00	3,304E+01	9,195E-01	1,123E+01	5,195E-01
15001	0,01	0,5	10	1,379E+00	3,305E+01	9,195E-01	1,123E+01	5,195E-01
20001	0,01	0,5	10	1,380E+00	3,305E+01	9,192E-01	1,122E+01	5,193E-01
40001	0,01	0,5	10	1,380E+00	3,304E+01	9,183E-01	1,122E+01	5,191E-01

Данные таблицы 3.1 проиллюстрированы на двух следующих графиках:

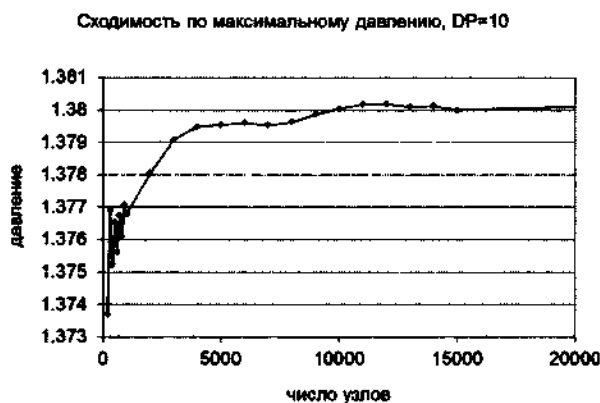


Рис. 3.15. Зависимость максимального давления в импульсе на момент времени $t = 100$ от густоты расчетной сетки при $\Delta P = 10$

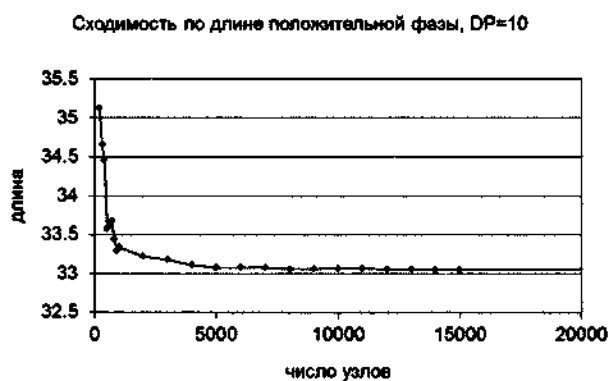


Рис. 3.16. Зависимость «длины положительной фазы» в импульсе на момент времени $t = 100$ от густоты расчетной сетки при $\Delta P = 10$

Из этих графиков видно, что практическая сходимость наблюдается уже при $h = 0,1$. В таблицу 3.2 сведены результаты расчетов при $DP = 0,1$.

Таблица 3.2. Результаты эмпирического исследования точности алгоритма на последовательности сгущающихся сеток при $\Delta P = 0,1$

N	h	CFL	DP	PMAX	DLPFAZ	PMIN	DE	DEKIN
201	1,00	0,5	0,1	1,028E+00	1,744E+01	9,999E-01	6,034E-02	6,396E-04
401	0,50	0,5	0,1	1,031E+00	8,953E+00	9,999E-01	5,243E-02	5,497E-04
601	0,33	0,5	0,1	1,031E+00	7,454E+00	9,999E-01	4,929E-02	5,093E-04
801	0,25	0,5	0,1	1,032E+00	6,079E+00	9,999E-01	4,797E-02	4,965E-04
1001	0,20	0,5	0,1	1,032E+00	5,254E+00	9,999E-01	4,706E-02	4,866E-04
2001	0,10	0,5	0,1	1,032E+00	4,209E+00	9,999E-01	4,531E-02	4,688E-04
3001	0,07	0,5	0,1	1,032E+00	5,058E+00	9,999E-01	4,474E-02	4,636E-04
4001	0,05	0,5	0,1	1,032E+00	4,333E+00	9,999E-01	4,445E-02	4,608E-04
5001	0,04	0,5	0,1	1,032E+00	3,978E+00	9,999E-01	4,428E-02	4,591E-04
6001	0,03	0,5	0,1	1,032E+00	3,874E+00	9,999E-01	4,416E-02	4,581E-04
7001	0,03	0,5	0,1	1,032E+00	4,229E+00	9,999E-01	4,408E-02	4,573E-04
8001	0,03	0,5	0,1	1,032E+00	3,995E+00	9,999E-01	4,402E-02	4,567E-04
9001	0,02	0,5	0,1	1,032E+00	3,835E+00	9,999E-01	4,397E-02	4,562E-04
10001	0,02	0,5	0,1	1,032E+00	3,808E+00	9,999E-01	4,393E-02	4,559E-04

Данные таблицы 3.2 представлены на рисунках 3.17–3.18

Сходимость по максимальному давлению, DP=0,1

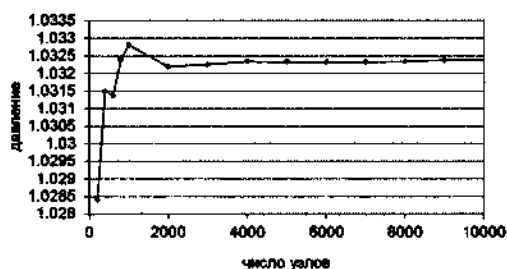


Рис. 3.17. Зависимость максимального давления в импульсе на момент времени $t = 100$ от густоты расчетной сетки при $\Delta P = 0,1$

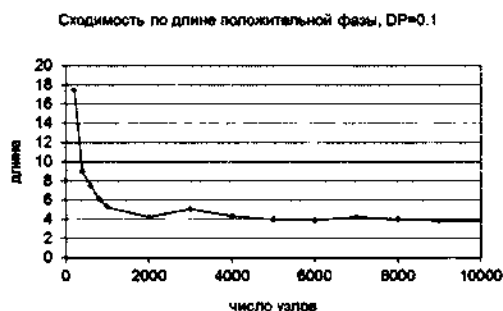


Рис. 3.18. Зависимость «длины положительной фазы» в импульсе на момент времени $t = 100$ от густоты расчетной сетки при $\Delta P = 0,1$

Практическая точность также достигается при $h = 0,1$.

Результаты при $DP = 0,01$ представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3. Результаты эмпирического исследования точности алгоритма на последовательности сгущающихся сеток при $\Delta P = 0,01$

N	h	CFL	DP	P _{MAX}	DLPFAZ	P _{MIN}	DE	DEKIN
201	1,00	0,5	0,01	1,004E+00	7,494E+00	9,999E-01	5,919E-03	1,124E-05
401	0,50	0,5	0,01	1,006E+00	4,247E+00	9,999E-01	5,113E-03	1,169E-05
601	0,33	0,5	0,01	1,007E+00	3,162E+00	9,999E-01	4,824E-03	1,170E-05
801	0,25	0,5	0,01	1,006E+00	2,995E+00	9,999E-01	4,667E-03	1,109E-05
1001	0,20	0,5	0,01	1,006E+00	2,495E+00	1,000E+00	4,588E-03	1,111E-05
2001	0,10	0,5	0,01	1,007E+00	2,095E+00	1,000E+00	4,410E-03	1,052E-05
3001	0,07	0,5	0,01	1,007E+00	1,895E+00	1,000E+00	4,350E-03	1,046E-05
4001	0,05	0,5	0,01	1,007E+00	1,870E+00	1,000E+00	4,321E-03	1,051E-05
5001	0,04	0,5	0,01	1,007E+00	1,855E+00	1,000E+00	4,303E-03	1,047E-05
6001	0,03	0,5	0,01	1,007E+00	1,812E+00	1,000E+00	4,291E-03	1,038E-05
7001	0,03	0,5	0,01	1,007E+00	1,781E+00	1,000E+00	4,282E-03	1,037E-05
8001	0,03	0,5	0,01	1,007E+00	1,758E+00	1,000E+00	4,276E-03	1,040E-05
9001	0,02	0,5	0,01	1,007E+00	1,762E+00	1,000E+00	4,271E-03	1,041E-05
10001	0,02	0,5	0,01	1,007E+00	1,765E+00	1,000E+00	4,267E-03	1,036E-05

Данные таблицы 3.3 представлены рисунках 3.19–3.20.

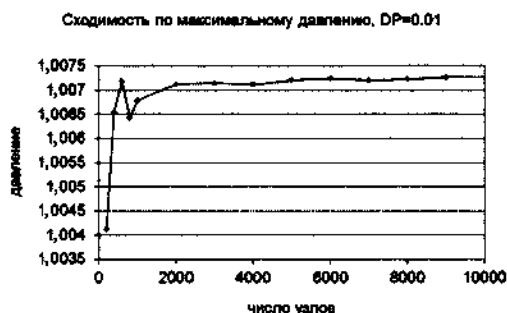


Рис. 3.19. Зависимость максимального давления в импульсе на момент времени $t = 100$ от густоты расчетной сетки при $\Delta P = 0,01$

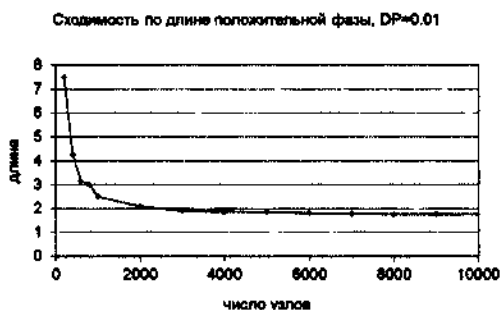


Рис. 3.20. Зависимость «длины положительной фазы» в импульсе на момент времени $t = 100$ от густоты расчетной сетки при $\Delta P = 0,01$

Практическая точность достигается при $h = 0,1$.

Задача о сжатии газа сферической оболочкой

Уравнение состояния газа и оболочки: $P = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot e$, $\gamma = 1,31$.

Наружные границы слоев: $R_g = 5,0$, $R_{sh} = 5,5$.

Начальные условия: $\rho_g = 1$, $\rho_{sh} = 20$, $e_g = e_{sh} = 0$, $u_g = u_{sh} = 0$.

Разгон оболочки осуществляется заданным на наружной границе оболочки постоянным давлением: $p_{bound} = 1$.

Контрольными параметрами являются максимальная средняя плотность газа, максимальная средняя плотность оболочки на моменты их максимальных сжатий: средняя внутренняя энергия, средняя кинетическая энергия, наружный радиус, время достижения максимального сжатия. Необходимо исследовать сходимость результатов при измельчении пространственной сетки.

В приведенных ниже таблицах использованы следующие обозначения:

NG – число узлов расчетной сетки в газе;

N – полное число расчетных узлов;

T* – момент разворота внутренней границы оболочки;

RGAS* – радиус внутренней границы оболочки в момент разворота;

ROGAS* – максимальная средняя плотность газа;

RSHELL* – радиус внешней границы оболочки в момент T*;

ROSHELL* – средняя плотность оболочки в момент T^* ;
 EIGAS* – средняя внутренняя энергия газа на момент T^* ;
 EKGAS* – средняя кинетическая энергия газа на момент T^* ;
 EISHELL* – средняя внутренняя энергия оболочки на момент T^* ;
 EKSHELL* – средняя кинетическая энергия оболочки на момент T^* ;
 ETOTAL* – средняя полная энергия всей системы на момент T^* ;
 T^{**} – момент максимального сжатия оболочки;
 RGAS** – радиус внутренней границы оболочки в момент T^{**} ;
 ROGAS** – средняя плотность газа в момент T^{**} ;
 RSHELL** – радиус внешней границы оболочки в момент T^{**} ;
 ROSHELL** – средняя плотность оболочки в момент T^{**} ;
 EIGAS** – средняя внутренняя энергия газа на момент T^{**} ;
 EKGAS** – средняя кинетическая энергия газа на момент T^{**} ;
 EISHELL** – средняя внутренняя энергия оболочки на момент T^{**} ;
 EKSHELL** – средняя кинетическая энергия оболочки на момент T^{**} ;
 ETOTAL** – средняя полная энергия всей системы на момент T^{**} .

Таблица 3.4. Результаты эмпирического исследования точности алгоритма на последовательности сгущающихся сеток

NG	N	T^*	RGAS*	ROGAS*	RSHELL*	ROSHELL*
181	271	1,309E+01	3,659E-01	2,550E+03	9,273E-01	1,105E+03
211	316	1,309E+01	3,658E-01	2,553E+03	9,256E-01	1,111E+03
241	361	1,309E+01	3,657E-01	2,555E+03	9,244E-01	1,116E+03
271	406	1,309E+01	3,656E-01	2,556E+03	9,231E-01	1,121E+03
301	451	1,309E+01	3,656E-01	2,557E+03	9,223E-01	1,124E+03
451	676	1,309E+01	3,654E-01	2,562E+03	9,195E-01	1,135E+03
601	901	1,309E+01	3,653E-01	2,564E+03	9,180E-01	1,141E+03
901	1351	1,309E+01	3,651E-01	2,56E+03	9,165E-01	1,147E+03
1401	2101	1,309E+01	3,650E-01	2,568E+03	9,153E-01	1,151E+03
2001	3001	1,309E+01	3,650E-01	2,569E+03	9,147E-01	1,154E+03
3001	4501	1,309E+01	3,650E-01	2,570E+03	9,142E-01	1,156E+03

NG	N	EIGAS*	EKGAS*	EISHELL*	EKSHELL*	ETOTAL*
181	271	6,519E-01	7,642E-04	7,749E-02	2,400E-02	1,738E-01
211	316	6,518E-01	7,714E-04	7,748E-02	2,403E-02	1,738E-01
241	361	6,517E-01	7,679E-04	7,748E-02	2,405E-02	1,738E-01
271	406	6,516E-01	7,690E-04	7,749E-02	2,405E-02	1,738E-01
301	451	6,515E-01	7,682E-04	7,751E-02	2,405E-02	1,738E-01
451	676	6,514E-01	7,770E-04	7,752E-02	2,407E-02	1,738E-01
601	901	6,513E-01	7,862E-04	7,752E-02	2,408E-02	1,738E-01
901	1351	6,512E-01	7,941E-04	7,754E-02	2,408E-02	1,738E-01
1401	2101	6,512E-01	8,007E-04	7,755E-02	2,408E-02	1,738E-01
2001	3001	6,511E-01	8,050E-04	7,755E-02	2,409E-02	1,738E-01
3001	4501	6,511E-01	8,085E-04	7,755E-02	2,409E-02	1,738E-01

NG	N	T**	RSHELL**	ROSHELL**	RGAS**	ROGAS**
181	271	1,421E+01	6,947E-01	3,317E+03	4,411E-01	1,455E+03
211	316	1,421E+01	6,923E-01	3,362E+03	4,410E-01	1,456E+03
241	361	1,421E+01	6,902E-01	3,402E+03	4,408E-01	1,458E+03
271	406	1,421E+01	6,885E-01	3,435E+03	4,406E-01	1,460E+03
301	451	1,421E+01	6,871E-01	3,464E+03	4,406E-01	1,460E+03
451	676	1,420E+01	6,827E-01	3,552E+03	4,402E-01	1,465E+03
601	901	1,420E+01	6,803E-01	3,602E+03	4,399E-01	1,467E+03
901	1351	1,420E+01	6,777E-01	3,656E+03	4,397E-01	1,470E+03
1401	2101	1,420E+01	6,757E-01	3,698E+03	4,394E-01	1,472E+03
2001	3001	1,420E+01	6,746E-01	3,722E+03	4,393E-01	1,473E+03
3001	4501	1,420E+01	6,738E-01	3,741E+03	4,392E-01	1,474E+03

NG	N	EIGAS**	EKGAS**	EISHELL**	EKSHELL**	ETOTAL**
181	271	5,477E-01	7,134E-03	9,625E-02	2,057E-02	1,743E-01
211	316	5,476E-01	7,103E-03	9,632E-02	2,053E-02	1,743E-01
241	361	5,476E-01	7,100E-03	9,639E-02	2,045E-02	1,743E-01
271	406	5,477E-01	7,089E-03	9,644E-02	2,040E-02	1,743E-01
301	451	5,476E-01	7,104E-03	9,648E-02	2,038E-02	1,743E-01
451	676	5,477E-01	7,083E-03	9,662E-02	2,024E-02	1,743E-01
601	901	5,477E-01	7,083E-03	9,670E-02	2,015E-02	1,743E-01
901	1351	5,478E-01	7,083E-03	9,678E-02	2,006E-02	1,743E-01
1401	2101	5,479E-01	7,084E-03	9,684E-02	1,999E-02	1,743E-01
2001	3001	5,480E-01	7,083E-03	9,688E-02	1,995E-02	1,743E-01
3001	4501	5,480E-01	7,082E-03	9,690E-02	1,992E-02	1,743E-01

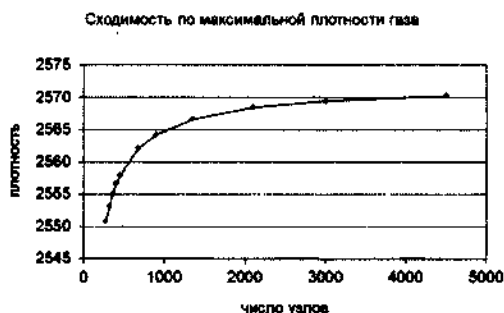


Рис. 3.21. Зависимость максимальной плотности обжимаемого оболочкой газа от полного числа расчетных ячеек

3.1.7. Комментарии

Объединение балансного и характеристического подходов к численному интегрированию уравнений газовой динамики оказалось возможным благодаря появлению дополнительных степеней свободы в описании газодинамических полей, возникших при переходе от традиционных двухслойных схем к трехслойным. Новые возможности открылись после введения специализации переменных – разделения их на консервативные и потоковые. Для консервативных переменных выписываются уравнения баланса массы, импульса и полной энергии. Потоки этих величин описываются другим набором переменных – т. н. потоковыми переменными, значения которых вычисляются методом характеристик. Принцип специализации переменных является весьма конструктивным и позволяет строить различные алгоритмы, выбирая среди них оптимальный для того или иного класса задач.

В балансно-характеристических схемах удалось объединить достоинства, присущие как балансному, так и характеристическому подходам и избавиться от их врожденных недостатков.

Особого внимания заслуживает метод монотонизации решений балансно-характеристических уравнений – специализированный вариант нелинейной коррекции потоков, естественным образом вытекающий из двойственной природы новых схем. Ограничению здесь подвергаются квазинварианты Римана из требования соблюдения для них достаточных условий монотонности. При таком подходе монотонизация решения достигается при минимальной накачке энтропии.

В описанных выше балансно-характеристических схемах отсутствуют какие-либо естественные настроечные параметры. Их пришлось вводить в алгоритм искусственным образом (диссипатор Паниковского). Опыт решения тестовых и модельных задач показал, что наилучшие результаты были достигнуты при нулевом значении релаксационного параметра, т. е. при полном отключении искусственного диссипатора.

Новый алгоритм является явным, он устойчив при числах Куранта, меньших единицы, и монотонен при числах Куранта, меньших 0,5. По быстродействию он сравним с известными явными схемами с искусственной вязкостью и заметно превосходит их, как и известные TVD-алгоритмы, по точности на нестационарных

задачах с ударными волнами и разрывами других типов. Следует отметить, что в лагранжевых переменных (в одномерном случае) существуют только две характеристики, направленные в разные стороны. Это сильно упрощает алгоритм вычисления новых значений потоковых переменных.

Балансно-характеристические схемы газовой динамики могут быть обобщены на случай нескольких пространственных координат, произвольные расчетные сетки и смешанные эйлерово-лагранжевые переменные.

3.2. Одномерные уравнения газовой динамики в эйлеровых переменных

Консервативная и характеристическая формы записи уравнения газовой динамики в эйлеровых переменных

Уравнения газовой динамики представляют собой гиперболическую систему законов сохранения массы, импульса и полной энергии. В эйлеровых переменных они выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= F_\rho, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = F_{\rho u}, \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E u + p u)}{\partial x} = F_E, \\ E &= \varepsilon + u^2/2, \quad p = P(\rho, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Здесь ρ – плотность, u – скорость, p – давление, ε – удельная внутренняя энергия, E – полная энергия; $F_\rho = F_\rho(\rho, \varepsilon, u, x, t)$, $F_{\rho u} = F_{\rho u}(\rho, \varepsilon, u, x, t)$, $F_E = F_E(\rho, \varepsilon, u, x, t)$ – источники достаточно произвольного вида, и уравнение состояния таково, что

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{P}{\rho^2} + \frac{\partial P}{\partial \rho} = c^2 \geq \mu_0 > 0,$$

где c – скорость звука.

Свойство гиперболичности этой системы состоит в том, что в областях гладкости она приводится к т. н. характеристической форме:

$$\left\{ \Omega \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \right\} + \Lambda \cdot \left\{ \Omega \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right\} = \Omega \cdot \bar{f}, \quad \bar{\varphi}^T = (\rho, u, p), \quad (3.36)$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (\rho \cdot c)^{-1} \\ 0 & 1 & -(\rho \cdot c)^{-1} \\ -c^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+c & 0 & 0 \\ 0 & u-c & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{f}^T &= (f_1, f_2, f_3), \quad f_1 = F_\rho, \quad f_2 = (F_{\rho u} - u \cdot F_\rho) / \rho, \\ f_3 &= \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \{ F_E + (u^2 - E) \cdot F_\rho - u \cdot F_{\rho u} \} + \frac{\partial P}{\partial \rho} \cdot F_\rho. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Вычислительные алгоритмы, базирующиеся на дивергентной форме записи уравнений (3.35) и сохраняющие свойство дивергентности на разностном уровне, называются *консервативными* [1]. Консервативные разностные схемы, дополненные процедурами монотонизации численного решения в областях сильных градиентов (искусственная вязкость, нелинейная коррекция потоков), составляют основу современного парка алгоритмов сквозного счета газодинамических задач [7].

Вычислительные схемы, опирающиеся на представление уравнений газовой динамики в форме (3.36), получили название *характеристических* [8], или *сеточно-характеристических* [9]. Характеристические алгоритмы по точности заметно превосходят схемы сквозного счета в областях гладкости решения, однако при возникновении сильных разрывов теряют однородность и приводят к значительным алгоритмическим трудностям. Это обстоятельство обуславливает относительную редкость их практического использования, несмотря на неослабевающий интерес к ним со стороны математического сообщества. [9], [10], [11].

В работе [12] предложен новый вычислительный метод, объединяющий достоинства характеристических и консервативных разностных схем. Его отличительной особенностью является наличие двух видов переменных, т. н. «консервативных» и «поточковых» величин. Специализация переменных позволяет использовать дивергентную форму записи уравнений для вычисления «консервативных» переменных и характеристическую – для определения потоков. Новый метод, названный «балансно-характеристическим» заметно превосходит по всем параметрам известные TVD-, TVB- и ENO-алгоритмы [7]. Настоящая работа посвящена более полному описанию балансно-характеристического метода применительно к одномерным уравнениям газовой динамики в эйлеровых переменных и некоторому его дальнейшему развитию.

3.2.1. Описание балансно-характеристического алгоритма

П.1. Сеточные множества и сеточные функции

На отрезке $[X_L, X_R]$ введем неравномерную расчетную сетку с координатами узлов $x_k: \{x_1 = X_L, x_{k+1} > x_k, x_N = X_R, k = 1, \dots, N\}$. Множество узлов этой сетки обозначим как ω ; множество центров ячеек – как ω . Центры ячеек будем отмечать полуцелыми индексами $(k+1/2)$. Множества сеточных функций, определенных на ω и ω будем обозначать как $\mathcal{H}_\omega$ и $\mathcal{H}_\omega$ соответственно.

Для объединения балансного и характеристического подходов будем использовать как множество узлов ω , так и множество ячеек ω расчетной сетки.

Введем два типа дискретных величин: т. н. «консервативные» величины $\tilde{\Psi}_\omega^T = (U_{k+1/2}, \Theta_{k+1/2}, P_{k+1/2}), E_{k+1/2}, \mathcal{E}_{k+1/2} \in \mathcal{H}_\omega$ и «поточковые» – $\tilde{\Phi}_\omega^T = (u_k, \rho_k, p_k) \in \mathcal{H}_\omega$. Здесь $U_{k+1/2}$ – скорости, $\Theta_{k+1/2}$ – плотности, $P_{k+1/2}$ – давления, $\mathcal{E}_{k+1/2}$ – удельные внутренние энергии, $E_{k+1/2}$ – полные энергии ячеек, u_k – поточковые скорости, p_k – поточковые давления, ρ_k – поточковые плотности. Таким образом, количество неизвестных сеточных функций в новом подходе в случае одного пространственного измерения в два раза превышает их число в традиционных подходах [7],[10].

П.2. Аппроксимация системы дивергентных уравнений

Пусть в момент времени t_n известны значения консервативных и поточковых переменных $\tilde{\Psi}_\omega^n$ и $\tilde{\Phi}_\omega^n$. Аппроксимируем исходную систему уравнений газовой дина-

мики, записанную в виде системы законов сохранения, неявной консервативной разностной схемой, обладающей вторым порядком аппроксимации на гладких решениях:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1} - \Theta_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot u})_{i+1} - (\overline{\rho \cdot u})_i}{h_{i+1/2}} &= (\overline{F_\rho})_{i+1/2}, \\ \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot u^2 + p})_{i+1} - (\overline{\rho \cdot u^2 + p})_i}{h_{i+1/2}} &= (\overline{F_{\rho u}})_{i+1/2}, \\ \frac{(\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot E)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u})_{i+1} - (\overline{\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u})_i}{h_{i+1/2}} &= (\overline{F_E})_{i+1/2}, \\ E_{i+1/2}^{n+1} &= \mathcal{E}_{i+1/2}^{n+1} + 0,5 \cdot U_{i+1/2}^{n+1} \cdot U_{i+1/2}^{n+1}, \quad e_i^n = \mathcal{E}_i^n + 0,5 \cdot u_i^n \cdot u_i^n, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где чертой сверху обозначается осреднение по двум временным слоям: $\bar{\eta} = (\eta^{n+1} + \eta^n)/2$

П.3. Вычисление новых значений потоковых переменных

Чтобы разрешить систему (3.39) относительно новых значений консервативных переменных, определим неизвестные значения потоковых величин, используя характеристическую форму записи исходных уравнений (3.36).

Вначале вычислим значения консервативных величин на момент времени $t_{n+1/2} = t_n + 0,5 \cdot \tau_{n+1/2}$ по разностной схеме

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u)_{i+1}^n - (\rho \cdot u)_i^n}{h_{i+1/2}} &= (F_\rho)_i^n, \\ \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u^2 + p)_{i+1}^n - (\rho \cdot u^2 + p)_i^n}{h_{i+1/2}} &= (F_{\rho u})_{i+1/2}^n, \\ \frac{(\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot E)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_{i+1}^n - (\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_i^n}{h_{i+1/2}} &= (F_E)_{i+1/2}^n, \\ E_{i+1/2}^{n+1/2} &= \mathcal{E}_{i+1/2}^{n+1/2} + 0,5 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad e_i^n = \mathcal{E}_i^n + 0,5 \cdot u_i^n \cdot u_i^n, \end{aligned} \quad (3.40)$$

аппроксимирующей дивергентную форму дифференциальных уравнений (3.35) со вторым порядком точности по пространству и с первым порядком по времени. Следует отметить, что сами промежуточные значения консервативных переменных вычисляются при этом со вторым порядком точности. Затем, в пространственно-временной расчетной ячейке $D_{i+1/2}^{n+1/2} : \{(x, t) \in [x_{i+1}, x_i] \times [t_{n+1}, t_n]\}$ аппроксимируем характеристическую систему (3.36) системой линейных уравнений:

$$\left\{ \Omega_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right\} + \Lambda_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \left\{ \Omega_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \right\} = \bar{g}_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad \bar{g}_{i+1/2}^{n+1/2} = \Omega_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \bar{f}_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad (3.41)$$

где

$$\Omega_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot C_{i+1/2}^{n+1/2})^{-1} \\ 0 & 1 & -(\Theta \cdot C)^{-1} \\ -(C_{i+1/2}^{n+1/2})^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

$$C_{i+1/2}^{n+1/2} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{P_{i+1/2}^{n+1/2}}{(\Theta_{i+1/2}^{n+1/2})^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_{i+1/2}^{n+1/2}},$$

$$\Lambda_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} (\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)_{i+1/2}^{n+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3)_{i+1/2}^{n+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (U+C)_{i+1/2}^{n+1/2} & 0 & 0 \\ 0 & (U-C)_{i+1/2}^{n+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & U_{i+1/2}^{n+1/2} \end{pmatrix}.$$

Используя обозначения

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \Omega_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \bar{\Phi}, \quad \bar{I}^T = (r, q, s), \quad r = u(x, t) + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p(x, t), \\ q &= u(x, t) - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p(x, t), \quad s = p(x, t) - (C_{i+1/2}^{n+1/2})^2 \cdot p(x, t), \\ G_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot C_{i+1/2}^{n+1/2})^{-1}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

(3.41) можно записать в виде

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} + (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{\partial I_k}{\partial x} = (g_k)_{i+1/2}^{n+1/2}. \quad (3.44)$$

Величины (r, q, s) будем называть «римановыми квазиинвариантами», или просто «квазиинвариантами».

По известным значениям потоковых переменных в момент времени t_n и консервативных переменных в момент $t_{n+1/2}$, вычислим соответствующие им значения Римановых квазиинвариантов:

$$\begin{aligned} (r_{i+1}^n)_{i+1/2} &= u_{i+1}^n + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_{i+1}^n, \quad (r_i^n)_{i+1/2} = u_i^n + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_i^n, \quad R_{i+1/2}^{n+1/2} = U_{i+1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot P_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ (q_{i+1}^n)_{i+1/2} &= u_{i+1}^n - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_{i+1}^n, \quad (q_i^n)_{i+1/2} = u_i^n - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_i^n, \quad Q_{i+1/2}^{n+1/2} = U_{i+1/2}^{n+1/2} - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot P_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ (s_{i+1}^n)_{i+1/2} &= p_{i+1}^n - (C_{i+1/2}^{n+1/2})^2 \cdot p_{i+1}^n, \quad (s_i^n)_{i+1/2} = p_i^n - (C_{i+1/2}^{n+1/2})^2 \cdot p_i^n, \quad S_{i+1/2}^{n+1/2} = P_{i+1/2}^{n+1/2} - (C_{i+1/2}^{n+1/2})^2 \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Если в ячейке $D_{i+1/2}^{n+1/2}$ квазиинварианты являются гладкими функциями, то с точностью $O[(\tau_{n+1/2})^2, (h_{i+1/2})^2]$ должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} (I_k)_{i+1}^{n+1} &= 2 \cdot (I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (I_k)_i^n, \quad (I_k)_i^{n+1} = 2 \cdot (I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (I_k)_{i+1}^n, \\ (\bar{I}^T)_{i+1}^{n+1} &= (r_{i+1}^{n+1}, q_{i+1}^{n+1}, s_{i+1}^{n+1})_{i+1/2}, \quad (\bar{I}^T)_{i+1}^n = (r_i^n, q_i^n, s_i^n)_{i+1/2}, \\ (\bar{I}^T)_i^n &= (r_i^n, q_i^n, s_i^n)_{i+1/2}, \quad (\bar{I}^T)_{i+1/2}^{n+1/2} = (R_{i+1/2}^{n+1/2}, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, S_{i+1/2}^{n+1/2}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

связывающие неизвестные значения квазиинвариантов на новом временном слое с их известными значениями посредством линейной экстраполяции. Примем эти соотношения в качестве определяющих.

Из уравнений (3.41) следует, что величины квазиинвариантов на новом временном слое должны удовлетворять неравенствам:

$$\begin{aligned} \max(I_k)_D &\geq \left[(I_k)_{i+1}^{n+1}\right]_{i+1/2} \geq \min(I_k)_D, \text{ if } (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \geq 0, \frac{\tau_{n+1/2} \cdot (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2}}{h_{i+1/2}} \leq 1, \\ \max(I_k)_D &\geq \left[(I_k)_i^{n+1}\right]_{i+1/2} \geq \min(I_k)_D, \text{ if } (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} < 0, \frac{\tau_{n+1/2} \cdot (\lambda_k)_i^{n+1/2}}{h_{i+1/2}} \leq 1, \end{aligned} \quad (3.47)$$

где

$$\begin{aligned} \max(I_k)_D &= \max_{x \in [x_{i+1}, x_i]} (I_k)^n + \tau_{n+1/2} \cdot \max_{(x,i) \in D} (g_k), \\ \min(I_k)_D &= \min_{x \in [x_{i+1}, x_i]} (I_k)^n + \tau_{n+1/2} \cdot \min_{(x,i) \in D} (g_k). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Значения квазиинвариантов на новом временном слое, вычисленные по формулам линейной экстраполяции (3.46), не всегда будут удовлетворять этим неравенствам, поэтому их следует откорректировать в соответствии с (3.47).

В случае дискретных сеточных функций заменим ограничения (3.48) их приближенными сеточными аналогами:

$$\begin{aligned} \max(I_k)_D &= \max \left[(I_k)_i^n, (I_k)_{i+1/2}^{n+1/2}, (I_k)_{i+1}^n \right] + \tau_{n+1/2} \cdot (g_k)_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ \min(I_k)_D &= \min \left[(I_k)_i^n, (I_k)_{i+1/2}^{n+1/2}, (I_k)_{i+1}^n \right] + \tau_{n+1/2} \cdot (g_k)_{i+1/2}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

и процедуру коррекции определим как:

$$\left[(\tilde{I}_k)_{i+1}^{n+1} \right]_{i+1/2} = \begin{cases} (I_k)_{i+1}^{n+1} & \text{if } \min(I_k)_D \leq (I_k)_{i+1}^{n+1} \leq \max(I_k)_D \\ \min(I_k)_D & \text{if } (I_k)_{i+1}^{n+1} < \min(I_k)_D \\ \max(I_k)_D & \text{if } (I_k)_{i+1}^{n+1} > \max(I_k)_D \end{cases}; \quad (3.50)$$

$$\left[(\tilde{I}_k)_i^{n+1} \right]_{i+1/2} = \begin{cases} (I_k)_{i+1}^{n+1} & \text{if } \min(I_k)_D \leq (I_k)_{i+1}^{n+1} \leq \max(I_k)_D \\ \min(I_k)_D & \text{if } (I_k)_{i+1}^{n+1} < \min(I_k)_D \\ \max(I_k)_D & \text{if } (I_k)_{i+1}^{n+1} > \max(I_k)_D \end{cases}. \quad (3.51)$$

Алгоритм, описанный формулами (3.49), (3.51), будем называть «основной процедурой коррекции». При расчете задач аэроакустики иногда полезно использовать «расширенную процедуру коррекции», когда допустимые пределы изменения локальных инвариантов модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned}\max(I_k)_D &= \max(I_k)_D + \frac{\alpha}{\max(I_k)_D - \min(I_k)_D}; \\ \min(I_k)_D &= \min(I_k)_D - \frac{\alpha}{\max(I_k)_D - \min(I_k)_D}.\end{aligned}\quad (3.52)$$

При $\alpha > 0$ происходит расширение области допустимых значений, при $\alpha < 0$ — сужение, что приводит к появлению дополнительной диссипации.

Следует отметить, что коррекции подвергаются все без исключения квазиинварианты без анализа области их зависимости. Такой анализ будет проведен позднее.

Таким образом, для каждого узла с индексами $(i, n+1)$ мы получили шесть значений квазиинвариантов $(\tilde{r}_i^{n+1})_{i-1/2}, (\tilde{r}_i^{n+1})_{i+1/2}, (\tilde{q}_i^{n+1})_{i-1/2}, (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}, (\tilde{s}_i^{n+1})_{i-1/2}, (\tilde{s}_i^{n+1})_{i+1/2}$. Какие из них следует использовать для нахождения новых значений потоковых переменных, зависит от того, с какой стороны соответствующая характеристика приходит в узел $(i, n+1)$. Вычислим «прикидочные» значения $\tilde{u}_i^{n+1}$ и новой скорости звука $\tilde{c}_i^{n+1}$ со вторым порядком точности по формулам:

$$\tilde{u}_i^{n+1} = U_{i+1/2}^{n+1/2} + U_{i-1/2}^{n+1/2} - u_i^n, \quad \tilde{c}_i^{n+1} = C_{i+1/2}^{n+1/2} + C_{i-1/2}^{n+1/2} - c_i^n, \quad (3.53)$$

и определим соответствующие характеристические скорости как

$$(\tilde{\lambda}_1)_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} + c_i^{n+1}, \quad (\tilde{\lambda}_2)_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} - c_i^{n+1}, \quad (\tilde{\lambda}_3)_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1}. \quad (3.54)$$

Следует отметить, что на этом этапе нам потребуется только информация о направлении прихода характеристик в данный узел, поэтому вопрос о точности вычисления характеристических скоростей не является критическим.

Возможны всего четыре комбинации прихода характеристик в узел $(i, n+1)$:

$$\begin{aligned}\left\{ (\tilde{\lambda}_1)_i^{n+1} \geq 0, (\tilde{\lambda}_2)_i^{n+1} \geq 0, (\tilde{\lambda}_3)_i^{n+1} < 0 \right\}, \quad \left\{ (\tilde{\lambda}_1)_i^{n+1} \geq 0, (\tilde{\lambda}_2)_i^{n+1} < 0, (\tilde{\lambda}_3)_i^{n+1} < 0 \right\}, \\ \left\{ (\tilde{\lambda}_1)_i^{n+1} \geq 0, (\tilde{\lambda}_2)_i^{n+1} \geq 0, (\tilde{\lambda}_3)_i^{n+1} \geq 0 \right\}, \quad \left\{ (\tilde{\lambda}_1)_i^{n+1} < 0, (\tilde{\lambda}_2)_i^{n+1} < 0, (\tilde{\lambda}_3)_i^{n+1} < 0 \right\}.\end{aligned}$$

Новые значения потоковых переменных в первом случае находятся из системы уравнений:

$$\begin{aligned}u_i^{n+1} + G_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot p_i^{n+1} &= (\tilde{r}_i^{n+1})_{i-1/2}; \quad u_i^{n+1} - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_i^{n+1} = (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}; \\ p_i^{n+1} - (C_{i+1/2}^{n+1/2})^2 \cdot p_i^{n+1} &= (\tilde{s}_i^{n+1})_{i-1/2},\end{aligned}\quad (3.55)$$

откуда в первом случае получаем:

$$p_i^{n+1} = \frac{(\tilde{r}_i^{n+1})_{i-1/2} - (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}}; \quad u_i^{n+1} = \frac{G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot (\tilde{r}_i^{n+1})_{i-1/2} + G_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}}; \\ \rho_i^{n+1} = \frac{(p_i^{n+1}) - (\tilde{s}_i^{n+1})_{i-1/2}}{(C_{i-1/2}^{n+1/2})^2}. \quad (3.56)$$

В случае $\{(\tilde{\lambda}_1)_i^{n+1} \geq 0, (\tilde{\lambda}_2)_i^{n+1} < 0, (\tilde{\lambda}_3)_i^{n+1} < 0\}$:

$$p_i^{n+1} = \frac{(\tilde{r}_i^{n+1})_{i-1/2} - (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}}; \quad u_i^{n+1} = \frac{G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot (\tilde{r}_i^{n+1})_{i-1/2} + G_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}}; \\ \rho_i^{n+1} = \frac{(p_i^{n+1}) - (\tilde{s}_i^{n+1})_{i-1/2}}{(C_{i+1/2}^{n+1/2})^2}. \quad (3.57)$$

Для сверхзвукового течения вправо, т. е. при $\{(\tilde{\lambda}_1)_i^{n+1} \geq 0, (\tilde{\lambda}_2)_i^{n+1} \geq 0, (\tilde{\lambda}_3)_i^{n+1} \geq 0\}$ имеем:

$$p_i^{n+1} = \frac{(\tilde{r}_i^{n+1})_{i-1/2} - (\tilde{q}_i^{n+1})_{i-1/2}}{2 \cdot G_{i-1/2}^{n+1/2}}, \quad u_i^{n+1} = \frac{(\tilde{r}_i^{n+1})_{i-1/2} + (\tilde{q}_i^{n+1})_{i-1/2}}{2}, \quad \rho_i^{n+1} = \frac{(p_i^{n+1}) - (\tilde{s}_i^{n+1})_{i-1/2}}{(C_{i-1/2}^{n+1/2})^2}. \quad (3.58)$$

Для сверхзвукового течения влево:

$$p_i^{n+1} = \frac{(\tilde{r}_i^{n+1})_{i+1/2} - (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}}{2 \cdot G_{i+1/2}^{n+1/2}}, \quad u_i^{n+1} = \frac{(\tilde{r}_i^{n+1})_{i+1/2} + (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}}{2}, \quad \rho_i^{n+1} = \frac{(p_i^{n+1}) - (\tilde{s}_i^{n+1})_{i+1/2}}{(C_{i+1/2}^{n+1/2})^2}. \quad (3.59)$$

На этом этапе вычисление новых значений потоковых переменных во внутренних узлах расчетной сетки завершается.

Следует отметить, что описанный выше алгоритм вычисления потоковых переменных является достаточно грубым – он приведен из соображений простоты изложения и минимизации объема текста. Так, он не учитывает существования т. н. «звуковых точек», и это, безусловно, будет проявляться в расчетах, выполненных при его строгом выполнении. Полная форма алгоритма, учитывающая все особенности переходов от дозвуковых течений к сверхзвуковым и обратно, приведена в четвертой главе этой книги.

П.4. Учет особенностей уравнения состояния

Описанная выше аппроксимация матрицы левых собственных векторов Ω (3.37) постоянными в областях $D_{i+1/2}^{n+1/2}$ матрицами $\Omega_{i+1/2}^{n+1/2}$ (3.42) ориентирована на уравнения состояния общего вида, в том числе и табличные. Для уравнений состояния, задаваемых

аналитически, эта аппроксимация может быть уточнена с использованием специфики этих уравнений. Так, для идеального газа с уравнением состояния $P = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot \varepsilon$ вместо матрицы $\Omega_{i+1/2}^{n+1/2}$ можно взять матрицу

$${}^* \Omega_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{{}^* G_{i+1/2}^{n+1/2}}{\sqrt{p}} \\ 0 & 1 & -\frac{{}^* G_{i+1/2}^{n+1/2}}{\sqrt{p}} \\ -\gamma \cdot \frac{1}{\rho} & 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix}, \quad {}^* G_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\sqrt{\gamma \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}}}, \quad (3.60)$$

соответствующую допущению, что плотность в пределах ячейки $D_{i+1/2}^{n+1/2}$ является постоянной и равной $\Theta_{i+1/2}^{n+1/2}$. В этом случае Римановы квазиинварианты будут иметь вид:

$$\begin{aligned} (r)_{i+1/2} &= u(x, t) + {}^* G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{p(x, t)}, \quad (q)_{i+1/2} = u(x, t) - {}^* G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{p(x, t)}, \\ (s)_{i+1/2} &= \ln(p/\rho^\gamma). \end{aligned} \quad (3.61)$$

В отличие от квазиинвариантов (3.43), последние являются нелинейными функциями от плотности и давления. Изменяется и формулы (3.56)–(3.59), выражающие новые значения потоковых переменных через квазиинварианты. Все остальные процедуры, описанные в предыдущем пункте, остаются неизменными.

Еще одним видом локальных инвариантов, имеющих большую практическую значимость, в частности, при решении задач аэроакустики, имеют т. н. «изоэнтропические» квазиинварианты, отвечающие предположению о постоянстве энтропии в пределах каждой пространственно-временной расчетной ячейки:

$$\begin{aligned} (r)_{i+1/2} &= u(x, t) + {}^* G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot [p(x, t)]^\mu; \quad (q)_{i+1/2} = u(x, t) - {}^* G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot [p(x, t)]^\mu; \\ (s)_{i+1/2} &= \ln(p/\rho^\gamma), \end{aligned} \quad (3.62)$$

где

$${}^* G_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{2\sqrt{\gamma} \cdot \left[\exp(S_{i+1/2}^{n+1/2}) \right]^{\frac{1}{2\gamma}}}{\gamma - 1}; \quad S_{i+1/2}^{n+1/2} = \ln \left[\frac{P_{i+1/2}^{n+1/2}}{(\rho_{i+1/2}^{n+1/2})^\gamma} \right]; \quad \mu = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}. \quad (3.6)$$

П.5. Учет геометрического фактора

Задачи со сферической и осевой симметрией описываются системой (3.35) с источниками

$$F_\rho = -(\nu-1)\frac{\rho u}{x}, \quad F_{\rho u} = -(\nu-1)\frac{\rho u^2}{x}, \quad F_E = -(\nu-1)\frac{(\rho Eu + pu)}{x}, \quad (3.64)$$

где $\nu=1,2,3$ отвечает случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно.

Для сохранения свойства консервативности у разностных уравнений (3.40), (3.39) их правые части следует аппроксимировать как:

$$\begin{aligned} (F_\rho)_{i+1/2}^n &= -\frac{2 \cdot (\nu-1)}{(x_{i+1})^{\nu-1} + (x_i)^{\nu-1}} \cdot \left[\frac{(\rho \cdot u)_{i+1}^n + (\rho \cdot u)_i^n}{2} \right] \cdot \left[\frac{(x_{i+1})^{\nu-1} - (x_i)^{\nu-1}}{x_{i+1} - x_i} \right], \\ (F_{\rho u})_{i+1/2}^n &= -\frac{2 \cdot (\nu-1)}{(x_{i+1})^{\nu-1} + (x_i)^{\nu-1}} \cdot \left[\frac{(\rho \cdot u^2)_{i+1}^n + (\rho \cdot u^2)_i^n}{2} \right] \cdot \left[\frac{(x_{i+1})^{\nu-1} - (x_i)^{\nu-1}}{x_{i+1} - x_i} \right], \\ (F_E)_{i+1/2}^n &= -\frac{2 \cdot (\nu-1)}{(x_{i+1})^{\nu-1} + (x_i)^{\nu-1}} \cdot \left[\frac{(\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_{i+1}^n + (\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_i^n}{2} \right] \cdot \left[\frac{(x_{i+1})^{\nu-1} - (x_i)^{\nu-1}}{x_{i+1} - x_i} \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Правые части в (3.36), реально используемые только при вычислении пределов изменения квазиинвариантов (3.49), со вторым порядком точности аппроксимируются выражениями:

$$\begin{aligned} (f_\rho)_{i+1/2}^{n+1/2} &= -\frac{2 \cdot (\nu-1) \cdot (\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1/2}}{(x_{i+1})^{\nu-1} + (x_i)^{\nu-1}} \cdot \left[\frac{(x_{i+1})^{\nu-1} - (x_i)^{\nu-1}}{x_{i+1} - x_i} \right], \\ (f_{\rho u})_{i+1/2}^{n+1/2} &= -\frac{2 \cdot (\nu-1) \cdot (\Theta \cdot U^2)_{i+1/2}^{n+1/2}}{(x_{i+1})^{\nu-1} + (x_i)^{\nu-1}} \cdot \left[\frac{(x_{i+1})^{\nu-1} - (x_i)^{\nu-1}}{x_{i+1} - x_i} \right], \\ (f_E)_{i+1/2}^{n+1/2} &= -\frac{2 \cdot (\nu-1) \cdot (\Theta \cdot E \cdot U + P \cdot U)_{i+1/2}^{n+1/2}}{(x_{i+1})^{\nu-1} + (x_i)^{\nu-1}} \cdot \left[\frac{(x_{i+1})^{\nu-1} - (x_i)^{\nu-1}}{x_{i+1} - x_i} \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

П.6. Граничные условия

Для нахождения новых значений потоковых величин $\rho_1^{n+1}, u_1^{n+1}, p_1^{n+1}$ на левой границе области необходимо использовать граничные условия. Граничные условия определяют значения квазиинвариантов, переносимых характеристиками, приходящими в граничный узел слева. Все остальное – как и для внутренних узлов. Рассмотрим в качестве примера граничные условия трех типов: набегающий сверхзвуковой поток, набегающий дозвуковой поток и непроницаемую стенку. В первом случае граничные потоковые величины должны иметь те же значения, что и набегающий поток, т. е.

$$\rho_1^{n+1} = \rho_{-\infty}, \quad u_1^{n+1} = u_{-\infty}, \quad p_1^{n+1} = p_{-\infty}.$$

Во втором случае они вычисляются из системы уравнений :

$$u_1^{n+1} + G_{-\infty} \cdot p_1^{n+1} = (r)_{-\infty}, \quad u_1^{n+1} - G_{3/2}^{n+1/2} \cdot p_1^{n+1} = (\tilde{q}_1^{n+1})_{3/2}, \quad p_1^{n+1} - (C_{1+1/2}^{n+1/2})^2 \cdot \rho_1^{n+1} = (s)_{-\infty},$$

где

$$G_{-\infty} = \frac{1}{(\rho \cdot c)_{-\infty}}, \quad (r)_{-\infty} = u_{-\infty} + G_{-\infty} \cdot p_{-\infty}, \quad (s)_{-\infty} = p_{-\infty} - c_{-\infty}^2 \cdot \rho_{-\infty}.$$

Для неподвижной жесткой стенки –

$$\rho_1^{n+1} = \Theta_{3/2}^{n+1}, \quad u_1^{n+1} = 0, \quad p_1^{n+1} = -(\tilde{q}_1^{n+1})_{3/2} / G_{1/2}^{n+1/2}.$$

Аналогичным образом определяются потоковые переменные $\rho_N^{n+1}, u_N^{n+1}, p_N^{n+1}$ и на правой границе расчетной области.

При известных значениях потоковых переменных на слое t_{n+1} система разностных уравнений становится явной, и из нее легко находятся новые значения консервативных переменных.

Таким образом, основу балансно-характеристического алгоритма составляет неявная консервативная разностная схема (3.39), для численного решения которой используется явный алгоритм типа «предиктор – корректор» [10], где в качестве «предиктора» применяется явная консервативная схема (3.40), а в качестве «корректора» – процедуры (3.45), (3.46), (3.50), (3.51), (3.55)–(3.58), следующие из характеристической формы представления уравнений (3.36).

3.2.2. Свойства балансно-характеристического алгоритма

П.7. Аппроксимация

Нетрудно увидеть, что при отсутствии блока коррекции квазинвариантов (3.50)–(3.51) все процедуры, используемые при получении новых потоковых величин, обладают вторым порядком аппроксимации. Таким образом, в областях гладкости решения балансно-характеристические схемы также имеют второй порядок аппроксимации. При «активизации» процедуры коррекции квазинвариантов, которая проявляется в окрестностях слабых и сильных разрывов, порядок аппроксимации снижается до первого.

П.8. Другая форма представления алгоритма

Балансово-характеристический алгоритм может быть представлен и в ином виде, описанном в [12].

Вычитая из разностных уравнений (3.39) уравнения (3.40), получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1} - \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u)_{i+1}^{n+1} - (\rho \cdot u)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = (F_\rho)_{i+1/2}^{n+1}, \\
& \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u^2 + p)_{i+1}^{n+1} - (\rho \cdot u^2 + p)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = (F_\rho u)_{i+1/2}^{n+1}, \\
& \frac{(\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_{i+1}^{n+1} - (\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = (F_E)_{i+1/2}^{n+1}, \\
& E_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathcal{E}_{i+1/2}^{n+1/2} + 0,5 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad e_i^{n+1} = \mathcal{e}_i^{n+1} + 0,5 \cdot u_i^{n+1} \cdot u_i^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Сдвигая в этих уравнениях индекс n на единицу вниз и складывая результат с системой (3.40), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
& \frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + \frac{(\rho \cdot u)_{i+1}^n - (\rho \cdot u)_i^n}{h_{i+1/2}} = (F_\rho)_{i+1/2}^n, \\
& \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + \frac{(\rho \cdot u^2 + p)_{i+1}^n - (\rho \cdot u^2 + p)_i^n}{h_{i+1/2}} = (F_\rho u)_{i+1/2}^n, \\
& \frac{(\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + \frac{(\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_{i+1}^n - (\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_i^n}{h_{i+1/2}} = (F_E)_{i+1/2}^n,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

где $\tau_n = (\tau_{n+1/2} + \tau_{n-1/2})/2$.

Система (3.68) не содержит значений консервативных переменных на целых временных слоях и при непостоянных шагах по времени формально имеет первый порядок аппроксимации. То, что эта система эквивалентна системе (3.39), имеющей второй порядок аппроксимации, говорит о том, что члены первого порядка малости в структуре невязки являются дивергентными и при суммировании взаимно уничтожаются.

П.9. Свойства акустического приближения

Исследуем свойства акустического приближения балансно-характеристических разностных схем на постоянном фоновом течении с параметрами (ρ^*, u^*, p^*) при $F_\rho = F_\rho u = F_E = 0$. Полагая $\bar{\phi}_i^n = \bar{\phi}^* + \delta \bar{\phi}_i^n$, $\bar{\Psi}_{i+1/2}^{n+1/2} = \bar{\Psi}^* + \delta \bar{\Psi}_{i+1/2}^{n+1/2}$ и подставляя возмущенные величины в систему (3.40), с точностью до величин второго порядка малости приводим ее к виду

$$\frac{\delta \bar{\Psi}_{i+1/2}^{n+1/2} - \delta \bar{\Psi}_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (\Omega^*)^{-1} \cdot \Lambda^* \cdot \Omega^* \cdot \frac{\delta \bar{\phi}_{i+1}^n - \delta \bar{\phi}_i^n}{h_{i+1/2}} = 0. \tag{3.69}$$

Учитывая, что $\delta \bar{I}_{i+1/2}^{n+1/2} = \dot{\Psi}^* \cdot \delta \bar{I}_{i+1/2}^{n+1/2}$, $\delta \bar{I}_i^n = \dot{\Psi}^* \cdot \delta \bar{\phi}_i^n$, получаем:

$$\frac{(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\delta I_k)_i^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \lambda_k^* \cdot \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_{i+1}^n}{h_{i+1/2}} = 0. \tag{3.70}$$

Здесь и далее $k = 1, 2, 3$. Аналогичным образом система (3.39) представляется в виде

$$\frac{(\delta I)_{i+1/2}^{n+1} - (\delta I)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \lambda_k^* \cdot \frac{(\overline{\delta I_k})_{i+1} - (\overline{\delta I_k})_{i+1}}{h_{i+1/2}} = 0. \quad (3.71)$$

Соотношения (3.46) после линеаризации записываются как

$$\begin{aligned} (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} &= 2 \cdot (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\delta I_k)_i^n, \quad \text{if } \lambda_k^* \geq 0; \\ (\delta I_k)_i^{n+1} &= 2 \cdot (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\delta I_k)_{i+1}^n, \quad \text{if } \lambda_k^* < 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Разностные уравнения (3.70), (3.71) и соотношения (3.72) представляют собой замкнутую систему. Отметим, что процедура нелинейной коррекции (3.50), (3.51) на данном этапе не рассматривается. Покажем, что эта система является бездиссипативной.

Вычитая (3.70) из (3.71), находим:

$$\frac{(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1} - (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \lambda_k^* \cdot \frac{(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = 0, \quad (3.73)$$

откуда получаем

$$(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1} = (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - \frac{(CFL_k^*)^{n+1/2}}{2} \cdot [(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_i^{n+1}] = 0, \quad (3.74)$$

где $(CFL_k^*)^{n+1/2} = (\tau_{n+1/2} \cdot |\lambda_k^*|) / h_{i+1/2}$.

Из (3.69) следует

$$(\delta I_k)_i^n = (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} + \frac{(CFL_k^*)^{n+1/2}}{2} \cdot [(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_i^n] = 0.$$

Из двух последних соотношений находим:

$$(\overline{\delta I_k})_{i+1/2} = (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - \frac{(CFL_k^*)^{n+1/2}}{4} \{ [(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_i^{n+1}] - [(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_i^n] \} = 0. \quad (3.75)$$

Умножая (3.71) на $(\overline{\delta I_k})_{i+1/2}$, получаем:

$$\frac{[(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1}]^2 - [(\delta I_k)_{i+1/2}^n]^2}{2 \cdot \tau_{n+1/2}} + \frac{(CFL_k^*)^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}} \cdot (\overline{\delta I_k})_{i+1/2} \cdot [(\overline{\delta I_k})_{i+1} - (\overline{\delta I_k})_i] = 0. \quad (3.76)$$

Пусть для определенности, $\lambda_k^* \geq 0$. Тогда, согласно (3.72),

$$(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} + (\delta I_k)_i^n}{2} = \frac{(\overline{\delta I_k})_{i+1} + (\overline{\delta I_k})_i}{2} + \frac{(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_i^n}{4} - \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_i^n}{4},$$

откуда следует:

$$\frac{(W_k)_{i+1/2}^{n+1} - (W_k)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\Phi_k)_{i+1}^{n+1/2} - (\Phi_k)_i^{n+1/2}}{h_{i+1/2}} = 0, \quad (3.77)$$

где

$$(W_k)_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} [(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1}]^2 + \frac{(h_{i+1/2})^2}{8} (CFL_k^*)^{n+1/2} \left[1 - (CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2} \right] \left[\frac{(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} \right]^2; \quad (3.78)$$

$$(\Phi_k)_{i+1}^{n+1/2} = \frac{\lambda_k^* \cdot [(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} + (\delta I_k)_i^n]^2}{8}. \quad (3.79)$$

К такому же результату мы придем и при $\lambda_k^* < 0$.

Выражение (3.78) представляет собой квадратичную форму, положительно определенную при условиях $(CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2} < 1$, поэтому линейную комбинацию

$$\hat{A}^{n+1} = \sum_{i \in \omega} \left[\sum_{k=1}^3 \alpha_k \cdot (W_k)_{i+1/2}^{n+1} \right] \cdot h_{i+1/2}, \quad \alpha_k > 0 \quad (3.80)$$

можно трактовать как квадрат нормы решений системы (3.70)–(3.72) или как полную энергию соответствующих акустических возмущений. Из (3.77) следует, что на сеточных функциях с компактным носителем на каждом временном интервале выполняется равенство $\hat{A}^{n+1} = \hat{A}^n$, свидетельствующее о полном отсутствии в разностных уравнениях (3.70)–(3.72) т. н. аппроксимационной вязкости.

Следует отметить, что поскольку в определении энергии (3.78) входят величины $(CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2}$, то она будет зависеть от ширины временного интервала (временного шага) $\tau_{n+1/2}$, и при переменных шагах по времени на каждом временном интервале значения полной энергии будут отличаться, однако в пределах одного временного шага энергия всегда будет сохраняться.

Условие положительной определенности квадратичной формы (3.80) является достаточным условием линейной устойчивости балансно-характеристических разностных схем на постоянном фоне.

Для исследования дисперсионных свойств линейной системы уравнений (3.70)–(3.73) рассмотрим ее частные решения в виде комбинации бегущих волн:

$$(\delta I_k)_j^n = \beta_k \cdot \exp[i \cdot (\omega \cdot t_n - m \cdot x_j)], \quad (\delta I_k)_{j+n/2}^\mu = \chi_k \cdot \exp[i \cdot (\omega \cdot t_\mu - m \cdot x_{j+n/2})], \quad (3.81)$$

где $\mu = n, n+1/2$.

Подставляя (3.81) в (3.70)–(3.72), находим:

$$\chi_k \cdot \left[\sqrt{(\eta_k)^{n+1/2}} - 1 \right] + \beta_k \cdot \frac{(CFL_k^*)^{n+1/2}}{2} \cdot [\exp(-i \cdot \theta/2) - \exp(i \cdot \theta/2)] = 0; \quad (3.82)$$

$$\chi_k \left[(\eta_k)^{n+1/2} - 1 \right] + \beta_k \cdot \frac{[(\eta_k)_{j+n/2}^{n+1/2} + 1] \cdot (CFL_k^*)^{n+1/2}}{2} \cdot [\exp(-i \cdot \theta/2) - \exp(i \cdot \theta/2)] = 0; \quad (3.83)$$

$$\beta_k \cdot (\eta_k)^{n+1/2} \cdot \exp(-i \cdot \theta/2) = 2 \cdot \chi_k \cdot \sqrt{(\eta_k)^{n+1/2}} - \beta_k \cdot \exp(i \cdot \theta/2), \quad \text{if } \lambda_k^* \geq 0; \quad (3.84)$$

$$\beta_k \cdot (\eta_k)^{n+1/2} \cdot \exp(i \cdot \theta/2) = 2 \cdot \chi_k \cdot \sqrt{(\eta_k)^{n+1/2}} - \beta_k \cdot \exp(-i \cdot \theta/2), \quad \text{if } \lambda_k^* < 0.$$

Здесь $\theta = m \cdot h_{n+1/2}$ – т. н. приведенное волновое число, лежащее на отрезке $[0, 2\pi]$, $(\eta_k)^{n+1/2} = \exp(i \cdot \omega \cdot \tau_{n+1/2})$ – модуль перехода на следующий временной слой. Исключая $\sqrt{(\eta_k)^{n+1/2}}$ из (3.82) с помощью (3.84), из требования разрешимости получившейся системы двух линейных уравнений относительно неизвестных α_k, χ_k получаем квадратное уравнение

$$[(\eta_k)^{n+1/2}]^2 - (\eta_k)^{n+1/2} \cdot \left[1 - 2 \cdot (CFL_k^*)_{j+n/2}^{n+1/2} \right] \cdot [1 - \exp(i\theta)] - \exp(i\theta) = 0, \quad (3.85)$$

в точности совпадающее с характеристическим уравнением для схемы «КАБАРЕ», предложенной и исследованной в работах [13], [14]. В частности, в работе [13] показано, что при $(CFL_k^*)_{j+n/2}^{n+1/2} \leq 1$ всегда выполняется свойство $|(\eta_k)^{n+1/2}| \equiv 1$, свидетельствующее об отсутствии у схемы амплитудных ошибок.

Получим дисперсионное соотношение для акустических уравнений (3.70)–(3.72) как функцию от числа Куранта и приведенного волнового числа. Учитывая, что

$$\omega = \frac{1}{\tau_{n+1/2}} \cdot \arctg \left[\frac{\text{Im}(\eta_k)^{n+1/2}}{\text{Re}(\eta_k)^{n+1/2}} \right],$$

находим

$$\frac{\omega}{m \cdot |\lambda_k^*|} = Y(CFL_k^*, \theta) = \frac{1}{CFL_k^* \cdot \theta} \cdot \arctg \left[\frac{\text{Im}(\eta_k)^{n+1/2}}{\text{Re}(\eta_k)^{n+1/2}} \right]. \quad (3.86)$$

Величина $\Delta(CFL_k^*, \theta) = Y(CFL_k^*, \theta) - 1$ представляет собой приведенную фазовую ошибку схемы. В работе [13] показано, что при $CFL_k^* = 1$ и $CFL_k^* = 0,5$ фазовая ошибка равна нулю при всех $\theta \in [0, 2\pi]$, и ее отклонение от нуля в области $(CFL, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$ существенно меньше, чем у ранее известных линейных схем. Это говорит о том, что балансно-характеристические схемы обладают улучшенными дисперсионными свойствами.

Следует отметить, что в отличие от других схем, компактность шаблона схемы (3.70)–(3.72) позволяет проводить анализ ее дисперсионных свойств на переменных пространственно-временных расчетных сетках.

Совпадение характеристического уравнения (3.85) у схемы (3.70)–(3.72) и схемы «КАБАРЕ» не является случайностью. Покажем, что схема (3.70)–(3.72) сводится к схеме «КАБАРЕ». Сдвигая индекс n в уравнении (3.73) вниз на единицу и складывая результат с (3.69), получаем:

$$\frac{(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\delta I_k)_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + \lambda_k^* \cdot \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_{i+1}^{n-1}}{h_{i+1/2}} = 0, \quad \tau_n = 0,5 \cdot (\tau_{n+1/2} + \tau_{n-1/2}). \quad (3.87)$$

Это уравнение совместно с (3.72) называют двухслойным представлением схемы «КАБАРЕ» [10]. Исключая отсюда промежуточные значения квазиинвариантов, приходим к известному трехслойному представлению [13], [14]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_{i+1}^{n-1}}{\tau_n} + \frac{(\delta I_k)_i^n - (\delta I_k)_i^{n-1}}{\tau_n} \right] + \lambda_k^* \cdot \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_{i+1}^{n-1}}{h_{i+1/2}} &= 0, \quad \lambda_k^* \geq 0, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{(\delta I_k)_i^{n+1} - (\delta I_k)_i^n}{\tau_n} + \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_{i+1}^{n-1}}{\tau_n} \right] + \lambda_k^* \cdot \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_{i+1}^{n-1}}{h_{i+1/2}} &= 0, \quad \lambda_k^* < 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

П.10. Некоторые вычислительные свойства нового алгоритма

Поскольку линейные уравнения (3.70)–(3.72) обладают вторым порядком аппроксимации, то, согласно теореме Годунова, их решения не будут обладать свойством монотонности на разрывных решениях. Ситуацию исправляет процедура монотонизации (3.50), (3.51). При $\lambda_k \geq 0$ в акустическом приближении ее можно записать как:

$$\left[(\delta \tilde{I}_k)_{i+1}^{n+1} \right]_{i+1/2} = \begin{cases} (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} & \text{if } \min(\delta I_k)_D \leq (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} \leq \max(\delta I_k)_D \\ \min(\delta I_k)_D & \text{if } (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} < \min(\delta I_k)_D \\ \max(\delta I_k)_D & \text{if } (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} > \max(\delta I_k)_D \end{cases}. \quad (3.89)$$

3.2.3. Примеры расчетов

Для полной системы уравнений газовой динамики процедура коррекции квазиинвариантов (3.50), (3.51) обеспечивает монотонность разрывных решений независимо от их интенсивности. На рисунках 3.22–3.23 приведены графики сверхслабой

и сверхсильной ударных волн. Степень «размазывания» их фронтов одинакова и составляет одну ячейку. Если по постоянному фону пустить вначале сверхслабую волну $\Delta p/p \approx 10^{-5}$, а за ней вдогонку – сверхсильную ($\Delta p/p \approx 10^6$), то наличие сверхсильной волны никак не повлияет на качество разрешимости сверхслабой.

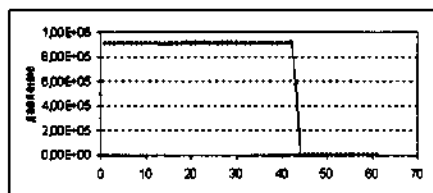


Рис. 3.22. Сверхсильная ударная волна

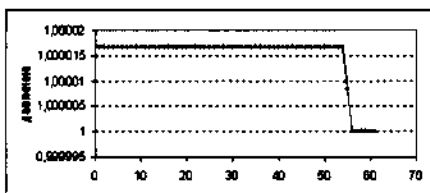


Рис. 3.23. Сверхслабая ударная волна

Перенос акустической волны: влияние вида локальных инвариантов Римана на точность расчета

Рассмотрим перенос по однородному фону одномерной акустической волны, которая задается на входе в расчетную область, покрытую равномерной расчетной сеткой с

$$p = p_{\infty} + p', \quad p' = \varepsilon p_{\infty} \sin(2\pi x / \lambda - \omega t), \quad u = u_{\infty} + (p - p_{\infty}) / \rho_{\infty} c_{\infty}, \quad \rho = \rho_{\infty} \left(\frac{p}{p_{\infty}} \right)^{1/\gamma};$$

$$0 \leq x/L \leq 1, \quad \lambda/\Delta x = 14, \quad \omega = \frac{2\pi}{\lambda} c_{\infty}, \quad \varepsilon = 10^{-5}, \quad p_{\infty} = 1, \quad u_{\infty} = 1, \quad p_{\infty} = 1. \quad (3.90)$$

Граничные условия на левой и правой границах области соответствуют дозвуковому входу и выходу потока.

На рисунке 3.26а показано характерное мгновенное распределение давления, полученное из численного решения уравнений Эйлера. Это решение получено с использованием «линейных» локальных инвариантов Римана (3.45). Аналогичное решение получается и при использовании «нелинейных по энтропии» инвариантов (3.62), (3.63). По сравнению с аналитическим решением (Ехаст) в численном решении (CABARET_L) наблюдается некоторая разница в амплитуде и сдвиг по фазе. Эти различия возникают из-за неточностей характеристической декомпозиции. Вследствие отсутствия полного согласования локальный инвариант, приходящий с потока на бесконечности и заданный на входе в область, наряду с входящей акустической волной, содержит небольшую примесь волны, бегущую в противоположном направлении. При использовании «изэнтропийных» локальных инвариантов (CABARET) численное решение практически не отличается от аналитического (рис. 3.24б).

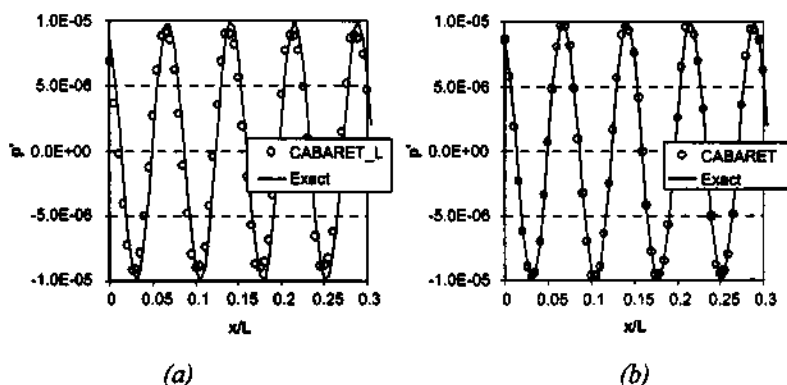


Рис. 3.24. Влияние формы локальных инвариантов Римана на точность расчета:
(а) решение на основе локальной линейизации (CABARET_L),
(б) решение на основе «изэнтропических» инвариантов (CABARET)

Распространение акустической волны через сеточный разрыв

Рассмотрим задачу о переносе акустической волны в покоящейся среде $p' = p(x, t) - \bar{p}$, $p' / \bar{p} = \varepsilon \sin(\omega t - kx)$, $k = \omega / \bar{c}$, где $\bar{p}$, $\bar{c}$ – фоновые значения давления и скорости звука среды и амплитуда волны $\varepsilon = 10^{-5}$.

В расчетной области вводится сетка, соответствующая резкому расширению длины сеточного интервала в центре области:

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad 0 \leq x < 0,5; \quad x_{i+1} - x_i = 3 \cdot h, \quad 0,5 < x \leq 1. \quad (3.91)$$

Частота падающей волны соответствует разрешению сетки в левой части области, в терминах числа ячеек на длину волны $N_\lambda = 2\pi / (k \cdot h)$, равному 20. Сеточное разрешение длины волны в правой части области соответствует коротким волнам $N_\lambda = 6 - 7$.

На рисунке 3.25 приведены численные решения (а) без использования коррекции, (б) с использованием полной процедуры коррекции. Решение «КАБАРЕ» с модификацией алгоритма коррекции (2.4d) при $\alpha = 0,001$ приводит к таким же результатам, как на рисунке 3.24(б). Все расчеты проводились с использованием «изэнтропических» локальных инвариантов. Для всех расчетов было подтверждено отсутствие паразитных отражений от сеточной неоднородности. Как следует из сравнения с аналитическим решением, использование основного алгоритма коррекции приводит к затуханию амплитуды сигнала на грубой сетке. Это затухание не происходит даже при небольшом расширении области допустимых изменений решения в рамках модифицированного алгоритма нелинейной коррекции.

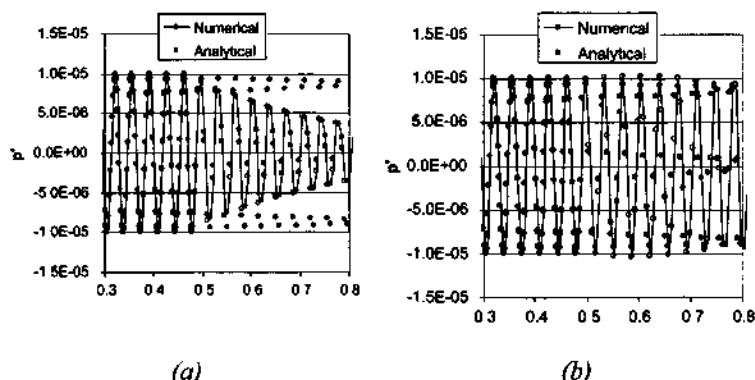


Рис. 3.25. Влияние использования нелинейной коррекции потоков на точность расчетов для задачи о переносе акустической волны на сетке с разрывом гладкости в точке $x=0,5$:

(а) с использованием основного алгоритма коррекции, (б) без использования коррекции/с модифицированным алгоритмом коррекции при $\alpha = 0,001$

Рефракция акустической волны на контактном разрыве

Рассматривается перенос акустической волны в неподвижной среде, но, в отличие от предыдущего примера, среда не является однородной, а содержит контактный разрыв: $(\bar{\rho}_1, \bar{u}, \bar{p}) = (1, 0, 1)$, $x < x_0$; $(\bar{\rho}_2, \bar{u}, \bar{p}) = (\beta, 0, 1)$, $x > x_0$.

Рассмотрим два случая $\beta = 0, 1; 10$.

Решение задачи перед разрывом представляет собой падающую акустическую волну и отраженную волну, за разрывом решение состоит из одной прошедшей волны. В силу малости амплитуды волны полное решение соответствует решению линеаризованных уравнений Эйлера. Решение линейной задачи состоит из отраженной и прошедшей волн, которые излучаются на частоте падающей волны. Скорость звука волн соответствует параметрам среды по обе стороны контактного разрыва. Незвестные амплитуды находятся из условий сохранения скорости и давления на разрыве. Соответствующее аналитическое решение выписано ниже:

$$\begin{aligned}
 p'(x, t) / \bar{p} &= \varepsilon \sin(\omega t - k_1(x - x_0)) - \varepsilon \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \sin(\omega t + k_1(x - x_0)), \quad 0 \leq x \leq x_0; \\
 p'(x, t) / \bar{p} &= \varepsilon \frac{2\xi}{1 + \xi} \sin(\omega t - k_2(x - x_0)), \quad x_0 < x < 0,5; \\
 \xi &= \sqrt{\beta}, \quad k_1 = \omega / \bar{c}_1, \quad k_2 = \omega / \bar{c}_2, \quad x_0 = 0,1, \quad \varepsilon = 10^{-5},
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

где $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ – скорости перед и за контактным разрывом.

На рисунке 3.26 представлено сравнение полученных решений для случаев переноса акустической волны из плотной среды в разреженную, и наоборот, при $\beta = 0,1$ и $\beta = 10$. В обоих расчетах наименьшая длина акустической волны соответствует разрешению $\sim 7-8$ ячеек на длину волны. В расчетах использовались «изэнтропические» локальные инварианты и модифицированный алгоритм коррекции при $\alpha = 0,001$. Несмотря на недостаточное сеточное разрешение, результаты расчетов показали хорошее согласие с аналитическим решением.

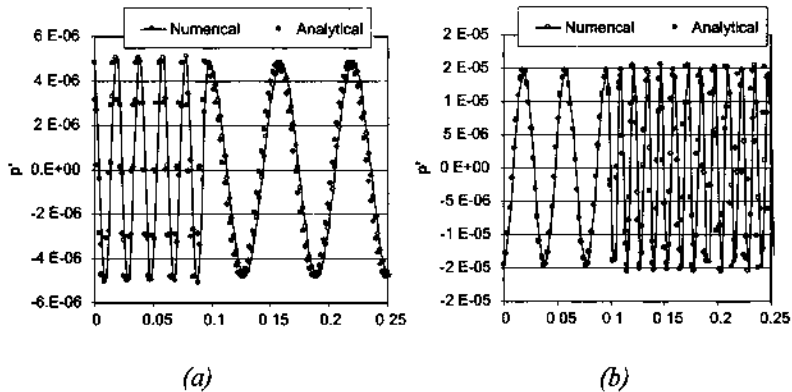


Рис. 3.26 Решение задачи об отражении и рефракции акустической волны от контактного разрыва, расположенного в точке $x=0,1$ при (a) $\beta = 0,1$, (b) $\beta = 10$

3.2.4. Исследование точности балансно-характеристического алгоритма на модельных задачах

Несмотря на обилие тестовых задач, задействованных в публикациях по численным методам в газовой динамике, результатов, пригодных для аккуратного количественного анализа точности различных методик, сравнительно немного. Ниже рассматриваются две наиболее часто цитируемые модельные задачи, для которых известны результаты расчетов по другим, т. н. алгоритмам «высокой разрешающей способности».

Задача Чу – Ошера

Рассмотрим прохождение сильной ударной волны по неподвижному фону с синусоидально возмущенной плотностью (задача Чу – Ошера) [15], [16]. Следуя работе [12], возьмем начальные данные в виде:

$$\begin{aligned} \rho_L &= 3,857143; & u_L &= 2,629369; & p_L &= 10,333333; & \text{when } x < -4; \\ \rho_R &= 1 + \varepsilon \cdot \sin(\lambda \cdot x); & u_R &= 0; & p_R &= 1; & \text{when } x \geq -4; \end{aligned}$$

$$x \in [-5, 5], \quad \varepsilon = -0,2, \quad \lambda = 5\pi, \quad t_{\text{contr}} = 1,8,$$

для которых имеются количественные результаты сходимости решения на момент времени t_{contr} на последовательности сгущающихся сеток. В оригинальной постановке [11] использованы параметры $\varepsilon = 0,2$, $\lambda = 5\pi$, однако там нет количественных результатов.

На рисунке 3.27 приведено сравнение графиков плотности на момент t_{contr} на сетке с числом расчетных узлов $N = 201$ (маркеры – точки) и «эталонной» сетке с $N = 9601$ (сплошная линия).

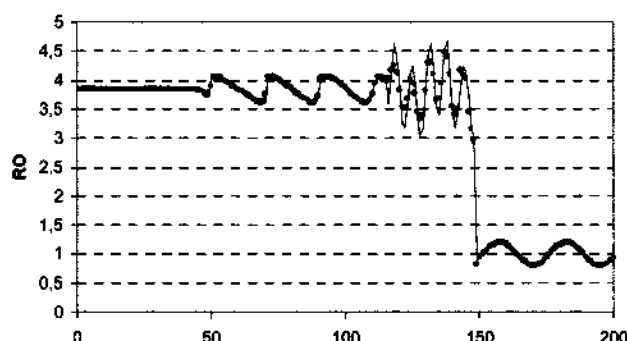


Рис. 3.27. Графики плотности на момент t_{cont} на сетке с числом расчетных узлов $N = 201$ (маркеры – точки) и «эталонной» сетке с $N = 9601$ (сплошная линия)

В таблице 3.5 приведены значения отклонения плотности, полученной в расчетах на последовательности сгущающихся сеток ($N = 201, 401, 801, 1601, 3201$) по балансно-характеристической схеме (BCHM), в нормах L_1 и C^* . В качестве точного решения берется «эталонное решение» при $N = 9601$. Здесь NT обозначает количество временных шагов, которое потребовалось при заданном количестве узлов для достижения контрольного времени.

Кроме того, в указанной таблице приводятся данные, заимствованные из работы [12], о сходимости на этой задаче методик PLIMDE и WENO.

Таблица 3.5. Значения отклонения плотности, полученной в расчетах на последовательности сгущающихся сеток различными методами

N-1	PLIMDE			WENO			BCHM		
	NT	L_1	C^*	NT	L_1	C^*	NT	L_1	C^*
200	250	0,01858	0,429	334	0,02104	0,902	229	0,02190	0,12110
400	466	0,01837	0,188	634	0,01959	0,667	462	0,01007	0,14670
800	903	0,01669	0,290	1235	0,01626	0,369	927	0,00580	0,24008
1600	1774	0,007018	0,185	2443	0,004001	0,572	1856	0,00226	0,53380
3200	3514	0,002423	0,230	4857	0,001358	0,399	3716	0,00135	0,13240

Следует отметить, что определение нормы в работе [12] отличаются от общепринятого. Так,

$$\|E\|_{L_1} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N E_i; \quad E_i = \frac{|S(i) - S_c(i)|}{|S_c(i)|}; \quad \|E\|_{C^*} = \max_{(1, \dots, N)} (E_i).$$

В этих же понятиях оценивалась и невязка балансно-характеристической схемы.

Из таблицы 3.5 видно, что балансно-характеристическая схема имеет преимущества как по точности, так и по быстродействию.

Задача *Blast Wave* [17]

Начальные данные:

$$\bar{\varphi}(x, t) = \begin{cases} \bar{\varphi}_L & \text{if } 0,0 < x < 0,1 \\ \bar{\varphi}_M & \text{if } 0,1 < x < 0,9, \\ \bar{\varphi}_R & \text{if } 0,9 < x < 1,0 \end{cases}$$

где

$$\bar{\varphi}^T = (\rho, u, p), \quad \rho_L = \rho_M = \rho_R = 1, \quad u_L = u_M = u_R = 0, \quad p_L = 10^3, \quad p_M = 10^{-2}, \quad p_R = 10^2.$$

Граничные условия при $x=0$ и $x=1$ соответствуют неподвижным отражающим стенкам.

Задача решалась на последовательности сгущающихся сеток с числом расчетных ячеек $N = 200, N = 300, N = 400, N = 600, N = 800, N = 1200$ и $N = 1600$. Сравнение проводилось с т. н. «эталонным решением», полученным на сетке с числом расчетных узлов $N = 4800$ на момент времени $T_1 = 0,038$. В таблице 3.6 приведены значения невязки плотности в норме L_1^h и затрат времени центрального процессора (CPU) для семи различных численных методов:

- MC – схема МакКормака (R. MacCormack) с дополнительной искусственной вязкостью Лапидуса (A. Lapidus);
- ETBFCT – алгоритм, основанный на методе нелинейной коррекции потоков Бориса и Бука (Boris and Book);
- MUSCL – модификация схемы Годунова второго порядка аппроксимации;
- PPMDE – одношаговый вариант кусочно-параболического метода [14];
- BCM – балансно-характеристический метод.
- Данные по методам MacCormack, BBC, ETBFCT, Godunov, MUSCL, PPMDE, заимствованы из работы [13]. Время загрузки центрального процессора отнормировано на самый быстрый метод на самой грубой сетке. Быстродействие балансно-характеристического метода определялось на основе экспертной оценки и полагалось равным быстродействию схемы МакКормака с искусственной вязкостью.

Таблица 3.6. Сравнение быстродействия различных численных методов

	$\ \Delta\rho\ $	CPU	$\ \Delta\rho\ $	CPU	$\ \Delta\rho\ $	CPU	$\ \Delta\rho\ $	CPU	$\ \Delta\rho\ $	CPU	$\ \Delta\rho\ $	CPU
MC	0,261	1,000	0,209	2,140	0,181	3,777	0,143	8,381	0,11	14,78	0,086	33,058
ETBFCT	0,227	4,928	0,179	10,46	0,130	18,41	0,103	40,28	0,07	71,22	0,061	158,27
MUSCL	0,162	4,892	0,123	10,54	0,100	18,59	0,072	41,00	0,05	72,30	0,040	161,51
PPMDE	0,099	5,935	0,064	12,66	0,047	22,30	0,030	49,28	0,02	87,05	0,014	193,16
BHCM	0,095	1,000	0,064	2,140	0,054	3,777	0,042	8,381	0,02	14,78	0,019	33,058
	N = 200		N = 300		N = 400		N = 600		N = 800		N = 1200	

Из таблицы 3.6 видно, что балансно-характеристический метод на грубых сетках по точности превосходит все остальные, кроме того, он почти на порядок экономичнее кусочно-параболического метода. По точности и быстродействию BCM заметно превосходит и другие методы высокого разрешения, относящиеся к классу TVD-, TVB- и ENO-схем [2], не представленные в таблице.

На рис. 3.28–3.29 приведено сравнение профилей плотности приближенных решений, полученных на расчетных сетках с 200 и 1200 ячейками и отмеченных маркерами, с «эталонным» решением, представленным непрерывной линией.

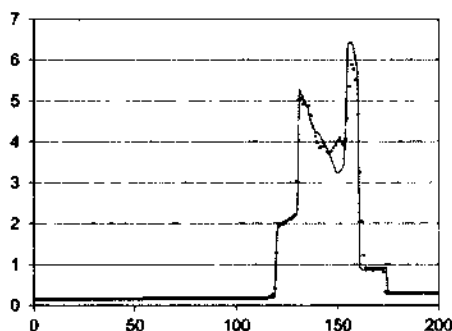


Рис. 3.28. Профили плотности приближенного решения, полученного на расчетной сетке 200 ячеек (маркеры – численное решение, сплошная линия – эталонное решение)

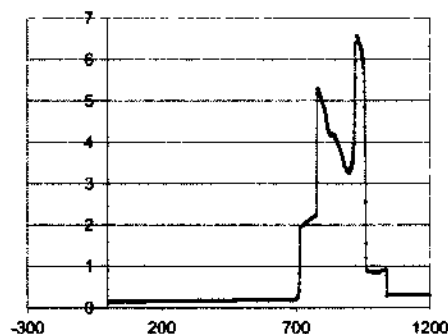


Рис. 3.29. Профили плотности приближенного решения, полученного на расчетной сетке 1200 ячеек (маркеры – численное решение, сплошная линия – эталонное решение)

Усложненный вариант задачи Чу – Ошера

Рассмотрение тестовых задач в одномерном случае закончим модифицированным тестом Чу – Ошера [18] о взаимодействии ударной волны с периодическим фоном плотности. Задача Чу – Ошера является тестовой для расчетов взаимодействия ударной волны с турбулентным пограничным слоем. Вслед за [19] рассмотрим усложненный вариант этой задачи с начальными условиями

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 515695; 0, 523346; 1, 80500) & \text{for } x < -4,5, \\ (1 + 0,1 \sin(20\pi x); 0; 1) & \text{for } x \geq -4,5, \end{cases} \quad (3.93)$$

которые соответствуют ударной волне с числом Маха 1,1, набегающей на периодически возмущенный фон плотности. В результате взаимодействия ударной волны и фона возникают высокочастотные осцилляции за фронтом ударной волны. Задача решается до контрольного времени $t = 5$. Частота осцилляций фона и контрольное время в несколько раз больше, чем в стандартном тесте Чу – Ошера. В расчетах используется однородная расчетная сетка в 2000 ячеек, аналогично используемая в литературе. Полученное решение сравнивается с эталонным решением на подробной сетке в 20 000 ячеек. Для решения используется схема «КАБАРЕ» с «изоэнтропическими» локальными инвариантами.

На рисунке 3.30 представлен профиль плотности в контрольный момент времени, полученный с использованием основного алгоритма коррекции. Как видно из сравнения с решением на подробной сетке, высокочастотные осцилляции заметно сглажены за фронтом ударной волны. Аналогичное затухание численного решения было также отмечено для схем класса ВЕНО четвертого порядка (WENO-FORCE и WENO-FLIC). Расширение области допустимых изменений решения в рамках модифицированного алгоритма «КАБАРЕ» при $\alpha = 0,01$ приводит к полному устранению этого численного дефекта.

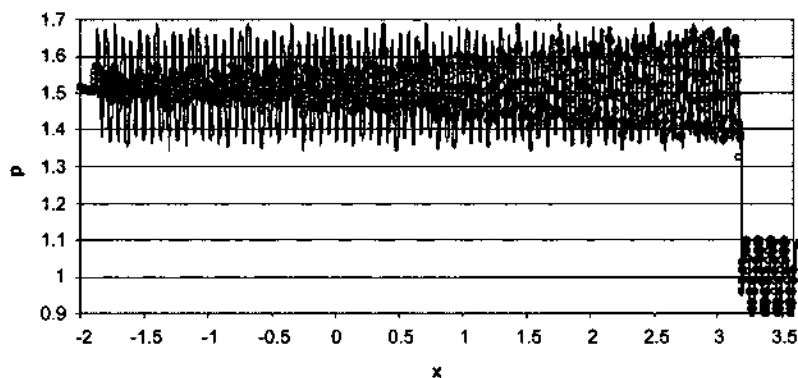


Рис. 3.30. Распределение плотности в контрольный момент времени $t = 5$ — сравнение с решением на подробной сетке при использовании основного алгоритма коррекции

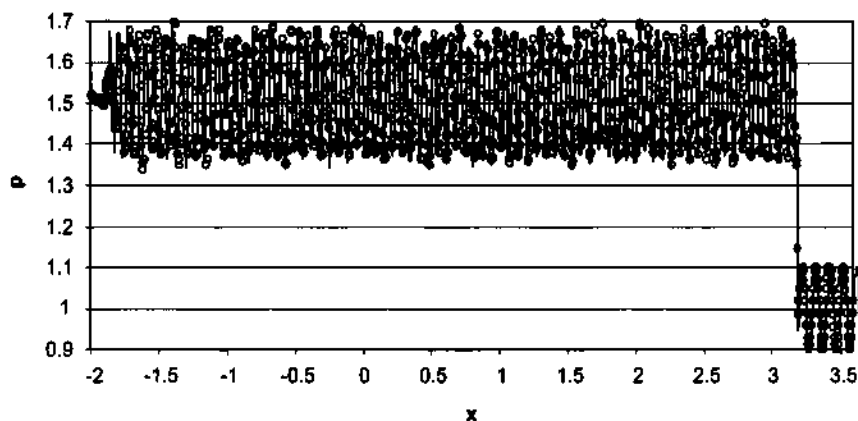


Рис. 3.31. Распределение плотности в контрольный момент времени $t = 5$ – сравнение с решением на подробной сетке при использовании модифицированного алгоритма коррекции

Заключение к главе 3

В заключение остановимся на основных чертах балансно-характеристического подхода и отличиях балансно-характеристических схем от уже известных. Разделение переменных на «консервативные» и «потокосые» не является чем-то принципиально новым – во всех «консервативных» схемах, в том числе и т. н. «схемах высокой разрешающей способности» работают с консервативными переменными $\bar{z}$ и потоками $\bar{J}$, которые вычисляются по тому или иному правилу по уже известным консервативным переменным: $\bar{J}^n = J(\bar{z}^n)$. В новом подходе для вычисления новых потоковых переменных используются не только консервативные, но и потоковые переменные с предыдущего временного слоя, т. е. $\bar{J}^n = J(\bar{z}^n, \bar{J}^{n-1})$. Это обстоятельство принципиально меняет роль потоковых переменных, превращая их из пассивных участников процесса вычислений (по существу простых идентификаторов) – в активных.

Чрезвычайно важным для всех без исключения численных методов в газовой динамике является свойство консервативности [1] – они должны фиксировать дискретные законы сохранения массы, импульса и энергии. Это гарантирует точное выполнение соотношений Гюгоньо на сильных разрывах. В новом подходе дискретные законы сохранения гарантированно выполняются для т. н. «консервативных» переменных. Равноправный статус «потокосых» переменных позволяет использовать для их определения другие формы записи исходных уравнений или их следствия. В настоящей работе для этих целей предложено использовать метод характеристик, однако этим набор открывающихся возможностей не исчерпывается.

Характеристическая форма записи уравнений (3.36)–(3.37) в описанном алгоритме используется только для обоснования введения в рассмотрение той или иной формы т. н. Римановых «квазиинвариантов». Общий подход к их «конструированию» состоит в следующем: матрица Ω в пределах пространственно-временной расчетной ячейки аппроксимируется такой матрицей $\Omega_{i+1/2}^{n+1/2}$, что ее строки представляют собой интегрирующие множители, т. е.

$$(\omega_{k,1})_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot d\rho + (\omega_{k,2})_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot du + (\omega_{k,3})_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot dp = d(\mathfrak{N}_k)_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad k=1,2,3. \quad (3.94)$$

Достаточно важным представляется также требование о непрерывности квазиинвариантов на контактных разрывах. Остающейся свободой можно распорядиться по-разному, в зависимости от специфики решаемой задачи. Как только вид квазиинвариантов определен, нахождение их новых значений опирается не на численное решение уравнений (3.36), (3.37), а только на формулы линейной экстраполяции и ограничения (3.50), (3.51), вытекающие из характеристической природы этих уравнений.

Центральным элементом новой методики является прием монотонизации численного решения в окрестностях сильных и слабых разрывов, базирующейся на требовании выполнения неравенств (3.47), определяющих само понятие монотонности для уравнений газовой динамики. Коррекция квазиинвариантов, в соответствии с (3.50) и (3.51), не нарушает консервативности метода и не накладывает «нефизических» ограничений на получаемое решение. Кроме того, ограничения (3.47) не всегда приводят к уменьшению полной вариации численного решения, характерному для TVD-схем. Предложенный метод монотонизации можно назвать методом «прямого действия», он не содержит никаких настроечных параметров, и результаты модельных расчетов свидетельствуют о его абсолютной эффективности во всех диапазонах рассчитываемых течений.

Балансно-характеристический метод является явным, и он устойчив при числах Куранта, меньших единицы. Расчеты показывают, что монотонность численного решения в окрестности разрывов при используемом методе монотонизации сохраняется при числах Куранта, меньших одной второй.

Важное преимущество балансно-характеристических схем перед известными схемами высокого разрешения [7], помимо алгоритмической простоты и эвристической продуктивности, заключается в том, что они определены на фиксированном компактном вычислительном шаблоне, что существенно облегчает их реализацию на многопроцессорных вычислительных комплексах. Компактность шаблона и его соответствие области зависимости решения приводят к простоте и естественности постановки граничных условий, в том числе и неотражающих. Кроме того, балансно-характеристические схемы не содержат алгоритмов численного решения задачи о распаде произвольного разрыва, что характерно для т. н. схем высокой разрешающей способности и сильно усложняет жизнь при произвольных уравнениях состояния, в особенности табличных.

Балансно-характеристические схемы обладают вторым порядком аппроксимации на неравномерных пространственно-временных расчетных сетках, однако их точность существенно превосходит точность других схем второго порядка за счет отсутствия у них аппроксимационной вязкости и улучшенных дисперсионных свойств. В акустическом приближении при числе Куранта 0,5, т. е. в середине области устойчивости, балансно-характеристические схемы являются точными, что открывает новые возможности для изучения нелинейных эффектов в аэроакустических задачах.

Литература к главе 3

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992.
2. Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза. – М.: Физматлит, 2006. – 303 с.
3. Самарский, А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, 1975.
4. Анучина Н.Н. и др. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
6. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1968.
7. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001.
8. Жуков А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1960. – 58. – С. 1–152.
9. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988.
10. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1968.
11. Бакирова М.И. и др. Разностная схема газовой динамики с использованием параметров Римана // Дифференциальные Уравнения. – 2002. – 38(7). – С. 936–942.
12. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики // Докл. Акад. Наук. – 2005. – 403(4). – Р. 1–6.
13. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. – 1998. – 10(1). – С. 86–100.
14. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы «КАБАРЕ» // Математическое моделирование. – 1998. – 10(1). – С. 101–116.
15. Shu Ch.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // Journal of Computational Physics. – 1989. – 83(1). – Р. 32–78.
16. Greenough J.A., Rider W.J. A quantitative comparison of numerical methods for the compressible Euler equations: fifth-order WENO and piecewise-linear Godunov // Journal of Computational Physics. – 2004. – 196. – Р. 259–281.
17. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Comp. Physics. – 1984. – 54. – Р. 115–173.
18. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. // J. Comput. Phys. – 1988. – 77. – Р. 439–471.
19. Titarev V.A., Toro E.F. WENO schemes based on upwind and centred TVD fluxes // Comput. Fluids. – 2005. – 34. – Р. 705–720.

Обобщение схемы «КАБАРЕ» на двумерные ортогональные расчетные сетки

Переход от одномерных задач газовой динамики к многомерным для схемы «КАБАРЕ» связан с рядом принципиально новых моментов. Первый из них – это процедура пространственного расщепления алгоритма при вычислении новых потоковых переменных. Второй – особенность применения принципа максимума для регуляризации решения неоднородных уравнений переноса локальных инвариантов по различным направлениям.

Для простоты восприятия вначале рассмотрим наиболее простой случай уравнения Эйлера на ортогональных расчетных сетках.

4.1. Консервативная и характеристическая формы представления исходных уравнений

Уравнения газовой динамики представляют собой гиперболическую систему законов сохранения массы, импульса и полной энергии. В случае двух пространственных измерений они имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E u + p u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho E v + p v)}{\partial y} &= 0, \\ E = \varepsilon + (u^2 + v^2)/2, \quad p = P(\rho, \varepsilon).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь ρ – плотность; u, v – компоненты скорости; p – давление; ε – удельная внутренняя энергия; E – полная энергия; уравнение состояния таково, что

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{P}{\rho^2} + \frac{\partial P}{\partial \rho} = c^2 \geq \mu_0 > 0,\tag{4.2}$$

где c – скорость звука.

Систему (4.1) можно представить в т. н. «простой» форме:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = 0, \quad \bar{\varphi}^T = (\rho, u, v, p), \quad (4.3)$$

где

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho \cdot c^2 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \rho \cdot c^2 & v \end{pmatrix}.$$

Уравнение (4.3) можно также трактовать как неоднородное локально-одномерное уравнение переноса как в направлении x :

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = 0, \quad \bar{\varphi}^T = (\rho, u, v, p), \quad (4.4)$$

так и в направлении y

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = -\mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \bar{f}_y, \quad \bar{\varphi}^T = (\rho, u, v, p). \quad (4.5)$$

Обозначим через λ_k^x , $k=1,2,3,4$ собственные числа матрицы $\mathbf{A}_x$. Хорошо известно, и это нетрудно показать вычислениями, что все эти числа действительны и имеют вид:

$$\lambda_1^x = u + c, \quad \lambda_2^x = u - c, \quad \lambda_3^x = u, \quad \lambda_4^x = u. \quad (4.6)$$

Собственные числа матрицы $\mathbf{A}_y$ также действительны:

$$\lambda_1^y = v + c, \quad \lambda_2^y = v - c, \quad \lambda_3^y = v, \quad \lambda_4^y = v. \quad (4.7)$$

Следует отметить, что для обеих матриц третье и четвертое собственные числа совпадают, т. е. имеет место их двойная кратность. Это отражается на способе построения их левых собственных векторов

$$\bar{l}_k^x \text{ и } \bar{l}_k^y.$$

Построим систему векторов $\bar{l}_k^x$. Эти векторы должны удовлетворять системе уравнений:

$$(\bar{l}_k^x)^T \cdot (\mathbf{A}_x - \lambda_k^x \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (4.8)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Для $k=1$ уравнение (4.8) запишем в покомпонентной форме

$$\left\{ (l_1^x)_1, (l_1^x)_2, (l_1^x)_3, (l_1^x)_4 \right\} \cdot \begin{pmatrix} -c & \rho & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & \rho \cdot c^2 & 0 & -c \end{pmatrix} = 0. \quad (4.9)$$

Система уравнений относительно неизвестных $(l_1^x)_1, (l_1^x)_2, (l_1^x)_3, (l_1^x)_4$ является вырожденной. Будем искать ее решение в виде:

$$\left\{ (l_1^x)_1, 1, (l_1^x)_3, (l_1^x)_4 \right\} \cdot \begin{pmatrix} -c & \rho & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & \rho \cdot c^2 & 0 & -c \end{pmatrix} = 0. \quad (4.10)$$

При умножении решения на первый столбец, получаем: $(l_1^x)_1 = 0$, при умножении на третий столбец, находим, что и $(l_1^x)_3 = 0$. Умножение на четвертый столбец приводит к условию:

$$\frac{1}{\rho} - c \cdot (l_1^x)_4 = 0,$$

откуда следует, что $(l_1^x)_4 = \frac{1}{\rho \cdot c}$.

Окончательно получаем

$$(\bar{l}_1^x)^T = \{0, 1, 0, (\rho \cdot c)^{-1}\}. \quad (4.11)$$

Для второго некратного собственного значения $\lambda_2^x = u - c$ аналогично находим:

$$(\bar{l}_2^x)^T = \{0, 1, 0, -(\rho \cdot c)^{-1}\}. \quad (4.12)$$

Для кратных третьего и четвертого собственного значений соответствующая система уравнений будут иметь вид

$$\left\{ (l_m^x)_1, (l_m^x)_2, (l_m^x)_3, (l_m^x)_4 \right\} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho \cdot c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0; \quad m = 3, 4$$

и сводится к системе из двух уравнений

$$\begin{aligned} (l_m^x)_2 \cdot 1/\rho &= 0; \\ (l_m^x)_1 \cdot \rho + (l_m^x)_4 \cdot \rho \cdot c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Выразим неизвестные $(l_m^x)_1, (l_m^x)_2$ через остальные, считая их свободными неизвестными

$$\begin{aligned}(l_m^x)_2 &= 0; \\ (l_m^x)_1 &= -(l_m^x)_4 \cdot c^2 = 0.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Следует отметить, что свободное неизвестное $(l_m^x)_3$ в решение (4.13) не входит. Тем не менее, представим вектор свободных неизвестных в виде комбинации двух независимых векторов в «естественном» базисе:

$$\begin{pmatrix} (l_m^x)_3 \\ (l_m^x)_4 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя первый из базисных векторов в решение (4.13) и дополняя полученные значения компонентами первого базисного вектора, получаем третий собственный вектор:

$$(\bar{l}_3^x)^T = \{0, 0, 1, 0\}.\tag{4.14}$$

Проделявая те же действия со вторым базисным вектором, находим:

$$(\bar{l}_3^x)^T = \{-c^2, 0, 0, 1\}.\tag{4.15}$$

Если составить из полученных левых собственных векторов матрицу Ω_x :

$$\Omega_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & (\rho \cdot c)^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & -(\rho \cdot c)^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{4.16}$$

и умножить на эту матрицу уравнение (4.4), то получим локально-одномерную характеристическую форму этого уравнения:

$$\left\{ \Omega_x \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right\} + \Lambda_x \cdot \left\{ \Omega_x \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \right\} = \Omega_x \cdot \bar{f}_t; \quad \bar{f}_t = -A_y \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y},\tag{4.17}$$

где

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} (\lambda_x)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_x)_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_x)_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_x)_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Аналогичные операции над уравнением (4.5) приводят к локально-одномерной характеристической форме представления и этого уравнения:

$$\left\{ \Omega_y \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \right\} + \Lambda_y \cdot \left\{ \Omega_y \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right\} = \Omega_y \cdot \bar{f}_y; \quad \bar{f}_y = -A_x \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad (4.18)$$

где

$$\Omega_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & (\rho \cdot c)^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(\rho \cdot c)^{-1} \\ -c^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_y = \begin{pmatrix} (\lambda_y)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_y)_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_y)_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_y)_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu + c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu - c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Вычислительные алгоритмы, базирующиеся на дивергентной форме записи уравнений (4.1) и сохраняющие свойство дивергентности на разностном уровне, называются *консервативными* [1]. Консервативные разностные схемы, дополненные процедурами монотонизации численного решения в областях сильных градиентов (искусственная вязкость, нелинейная коррекция потоков), составляют основу современного парка алгоритмов сквозного счета газодинамических задач [2, 3].

Вычислительные схемы, опирающиеся на представление уравнений газовой динамики в форме (4.17), (4.18) получили название *характеристических* [4], или *сеточно-характеристических* [5]. Объединение позитивных свойств консервативных и характеристических схем осуществляется в т. н. «балансно-характеристических схемах», общие подходы к построению которых изложены в работе [6]. Схему «КАБАРЕ» также можно отнести к этому классу.

4.2. Инварианты Римана для баротропных течений

В случае баротропных течений, то есть в случаях, когда уравнение состояния может быть представлено в виде

$$p = F(\rho), \quad (4.19)$$

одномерные уравнения газовой динамики, записанные в характеристической форме, могут быть представлены в виде уравнения переноса неких инвариантов I_k^* , которые принято называть инвариантами Римана:

$$\frac{\partial I_k^*}{\partial t} + \lambda_k^x \cdot \frac{\partial I_k^*}{\partial x} = g_k^x, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.20)$$

Получим инварианты I_k^* для общего случая баротропных течений. В соответствии с определением скорости звука (4.2) в баротропном случае,

$$c^2 = \frac{dP(\rho)}{d\rho} = P'(\rho),$$

и матрица левых собственных векторов приобретает вид:

$$\Omega_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\rho\sqrt{P'(\rho)}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\rho\sqrt{P'(\rho)}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -P'(\rho) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покомпонентная запись системы выглядит как

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho\sqrt{P'(\rho)}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right] + (u+c) \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho\sqrt{P'(\rho)}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] &= g_1^*; \\ \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho\sqrt{P'(\rho)}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right] + (u-c) \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho\sqrt{P'(\rho)}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] &= g_2^*; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= g_3^*; \\ \left[\frac{\partial p}{\partial t} - P'(\rho) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] + u \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial x} - P'(\rho) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] &= g_4^*. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Поскольку $P'(\rho) \cdot d\rho = dp$, то четвертое уравнение этой системы оказывается тождеством и может быть отброшено.

Введем обозначение:

$$\frac{1}{\rho\sqrt{P'(\rho)}} \cdot dp = \frac{1}{F^{-1}(p)\sqrt{P'(p)}} \cdot dp = d\mathcal{F}(p). \quad (4.22)$$

Тогда систему можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[u + \mathcal{F}(p)]}{\partial t} + (u + c) \cdot \frac{\partial[u + \mathcal{F}(p)]}{\partial x} &= g_1^x; \\
\frac{\partial[u - \mathcal{F}(p)]}{\partial t} + (u - c) \cdot \frac{\partial[u - \mathcal{F}(p)]}{\partial x} &= g_2^x; \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= g_3^x.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Так что

$$I_1^x = u + \mathcal{F}(p), \quad I_2^x = u - \mathcal{F}(p), \quad I_3^x = v, \tag{4.24}$$

а инвариант I_4^x не определен и соответствует для изэнтропического течения условию постоянства энтропии, для изотермического случая – условию постоянства температуры.

В частном случае изотермического течения, при уравнении состояния $P = c_l^2 \cdot \rho$ инварианты Римана принимают вид:

$$I_1^x = u + c_l \cdot \ln(p), \quad I_2^x = u - c_l \cdot \ln(p), \quad I_3^x = v; \quad c_l = \text{const} > 0. \tag{4.25}$$

В изэнтропических течениях

$$\begin{aligned}
I_1^x &= u + \frac{2 \cdot c_a}{\gamma - 1}, \quad I_2^x = u - \frac{2 \cdot c_a}{\gamma - 1}, \quad I_3^x = v, \\
c_a &= \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}; \quad \rho = \left[\frac{P}{\exp(s)} \right]^{\frac{1}{\gamma}}; \quad s = \text{const}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

В дальнейшем нам потребуется представление двух первых изэнтропических инвариантов в терминах давления. Из предыдущих соотношений простыми алгебраическими преобразованиями можно получить, что:

$$I_1^x = u + G \cdot p^\mu, \quad I_2^x = u - G \cdot p^\mu, \quad I_3^x = v, \tag{4.27}$$

где

$$G = \frac{2\sqrt{\gamma} \cdot [\exp(s)]^{\frac{1}{2\gamma}}}{\gamma - 1}, \quad \mu = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}. \tag{4.28}$$

Для направления Y локально-одномерная характеристическая система при баротропных течениях аналогичными выкладками приводится к виду:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial [v + \mathcal{F}(p)]}{\partial t} + (v+c) \cdot \frac{\partial [v + \mathcal{F}(p)]}{\partial y} &= g_1^y; \\
 \frac{\partial [v - \mathcal{F}(p)]}{\partial t} + (v-c) \cdot \frac{\partial [v - \mathcal{F}(p)]}{\partial y} &= g_2^y; \\
 \frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} &= g_3^y.
 \end{aligned}
 \quad (4.29)$$

В изотермическом случае это порождает следующие Римановы инварианты:

$$I_1^y = v + c_l \cdot \ln(p), \quad I_2^y = v - c_l \cdot \ln(p), \quad I_3^y = u; \quad c_l = \text{const} > 0. \quad (4.30)$$

Изоэнтропические течения описываются инвариантами

$$I_1^y = v + G \cdot p^\mu, \quad I_2^y = v - G \cdot p^\mu, \quad I_3^y = u. \quad (4.31)$$

4.3. Расчетные сетки и дискретизация физических величин

В прямоугольнике $[X_l, X_r] \times [Y_l, Y_b]$ введем неравномерную расчетную сетку с координатами узлов:

$$(x_{i,j}; y_{i,j}) : \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_L, \quad x_{i+1} > x_i, \quad x_N = x_R, \quad i = 1, \dots, N_x, \\ y_1 = y_b, \quad y_{j+1} > y_j, \quad y_N = y_t, \quad j = 1, \dots, N_y \end{array} \right\}$$

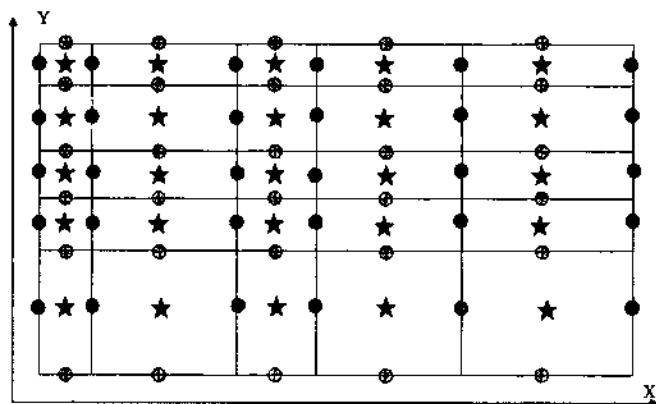


Рис. 4.1. Схематическое изображение проекции сеточных множеств на элементы расчетной сетки. Центры расчетных ячеек, обозначенные красными звездочками, являются носителями сеточных множеств консервативных переменных $\mathcal{H}_\omega$. Середины вертикальных границ, отмеченные коричневыми кружками, являются «точками привязки» дискретных потоковых переменных сеточного множества $\mathcal{H}_\sigma$. Середины горизонтальных границ, обозначенные зелеными кружками, отвечают сеточному множеству $\mathcal{H}_\sigma$ (см. цветную вклейку)

Множество центров вертикальных границ ячеек этой сетки обозначим как $\bar{\omega}_x$; множество центров горизонтальных граней – $\bar{\omega}_y$, а множество центров ячеек – ω . Центры ячеек будем отмечать полуцелыми индексами $(i+1/2, j+1/2)$. Множества сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}_x$, $\bar{\omega}_y$ и ω , будем обозначать как $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$ и $\mathcal{H}_\omega$ соответственно.

Для объединения балансного и характеристического подходов будем использовать как множества узлов $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y$, так и множество ячеек ω расчетной сетки.

Введем два типа дискретных величин: т.н. «консервативные» величины $\bar{\Psi}_\omega^T = (\Theta_{i+1/2, j+1/2}, U_{i+1/2, j+1/2}, V_{i+1/2, j+1/2}, E_{i+1/2, j+1/2}) \in \mathcal{H}_\omega$ и «потокосые» $\bar{\Phi}_{\omega_x}^T = (\rho_{i, j+1/2}, u_{i, j+1/2}, v_{i, j+1/2}, p_{i, j+1/2}) \in \mathcal{H}_x$ и $\bar{\Phi}_{\omega_y}^T = (\rho_{i+1/2, j}, u_{i+1/2, j}, v_{i+1/2, j}, p_{i+1/2, j}) \in \mathcal{H}_y$. Здесь $U_{i+1/2, j+1/2}$, $V_{i+1/2, j+1/2}$ – скорости, $\Theta_{i+1/2, j+1/2}$ – плотности, $E_{i+1/2, j+1/2}$ – полные энергии ячеек, $u_{i, j+1/2}$, $v_{i, j+1/2}$, $u_{i+1/2, j}$, $v_{i+1/2, j}$ – потокосые скорости, $p_{i, j+1/2}$, $p_{i+1/2, j}$ – потокосые давления, $\rho_{i, j+1/2}$, $\rho_{i+1/2, j}$ – потокосые плотности. Таким образом, количество неизвестных сеточных функций в новом подходе в случае двух пространственных измерений в три раза превышает их число в традиционных подходах.

4.4. Консервативная разностная схема второго порядка аппроксимации

Пусть в момент времени t_n известны значения консервативных и потокосых переменных $\bar{\Psi}_\omega^n$ и $\bar{\Phi}_{\omega_x}^n$, $\bar{\Phi}_{\omega_y}^n$. Задавшись величиной временного шага $\tau_{n+1/2} = t_{n+1} - t_n$, для системы дивергентных уравнений запишем неявную разностную схему:

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - \Theta_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho u})_{i+1, j+1/2} - (\overline{\rho u})_{i, j+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\overline{\rho v})_{i+1/2, j+1} - (\overline{\rho v})_{i+1/2, j}}{\Delta y_{i+1/2}} = 0; \\ & \frac{(\Theta U)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - (\Theta U)_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho u^2 + p})_{i+1, j+1/2} - (\overline{\rho u^2 + p})_{i, j+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \\ & + \frac{(\overline{\rho v u})_{i+1/2, j+1} - (\overline{\rho v u})_{i+1/2, j}}{\Delta y_{i+1/2}} = 0; \\ & \frac{(\Theta V)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - (\Theta V)_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho v^2 + p})_{i+1/2, j+1} - (\overline{\rho v^2 + p})_{i+1/2, j}}{\Delta y_{i+1/2}} + \\ & + \frac{(\overline{\rho v u})_{i+1, j+1/2} - (\overline{\rho v u})_{i, j+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0; \\ & \frac{(\Theta E)_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - (\Theta E)_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho e u + p u})_{i+1, j+1/2} - (\overline{\rho e u + p u})_{i, j+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \\ & + \frac{(\overline{\rho e v + p v})_{i+1/2, j+1} - (\overline{\rho e v + p v})_{i+1/2, j}}{\Delta y_{i+1/2}} = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
 E_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} &= \varepsilon_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + 0,5 \cdot U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \cdot U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + 0,5 \cdot V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \cdot V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}; \\
 e_{i,j+1/2}^n &= \varepsilon_{i,j+1/2}^n + 0,5 \cdot u_{i,j+1/2}^n \cdot u_{i,j+1/2}^n + 0,5 \cdot v_{i,j+1/2}^n \cdot v_{i,j+1/2}^n; \\
 e_{i+1/2,j}^n &= \varepsilon_{i+1/2,j}^n + 0,5 \cdot u_{i+1/2,j}^n \cdot u_{i+1/2,j}^n + 0,5 \cdot v_{i+1/2,j}^n \cdot v_{i+1/2,j}^n.
 \end{aligned}$$

Чертой сверху обозначается осреднение по двум временным слоям:

$$\bar{\eta} = (\eta^{n+1} + \eta^n) / 2.$$

Легко увидеть, что эта система обладает вторым порядком аппроксимации как по пространственным переменным, так и по времени. Однако, она пока не является замкнутой, поскольку для вычисления новых консервативных переменных нужно знать новые потоковые переменные, а алгоритм их вычисления пока не определен.

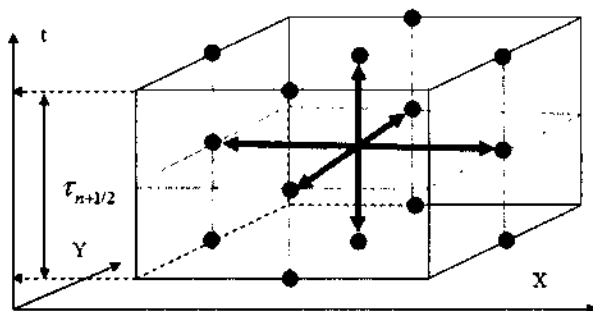


Рис. 4.2. Вычислительный шаблон разностной схемы

4.5. Вычисление промежуточных значений консервативных переменных

Чтобы замкнуть систему (4.32), т. е. разрешить ее относительно новых значений консервативных переменных, как это было отмечено ранее, нужно знать потоковые переменные на новом временном слое.

Вычислим вначале «промежуточные» значения консервативных величин на момент времени $t_{n+1/2} = t_n + 0,5 \cdot \tau_{n+1/2}$ по явной разностной схеме

$$\begin{aligned}
& \frac{\Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho \cdot u)_{i,j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\rho \cdot v)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho \cdot v)_{i+1/2,j}^n}{\Delta y_{j+1/2}} = 0; \\
& \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u^2 + p)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho \cdot u^2 + p)_{i,j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \\
& + \frac{(\rho \cdot v \cdot u)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho \cdot v \cdot u)_{i+1/2,j}^n}{\Delta y_{j+1/2}} = 0; \\
& \frac{(\Theta \cdot V)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot V)_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot v^2 + p)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho \cdot v^2 + p)_{i+1/2,j}^n}{\Delta y_{j+1/2}} + \\
& + \frac{(\rho \cdot v \cdot u)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho \cdot v \cdot u)_{i,j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} = 0; \\
& \frac{(\Theta \cdot E)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot E)_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_{i,j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \\
& + \frac{(\rho \cdot e \cdot v + p \cdot v)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho \cdot e \cdot v + p \cdot v)_{i+1/2,j}^n}{\Delta y_{j+1/2}} = 0; \\
& E_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = \mathcal{E}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + 0,5 \cdot U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} \cdot U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + 0,5 \cdot V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} \cdot V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2},
\end{aligned} \tag{4.33}$$

аппроксимирующей дивергентную форму дифференциальных уравнений (4.1) со вторым порядком точности по пространству и с первым порядком по времени. Следует отметить, что сами промежуточные значения консервативных переменных вычисляются при этом со вторым порядком точности.

Промежуточные консервативные величины понадобятся для вычисления новых значений потоковых переменных на сеточных множествах $\mathcal{H}_\sigma$, $\mathcal{H}_\sigma$.

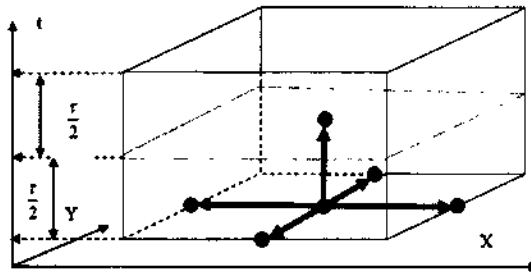


Рис. 4.3. Вычислительный шаблон разностной схемы

4.6. Локальные инварианты и их перенос в пределах одной ячейки расчетной сетки

При вычислении потоковых переменных на новом временном слое будем опираться на неоднородные уравнения переноса локальных римановых инвариантов (4.24), (4.29) в пределах каждой вычислительной ячейки.

Перенос в направлении оси X

Будем считать сплошную среду идеальным газом с уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot \varepsilon, \quad \gamma > 1.$$

Для упрощения записи промежуточных выражений часть дробных индексов $j + 1/2$, там где это не вызывает неоднозначного толкования, будем заменять символом «*».

Рассмотрим характеристическую форму записи исходных уравнений в виде (4.17). В пределах каждой из пространственно-временных расчетных ячеек аппроксимируем матрицу левых собственных векторов Ω близкой ей матрицей $(\Omega_x)_{i+1/2,*}^{n+1/2}$. В простейшем случае это будет матрица с постоянными в каждой ячейке элементами, вычисленными по консервативным переменным на промежуточном временном слое:

$$(\Omega_x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(\Theta \cdot C)_{i+1/2,*}^{n+1/2}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{(\Theta \cdot C)_{i+1/2,*}^{n+1/2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma \cdot \left(\frac{p}{\Theta}\right)_{i+1/2,*}^{n+1/2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

где $(C)_{i+1/2,*}^{n+1/2} = \sqrt{\gamma \cdot \left(\frac{p}{\Theta}\right)_{i+1/2,*}^{n+1/2}}$.

Соответствующие (4.34) собственные числа также будут постоянными в пределах данной ячейки и будут иметь вид:

$$(\lambda_1^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} = U_{i+1/2,*}^{n+1/2} + C_{i+1/2,*}^{n+1/2}; (\lambda_2^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} = U_{i+1/2,*}^{n+1/2} - C_{i+1/2,*}^{n+1/2}; (\lambda_3^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} = (\lambda_4^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} = U_{i+1/2,*}^{n+1/2}. \quad (4.35)$$

В этом случае в пределах каждой расчетной ячейки исходное локально-одномерное характеристическое представление уравнений Эйлера заменится уравнениями переноса линейных локальных римановых инвариантов:

$$\frac{\partial I_k^x}{\partial t} + (\lambda_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot \frac{\partial I_k^x}{\partial x} = (g_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2}, k=1,2,3,4, \quad (4.36)$$

где

$$\begin{aligned} I_1^x &= u + \frac{1}{(\Theta \cdot C)_{i+1/2,*}^{n+1/2}} \cdot p; \quad I_2^x = u - \frac{1}{(\Theta \cdot C)_{i+1/2,*}^{n+1/2}} \cdot p; \\ I_3^x &= v; \quad I_4^x = p - \gamma \cdot \left(\frac{p}{\Theta} \right)_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot \rho. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Линейные локальные инварианты (4.37) рекомендуется использовать только в тех случаях, когда уравнение состояния задано таблично, и в этой таблице имеются сведения о скорости звука.

Для уравнения состояния идеального газа лучше использовать т. н. изэнтропическую аппроксимацию матрицы левых собственных значений:

$$(\Omega_x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & D_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot p^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \\ 0 & 1 & 0 & -D_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot p^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma \cdot \frac{p}{\rho} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

где

$$D_{i+1/2,*}^{n+1/2} = \left[\gamma^{\frac{1}{2}} \exp \left(S_{i+1/2,*}^{n+1/2} \right)^{\frac{1}{2\gamma}} \right] = \left[\gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^{\frac{1}{2\gamma}}}{\Theta^{\frac{1}{2}}} \right)_{i+1/2,*}^{n+1/2} \right] \quad (4.39)$$

Матрице (4.38) отвечают следующие локальные инварианты:

$$\begin{aligned} I_1^x &= u + G_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot p^\mu; \quad I_2^x = u - G_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot p^\mu; \\ I_3^x &= v; \quad I_4^x = \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right), \end{aligned} \quad (4.40)$$

здесь

$$G_{i+1/2,*}^{n+1/2} = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \cdot \left[\left(\frac{p}{\Theta^\gamma} \right)_{i+1/2,*}^{n+1/2} \right]^{\frac{1}{2\gamma}}; \quad \mu = \frac{\gamma-1}{2\gamma}. \quad (4.41)$$

Изоэнтروпические инварианты обладают заметными преимуществами над линейными и изотермическими при решении задач аэроакустики.

Таким образом, мы получили следующую картину: в каждой расчетной пространственно-временной ячейке имеется своя система уравнений (4.36), описывающая перенос в направлении X локальных инвариантов I_k^x ; $k = 1, 2, 3, 4$ со скоростями λ_k^x . Эта система дифференциальных уравнений переноса локальных инвариантов аппроксимирует систему исходных дифференциальных уравнений (4.17).

Появляется принципиальная возможность их численного решения по какой-либо из известных численных методик, если осуществить аккуратную аппроксимацию их правых частей. По вычисленным значениям локальных инвариантов на новом временном слое можно восстановить и значения новых потоковых переменных.

Однако более простым и эффективным оказывается другой путь – линейная экстраполяция локальных инвариантов с текущего временного слоя через промежуточный временной слой в направлении скорости переноса с последующей коррекцией результата в соответствии с принципом максимума.

Если в расчетной ячейке локальные инварианты являются гладкими функциями, то с точностью $O[(\tau_{n+1/2})^2, (h_x)^2]$ должны выполняться соотношения (рис. 4.4):

$$\begin{aligned} (I_k^x)_{i+1,n}^{n+1} &= 2 \cdot (I_k^x)_{i+1/2,n}^{n+1/2} - (I_k^x)_{i,n}^n, \\ (I_k^x)_{i,n}^{n+1} &= 2 \cdot (I_k^x)_{i+1/2,n}^{n+1/2} - (I_k^x)_{i+1,n}^n. \end{aligned} \quad (4.42)$$

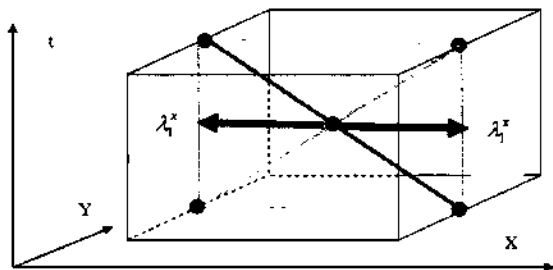


Рис. 4.4. Направления интерполяции инвариантов I_1^x, I_2^x в зависимости от направления характеристических скоростей λ_1^x, λ_2^x

Из уравнений (4.36) следует, что значения локальных инвариантов на новом временном слое должны удовлетворять неравенствам:

$$\begin{aligned} \max(I_k^x) &\geq (I_k^x)_{i+1,n}^{n+1} \geq \min(I_k^x); \quad \text{if} \quad 0 \leq \frac{\tau_{n+1/2} \cdot (\lambda_k^x)_{i+1/2,n}^{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} \leq 1; \\ \max(I_k^x) &\geq (I_k^x)_{i,n}^{n+1} \geq \min(I_k^x); \quad \text{if} \quad 0 \geq \frac{\tau_{n+1/2} \cdot (\lambda_k^x)_{i+1/2,n}^{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} \geq -1, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где

$$\begin{aligned}\max(I_k^x) &= \max_{x \in [x_{n+1/2}, x_k]} (I_k^x)^n + \tau_{n+1/2} \cdot \max_{(x,y,i) \in D} (g_k^x), \\ \min(I_k^x) &= \min_{x \in [x_{n+1/2}, x_k]} (I_k^x)^n + \tau_{n+1/2} \cdot \max_{(x,y,i) \in D} (g_k^x).\end{aligned}\quad (4.44)$$

Значения локальных инвариантов на новом временном слое, вычисленные по формулам линейной экстраполяции (4.42), не всегда будут удовлетворять этим неравенствам, поэтому их следует откорректировать в соответствии с (4.43).

В случае дискретных сеточных функций заменим ограничения их приближенными сеточными аналогами:

$$\begin{aligned}\max(I_k^x) &\cong \max \left[(I_k^x)_{i,*}^n, (I_k^x)_{i+1,*}^n, (I_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} \right] + \tau_{n+1/2} \cdot (g_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2}, \\ \min(I_k^x) &\cong \min \left[(I_k^x)_{i,*}^n, (I_k^x)_{i+1,*}^n, (I_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} \right] + \tau_{n+1/2} \cdot (g_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Для приближенного определения величин $(g_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2}$ воспользуемся аппроксимацией уравнений:

$$(g_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} = \frac{(I_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} - (I_k^x)_{i+1/2,*}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (\lambda_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot \frac{(I_k^x)_{i+1,*}^n - (I_k^x)_{i,*}^n}{\Delta x_{i+1/2}}; \quad k=1,2,3,4. \quad (4.46)$$

Это оказывается возможным благодаря тому, что все величины, входящие в правую часть определения (4.46), на текущий момент уже известны.

Процедура коррекции локальных инвариантов на основе принципа максимума определяется следующим образом:

Если $(\lambda_k^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} \geq 0$, то

$$(I_k^x)_{i+1,*}^{n+1} = \begin{cases} (I_k^x)_{i+1,*}^{n+1} & \text{if } \min(I_k^x) \leq (I_k^x)_{i+1,*}^{n+1} \leq \max(I_k^x) \\ \min(I_k^x) & \text{if } (I_k^x)_{i+1,*}^{n+1} < \min(I_k^x) \\ \max(I_k^x) & \text{if } (I_k^x)_{i+1,*}^{n+1} > \max(I_k^x) \end{cases} \quad (4.47)$$

В противном случае

$$(I_k^x)_{i,*}^{n+1} = \begin{cases} (I_k^x)_{i,*}^{n+1} & \text{if } \min(I_k^x) \leq (I_k^x)_{i,*}^{n+1} \leq \max(I_k^x) \\ \min(I_k^x) & \text{if } (I_k^x)_{i,*}^{n+1} < \min(I_k^x) \\ \max(I_k^x) & \text{if } (I_k^x)_{i,*}^{n+1} > \max(I_k^x) \end{cases}. \quad (4.48)$$

В дальнейшем будет подробно описана процедура вычисления по полученным значениям локальных инвариантов на новом временном слое новых потоковых переменных.

Перенос в направлении оси y

Применив вышеописанные рассуждения к уравнению (4.18) и аппроксимируя матрицу Ω , как

$$(\Omega_y)_{*,j+1/2}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(\Theta \cdot C)_{*,j+1/2}^{n+1/2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{(\Theta \cdot C)_{*,j+1/2}^{n+1/2}} \\ -\gamma \cdot \left(\frac{p}{\Theta}\right)_{*,j+1/2}^{n+1/2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

приходим к линейным локальным инвариантам

$$\begin{aligned} I_1^y &= v + \frac{1}{(\Theta \cdot C)_{*,j+1/2}^{n+1/2}} \cdot p; & I_2^y &= v - \frac{1}{(\Theta \cdot C)_{*,j+1/2}^{n+1/2}} \cdot p; \\ I_3^y &= u; & I_4^y &= p - \gamma \cdot \left(\frac{p}{\Theta}\right)_{*,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \rho. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Символ « $\bullet$ » в приведенных выражениях заменяет более громоздкое выражение « $i+1/2$ ».

При аппроксимации матрицы Ω_y изэнтропическим способом

$$(\Omega_y)_{*,j+1/2}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & D_{*,j+1/2}^{n+1/2} \cdot p^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -D_{*,j+1/2}^{n+1/2} \cdot p^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \\ -\gamma \cdot \frac{p}{\rho} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

где

$$D_{*,j+1/2}^{n+1/2} = \left[\gamma^{-\frac{1}{2}} \exp \left(S_{*,j+1/2}^{n+1/2} \right)^{\frac{1}{2\gamma}} \right] = \left[\gamma^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{p^{\frac{1}{2\gamma}}}{\Theta^{\frac{1}{2}}} \right)_{*,j+1/2}^{n+1/2} \right] \quad (4.52)$$

получаем изозэнтропические локальные инварианты:

$$\begin{aligned} I_1^\gamma &= v + G_{*,j+1/2}^{n+1/2} \cdot p^\mu; \quad I_2^\gamma = v - G_{*,j+1/2}^{n+1/2} \cdot p^\mu; \\ I_3^\gamma &= u; \quad I_3^\gamma = \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right), \end{aligned} \quad (4.53)$$

где

$$G_{*,j+1/2}^{n+1/2} = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \cdot \left[\left(\frac{p}{\Theta^\gamma} \right)_{*,j+1/2}^{n+1/2} \right]^{\frac{1}{2\gamma}}; \quad \mu = \frac{\gamma-1}{2\gamma}. \quad (4.54)$$

Следует отметить, что для рассматриваемой ячейки с индексами $(i+1/2, j+1/2)$ справедливы равенства

$$D_{*,j+1/2}^{n+1/2} = D_{i+1/2,*}^{n+1/2}; \quad G_{*,j+1/2}^{n+1/2} = G_{i+1/2,*}^{n+1/2}; \quad C_{*,j+1/2}^{n+1/2} = C_{i+1/2,*}^{n+1/2}; \quad \Theta_{*,j+1/2}^{n+1/2} = \Theta_{i+1/2,*}^{n+1/2}.$$

Перенос этих инвариантов в направлении Y описывается системой уравнений, аналогичной системе (4.36),

$$\frac{\partial I_k^\gamma}{\partial t} + (\lambda_k^\gamma)_{*,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{\partial I_k^\gamma}{\partial y} = (g_k^\gamma)_{*,j+1/2}^{n+1/2}, \quad k=1,2,3,4. \quad (4.55)$$

При условии достаточной гладкости инвариантов в пределах расчетной ячейки с точностью до членов второго порядка малости выполняются условия линейной экстраполяции:

$$\begin{aligned} (I_k^\gamma)_{*,j+1}^{n+1} &= 2 \cdot (I_k^\gamma)_{*,j+1/2}^{n+1/2} - (I_k^\gamma)_{*,j}^n, \\ (I_k^\gamma)_{*,j}^{n+1} &= 2 \cdot (I_k^\gamma)_{*,j+1/2}^{n+1/2} - (I_k^\gamma)_{*,j+1}^n. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Принцип максимума, являющийся следствием уравнений (4.55), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \max(I_k^\gamma) &\geq (I_k^\gamma)_{*,j+1}^{n+1} \geq \min(I_k^\gamma); \quad \text{if} \quad 0 \leq \frac{\tau_{n+1/2} \cdot (\lambda_k^\gamma)_{*,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y_{i+1/2}} \leq 1; \\ \max(I_k^\gamma) &\geq (I_k^\gamma)_{*,j}^{n+1} \geq \min(I_k^\gamma); \quad \text{if} \quad 0 \geq \frac{\tau_{n+1/2} \cdot (\lambda_k^\gamma)_{*,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y_{i+1/2}} \geq -1, \end{aligned} \quad (4.57)$$

где

$$\begin{aligned}\max(I_k^y) &\cong \max \left[(I_k^y)_{s,j}^n, (I_k^y)_{s,j+1}^n, (I_k^y)_{s,j+1/2}^{n+1/2} \right] + \tau_{n+1/2} \cdot (g_k^y)_{s,j+1/2}^{n+1/2}, \\ \min(I_k^y) &\cong \min \left[(I_k^y)_{s,j}^n, (I_k^y)_{s,j+1}^n, (I_k^y)_{s,j+1/2}^{n+1/2} \right] + \tau_{n+1/2} \cdot (g_k^y)_{s,j+1/2}^{n+1/2}.\end{aligned}\quad (4.58)$$

Источниковые члены в (4.58) также находятся из аппроксимации уравнений переноса (4.55):

$$(g_k^y)_{s,j+1/2}^{n+1/2} \cong \frac{(I_k^y)_{s,j+1/2}^{n+1/2} - (I_k^y)_{s,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (\lambda_k^y)_{s,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{(I_k^y)_{s,j+1}^n - (I_k^y)_{s,j}^n}{\Delta y_{s,j+1/2}}, \quad k=1,2,3,4. \quad (4.59)$$

Нелинейная коррекция локальных инвариантов на базе принципа максимума также аналогична рассмотренному ранее случаю.

Если $(I_k^y)_{s,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0$, то

$$(I_k^y)_{s,j+1}^{n+1} = \begin{cases} (I_k^y)_{s,j+1}^{n+1} & \text{if } \min(I_k^y) \leq (I_k^y)_{s,j+1}^{n+1} \leq \max(I_k^y) \\ \min(I_k^y) & \text{if } (I_k^y)_{s,j+1}^{n+1} < \min(I_k^y) \\ \max(I_k^y) & \text{if } (I_k^y)_{s,j+1}^{n+1} > \max(I_k^y) \end{cases}. \quad (4.60)$$

В противном случае

$$(I_k^y)_{s,j}^{n+1} = \begin{cases} (I_k^y)_{s,j}^{n+1} & \text{if } \min(I_k^y) \leq (I_k^y)_{s,j}^{n+1} \leq \max(I_k^y) \\ \min(I_k^y) & \text{if } (I_k^y)_{s,j}^{n+1} < \min(I_k^y) \\ \max(I_k^y) & \text{if } (I_k^y)_{s,j}^{n+1} > \max(I_k^y) \end{cases}. \quad (4.61)$$

4.7. Вычисление новых значений потоковых переменных на сеточном множестве $\mathcal{H}_{\sigma_i}$

Таким образом, для каждого узла с индексами $(i, j+1/2, n+1)$ мы можем получить, вообще говоря, восемь значений локальных инвариантов, по четыре от каждой из прилегающих ячеек. Некоторые из них могут оказаться неопределенными и тогда, вместо численного значения, им естественно присвоить символ «none». Тем самым, для каждой середины ребра на новом временном слое нужно проанализировать 64 различные комбинации, большая часть которых не может реализоваться даже теоретически. Поэтому на практике обычно используется более простой алгоритм отбора, основанный на анализе знака соответствующей характеристической скорости, осредненной по двум прилегающим ячейкам:

$$\begin{aligned} (\lambda_1^x)_{i,*}^{n+1/2} &= u_{i,*}^{n+1/2} + c_{i,*}^{n+1/2}, \quad (\lambda_2^x)_{i,*}^{n+1/2} = u_{i,*}^{n+1/2} - c_{i,*}^{n+1/2}, \\ (\lambda_3^x)_{i,*}^{n+1/2} &= u_{i,*}^{n+1/2}, \quad (\lambda_4^x)_{i,*}^{n+1/2} = u_{i,*}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

где

$$u_{i,*}^{n+1/2} = (U_{i+1/2,*}^{n+1/2} + U_{i-1/2,*}^{n+1/2})/2, \quad c_{i,*}^{n+1/2} = (C_{i+1/2,*}^{n+1/2} + C_{i-1/2,*}^{n+1/2})/2. \quad (4.63)$$

Следует отметить, что на этом этапе нам потребуется только информация о направлении прихода характеристик в данный узел, поэтому вопрос о точности вычисления характеристических скоростей не является критическим.

Возможны всего четыре комбинации прихода характеристик в узел $(i, j+1/2, n+1)$:

$$\begin{aligned} &[(\lambda_1^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^x)_{i,*}^{n+1/2} = (\lambda_4^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0]; \\ &[(\lambda_1^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^x)_{i,*}^{n+1/2} = (\lambda_4^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0]; \\ &[(\lambda_1^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_3^x)_{i,*}^{n+1/2} = (\lambda_4^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0]; \\ &[(\lambda_1^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0, (\lambda_2^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^x)_{i,*}^{n+1/2} = (\lambda_4^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

В первом случае новые значения потоковых переменных находятся из системы уравнений:

$$\begin{aligned} u_{i,*}^{n+1} + G_{i-1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{i,*}^{n+1})^\mu &= {}_L(I_1^x)_{i,*}^{n+1}, \quad u_{i,*}^{n+1} - G_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{i,*}^{n+1})^\mu = {}_R(I_2^x)_{i,*}^{n+1}, \\ v_{i,*}^{n+1} &= {}_L(I_3^x)_{i,*}^{n+1}, \quad \ln \left[p_{i,*}^{n+1} / (\rho_{i,*}^{n+1})^\gamma \right] = {}_L(I_4^x)_{i,*}^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Здесь нижний индекс слева от обозначения инварианта указывает на ячейку, из которой он получен: «L» – если он вычислен по параметрам левой ячейки, и «R» – если по параметрам правой ячейки.

Из (4.65) получаем:

$$\begin{aligned} p_{i,*}^{n+1} &= \left[\frac{{}_L(I_1^x)_{i,*}^{n+1} - {}_R(I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{G_{i-1/2,*}^{n+1/2} + G_{i+1/2,*}^{n+1/2}} \right]^\frac{1}{\mu}, \quad \rho_{i,*}^{n+1} = \left\{ \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\exp \left[{}_L(I_4^x)_{i,*}^{n+1} \right]} \right\}^\frac{1}{\gamma}, \\ u_{i,*}^{n+1} &= \frac{G_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot {}_L(I_1^x)_{i,*}^{n+1} + G_{i-1/2,*}^{n+1/2} \cdot {}_R(I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{G_{i-1/2,*}^{n+1/2} + G_{i+1/2,*}^{n+1/2}}, \quad v_{i,*}^{n+1} = {}_L(I_3^x)_{i,*}^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

В случае $\left[(\lambda_1^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^x)_{i,*}^{n+1/2} = (\lambda_4^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0 \right] -$

$$\begin{aligned} p_{i,*}^{n+1} &= \left[\frac{L(I_1^x)_{i,*}^{n+1} - R(I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{G_{i-1/2,*}^{n+1/2} + G_{i+1/2,*}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}, \quad \rho_{i,*}^{n+1} = \left\{ \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\exp \left[R(I_4^x)_{i,*}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \\ u_{i,*}^{n+1} &= \frac{G_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot L(I_1^x)_{i,*}^{n+1} + G_{i-1/2,*}^{n+1/2} \cdot R(I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{G_{i-1/2,*}^{n+1/2} + G_{i+1/2,*}^{n+1/2}}, \\ v_{i,*}^{n+1} &= R(I_3^x)_{i,*}^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Для сверхзвукового течения вправо, т. е. при

$\left[(\lambda_1^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_3^x)_{i,*}^{n+1/2} = (\lambda_4^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0 \right]$, имеем:

$$\begin{aligned} p_{i,*}^{n+1} &= \left[\frac{L(I_1^x)_{i,*}^{n+1} - L(I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{2 \cdot G_{i-1/2,*}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}, \quad \rho_{i,*}^{n+1} = \left\{ \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\exp \left[L(I_4^x)_{i,*}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \\ u_{i,*}^{n+1} &= \frac{L(I_1^x)_{i,*}^{n+1} + L(I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{2}, \quad v_{i,*}^{n+1} = L(I_3^x)_{i,*}^{n+1}; \end{aligned} \quad (4.68)$$

для сверхзвукового течения влево $\left[(\lambda_1^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0, (\lambda_2^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^x)_{i,*}^{n+1/2} = (\lambda_4^x)_{i,*}^{n+1/2} < 0 \right]$:

$$\begin{aligned} p_{i,*}^{n+1} &= \left[\frac{R(I_1^x)_{i,*}^{n+1} - R(I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{2 \cdot G_{i+1/2,*}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}, \quad \rho_{i,*}^{n+1} = \left\{ \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\exp \left[R(I_4^x)_{i,*}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \\ u_{i,*}^{n+1} &= \frac{R(I_1^x)_{i,*}^{n+1} + R(I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{2}, \quad v_{i,*}^{n+1} = R(I_3^x)_{i,*}^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Определение типа течения по осредненным собственным числам не улавливает зоны перехода от дозвуковых течений к сверхзвуковым (с ускорением потока) и обратные переходы – от сверхзвуковых течений к дозвуковым – при торможении потока. Эти зоны, часто называемые «звуковыми точками», требуют специального рассмотрения.

4.8. Звуковые точки

Два первых инварианта, как это видно из вышеприведенных формул, составляют замкнутую систему, позволяющую определить потоковые переменные нормальной скорости и давления. Оставшиеся две переменные находятся по третьему и четвертому инварианту и зависят только от уже вычисленного давления и направления прихода третьей (энтропийной) характеристики. Для выявления звуковых точек необходимо знать направления первых двух локально-одномерных характеристик в каж-

дой из прилегающих к данному ребру ячеек. При этом возможны следующие четыре ситуации:

1. В левой ячейке – дозвуковое течение, в правой – сверхзвуковое течение вправо. Из левой ячейки на рассматриваемую грань приходит одна характеристика, отвечающая локальному инварианту ${}_L(I_1^x)_{i+1,*}^{n+1}$, а из правой ячейки не приходит ни одной из первых двух характеристик. Такая конфигурация соответствует звуковой точке при ускорении потока вправо.

2. В правой ячейке «дозвук», в левой ячейке – сверхзвуковое течение влево. Из правой ячейки приходит характеристика, соответствующая второму локальному инварианту ${}_R(I_2^x)_{i+1,*}^{n+1}$, со стороны левой ячейки не приходит ни одной из первых двух характеристик. Это соответствует звуковой точке при ускорении потока влево.

3. В левой ячейке – сверхзвуковое течение вправо, в правой – дозвуковое течение. Из левой ячейки на рассматриваемую грань приходят две первые характеристики, отвечающие локальным инвариантам ${}_L(I_1^x)_{i+1,*}^{n+1}$ и ${}_L(I_2^x)_{i+1,*}^{n+1}$, а из правой ячейки приходит одна характеристика, соответствующая локальному инварианту ${}_R(I_2^x)_{i+1,*}^{n+1}$. Такая конфигурация соответствует звуковой точке при торможении потока, движущегося вправо.

4. В правой ячейке – сверхзвуковое течение влево, в левой ячейке – «дозвук».

Из правой ячейки приходят две первые характеристики, соответствующие первому и второму локальным инвариантам ${}_R(I_1^x)_{i+1,*}^{n+1}$, ${}_R(I_2^x)_{i+1,*}^{n+1}$, со стороны левой ячейки приходит только первая характеристика, приносящая локальный инвариант ${}_L(I_1^x)_{i+1,*}^{n+1}$. Это соответствует звуковой точке при торможении потока, движущегося влево.

Построим решение в случае №1

В первом случае система уравнений для определения нормальной потоковой скорости и давления оказывается неполной, поскольку состоит только из одного уравнения:

$$u_{i,*}^{n+1} + G_{i-1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{i,*}^{n+1})^\mu = {}_L(I_1^x)_{i,*}^{n+1}. \quad (4.70)$$

Для построения замкнутой системы добавим соотношение

$$u_{i,*}^{n+1} = \sigma_{i,*}^{n+1/2} \cdot c_{i,*}^{n+1} = \sigma_{i,*}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma \cdot \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\rho_{i,*}^{n+1}}}, \quad (4.71)$$

где множитель

$$\sigma_{i,*}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_{i-1/2,*}^{n+1/2}}{C_{i-1/2,*}^{n+1/2}} + \frac{U_{i+1/2,*}^{n+1/2}}{C_{i+1/2,*}^{n+1/2}} \right) \quad (4.72)$$

представляет собой аппроксимацию локального числа Маха.

При наличии звуковой точки система уравнений (4.70) – (4.72) не является замкнутой, и полное решение зависит от направления третьей осредненной характеристики ${}_L(I_1^x)_{i,*}^{n+1/2}$.

Если $(\lambda_3^x)_{i,*}^{n+1/2} \geq 0$, то

$$\rho_{i,*}^{n+1} = \left\{ \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\exp \left[{}_L(I_4^x)_{i,*}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}; \quad v_{i,*}^{n+1} = {}_L(I_3^x)_{i,*}^{n+1}; \quad (4.73)$$

в противном случае

$$\rho_{i,*}^{n+1} = \left\{ \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\exp \left[{}_R(I_4^x)_{i,*}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}; \quad v_{i,*}^{n+1} = {}_R(I_3^x)_{i,*}^{n+1}. \quad (4.74)$$

Подставляя одно из этих выражений для плотности, из (4.73)–(4.74) получаем замкнутую систему

$$\begin{aligned} u_{i,*}^{n+1} + G_{i-1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{i,*}^{n+1})^\mu &= {}_L(I_1^x)_{i,*}^{n+1}, \\ u_{i,*}^{n+1} &= \sigma_{i,*}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\rho_{i,*}^{n+1}} = \sigma_{i,*}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp \left[{}_{R,L}(I_4^x)_{i,*}^{n+1} \right]^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot (p_{i,*}^{n+1})^\mu, \end{aligned} \quad (4.75)$$

откуда находим

$$p_{i,*}^{n+1} = \left[\frac{{}_L(I_1^x)_{i,*}^{n+1}}{H_{i,*}^{n+1/2} + G_{i-1/2,*}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}; \quad u_{i,*}^{n+1} = {}_L(I_1^x)_{i,*}^{n+1} - G_{i-1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{i,*}^{n+1})^\mu,$$

где введено новое обозначение: $H_{i,*}^{n+1/2} = \sigma_{i,*}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp \left[{}_{R,L}(I_4^x)_{i,*}^{n+1} \right]^{\frac{1}{2\gamma}}$.

Решение в случае № 2

При ускорении потока влево на ребро $(i, j+1/2)$ приходит только одна характеристика справа, которая приносит локальный инвариант $(I_2^x)_{i,*}^{n+1}$. Система уравнений для определения нормальной потоковой скорости и давления также оказывается неполной, поскольку состоит только из одного уравнения:

$$u_{i,*}^{n+1} - G_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{i,*}^{n+1})^\mu = {}_R(I_2^x)_{i,*}^{n+1}. \quad (4.76)$$

К этому уравнению добавим соотношение

$$u_{i,*}^{n+1} = -\sigma_{i,*}^{n+1/2} \cdot c_{i,*}^{n+1} = -\sigma_{i,*}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\rho_{i,*}^{n+1}}. \quad (4.77)$$

Подставляя в (4.77) одно из выражений для плотности из (4.73), (4.74), получаем замкнутую систему:

$$u_{i,*}^{n+1} - G_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{i,*}^{n+1})^\mu = {}_R(I_2^x)_{i,*}^{n+1}, \quad (4.78)$$

$$u_{i,*}^{n+1} = -\sigma_{i,*}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma \cdot \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\rho_{i,*}^{n+1}}} = -\sigma_{i,*}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp \left[{}_{R,L}(I_4^x)_{i,*}^{n+1} \right]^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot (p_{i,*}^{n+1})^\mu,$$

откуда находим:

$$p_{i,*}^{n+1} = \left[\frac{-{}_R(I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{H_{i,*}^{n+1/2} + G_{i-1/2,*}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}; \quad u_{i,*}^{n+1} = {}_R(I_2^x)_{i,*}^{n+1} + G_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{i,*}^{n+1})^\mu. \quad (4.79)$$

Плотность и касательная составляющая скорости, как и в предыдущем случае, определяются их соотношений (4.73), (4.74).

Анализ случаев №3 и №4

В левой ячейке – сверхзвуковое течение право, в правой – дозвук. На «вертикальную» грань расчетной ячейки $(i, j+1/2)$ на момент t_{n+1} приходят по крайней мере три характеристики – две первые характеристики, приносящие локальные инварианты ${}_L(I_1^x)_{i,*}^{n+1/2}$, ${}_L(I_2^x)_{i,*}^{n+1/2}$ со стороны левой ячейки, и одна вторая характеристика, приносящая инвариант ${}_R(I_2^x)_{i,*}^{n+1/2}$ со стороны правой ячейки. Кратная третья и четвертая характеристики в одномерном течении при описанной конфигурации должны были бы приходить только справа, но с учетом двумерности следует допустить и существование другой возможности. Для вычисления потокового давления и нормальной составляющей скорости получающаяся система уравнений оказывается переопределенной, поэтому какие-то из уравнений нужно отбросить. Вычислительные эксперименты показали, что следует отказаться от уравнений, отвечающих вторым инвариантам как со стороны левой, так и со стороны правой ячейки, т. е. ${}_L(I_2^x)_{i,*}^{n+1/2}$ и ${}_R(I_2^x)_{i,*}^{n+1/2}$, взять за основу уравнение для инварианта ${}_L(I_1^x)_{i,*}^{n+1/2}$ и дополнить его интерполяцией числа Маха, как это сделано в случае №1. Другими словами, с точки зрения вычислительных формул, случай №3 полностью совпадает со случаем №1.

То же можно сказать и про случай №4. Он реализуется по формулам, выписанным для случая №2.

Выполнив описанные процедуры для всех горизонтальных слоев расчетной сетки, т. е. для всех $j = 1, \dots, N_y - 1$, мы вычислим новые значения потоковых переменных на сеточном множестве $\mathcal{H}_{\sigma_y}$ за исключением точек, принадлежащих левой и правой границам области. Для нахождения потоковых переменных на этих границах необходимо привлекать граничные условия.

4.9. Вычисление новых значений потоковых переменных на сеточном множестве $\mathcal{H}_{\sigma_y}$

Новые значения потоковых переменных в серединах горизонтальных граней ячейки вычисляются аналогично. Для этого следует воспользоваться другим характери-

стическим представлением исходных уравнений, а именно – формой (4.18), приводящей к локальным инвариантам (4.53).

Как и для направления X , обычно используется алгоритм отбора «приходящих» на соответствующую «горизонтальную» грань локальных инвариантов, основанный на анализе знака соответствующей характеристической скорости, осредненной по двум прилегающим ячейкам:

$$\begin{aligned} (\lambda_1^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} &= v_{\bullet,j}^{n+1/2} + c_{\bullet,j}^{n+1/2}, \quad (\lambda_2^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} = v_{\bullet,j}^{n+1/2} - c_{\bullet,j}^{n+1/2}, \\ (\lambda_3^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} &= v_{\bullet,j}^{n+1/2}, \quad (\lambda_4^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} = v_{\bullet,j}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

где

$$v_{\bullet,j}^{n+1/2} = (V_{\bullet,j+1/2}^{n+1/2} + V_{\bullet,j-1/2}^{n+1/2})/2, \quad c_{\bullet,j}^{n+1/2} = (C_{\bullet,j+1/2}^{n+1/2} + C_{\bullet,j-1/2}^{n+1/2})/2. \quad (4.81)$$

Нам требуется только информация о направлении прихода характеристик в данный узел, поэтому вопрос о точности вычисления характеристических скоростей не является критическим.

Возможны четыре комбинации прихода характеристик в середину горизонтального ребра $(i+1/2, j, n+1)$:

$$\begin{aligned} &[(\lambda_1^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} = (\lambda_4^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} \geq 0]; \\ &[(\lambda_1^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} = (\lambda_4^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} < 0]; \\ &[(\lambda_1^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_3^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} = (\lambda_4^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} \geq 0]; \\ &[(\lambda_1^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} < 0, (\lambda_2^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} = (\lambda_4^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} < 0]. \end{aligned}$$

В случае $[(\lambda_1^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} = (\lambda_4^y)_{\bullet,j}^{n+1/2} \geq 0]$ новые значения потоковых переменных находятся из системы уравнений:

$$\begin{aligned} v_{\bullet,j}^{n+1} + G_{\bullet,j-1/2}^{n+1/2} \cdot (p_{\bullet,j}^{n+1})^\mu &= {}_B(I_1^y)_{\bullet,j}^{n+1}, \quad v_{\bullet,j}^{n+1} - G_{\bullet,j+1/2}^{n+1/2} \cdot (p_{\bullet,j}^{n+1})^\mu = {}_T(I_2^y)_{\bullet,j}^{n+1}, \\ u_{\bullet,j}^{n+1} &= {}_B(I_3^y)_{\bullet,j}^{n+1}, \quad \ln[p_{\bullet,j}^{n+1}/(p_{\bullet,j}^{n+1})^y] = {}_B(I_4^y)_{\bullet,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Здесь нижний индекс слева от обозначения инварианта указывает на ячейку, из которой он получен: «В» – если он вычислен по параметрам нижней ячейки и «Т» – если по параметрам верхней ячейки.

Из (4.83) получаем:

$$\begin{aligned}
 P_{*,j}^{n+1} &= \left[\frac{{}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1} - {}_T(I_2^y)_{*,j}^{n+1}}{G_{*,j-1/2}^{n+1/2} + G_{*,j+1/2}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}, \quad \rho_{*,j}^{n+1} = \left\{ \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\exp[{}_B(I_4^y)_{*,j}^{n+1}]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \\
 v_{*,j}^{n+1} &= \frac{G_{*,j+1/2}^{n+1/2} \cdot {}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1} + G_{*,j-1/2}^{n+1/2} \cdot {}_T(I_2^y)_{*,j}^{n+1}}{G_{*,j-1/2}^{n+1/2} + G_{*,j+1/2}^{n+1/2}}, \\
 u_{*,j}^{n+1} &= {}_B(I_3^y)_{*,j}^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

В случае $[(\lambda_1^y)_{*,j}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^y)_{*,j}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} = (\lambda_4^y)_{*,j}^{n+1/2} < 0]$ –

$$\begin{aligned}
 P_{*,j}^{n+1} &= \left[\frac{{}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1} - {}_T(I_2^y)_{*,j}^{n+1}}{G_{*,j-1/2}^{n+1/2} + G_{*,j+1/2}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}, \quad \rho_{*,j}^{n+1} = \left\{ \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\exp[{}_B(I_4^y)_{*,j}^{n+1}]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \\
 v_{*,j}^{n+1} &= \frac{G_{*,j+1/2}^{n+1/2} \cdot {}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1} + G_{*,j-1/2}^{n+1/2} \cdot {}_T(I_2^y)_{*,j}^{n+1}}{G_{*,j-1/2}^{n+1/2} + G_{*,j+1/2}^{n+1/2}}, \\
 u_{*,j}^{n+1} &= {}_B(I_3^y)_{*,j}^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

Для сверхзвукового течения вверх, т. е. при $[(\lambda_1^y)_{*,j}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^y)_{*,j}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} = (\lambda_4^y)_{*,j}^{n+1/2} \geq 0]$, находим:

$$\begin{aligned}
 P_{*,j}^{n+1} &= \left[\frac{{}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1} - {}_B(I_2^y)_{*,j}^{n+1}}{2 \cdot G_{*,j-1/2}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}, \quad \rho_{*,j}^{n+1} = \left\{ \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\exp[{}_B(I_4^y)_{*,j}^{n+1}]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} \\
 v_{*,j}^{n+1} &= \frac{{}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1} + {}_B(I_2^y)_{*,j}^{n+1}}{2}, \quad u_{*,j}^{n+1} = {}_B(I_3^y)_{*,j}^{n+1};
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

для сверхзвукового течения вниз $[(\lambda_1^y)_{*,j}^{n+1/2} < 0, (\lambda_2^y)_{*,j}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} = (\lambda_4^y)_{*,j}^{n+1/2} < 0]$:

$$\begin{aligned}
 P_{*,j}^{n+1} &= \left[\frac{{}_T(I_1^y)_{*,j}^{n+1} - {}_T(I_2^y)_{*,j}^{n+1}}{2 \cdot G_{*,j+1/2}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}, \quad \rho_{*,j}^{n+1} = \left\{ \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\exp[{}_T(I_4^y)_{*,j}^{n+1}]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \\
 v_{*,j}^{n+1} &= \frac{{}_T(I_1^y)_{*,j}^{n+1} + {}_T(I_2^y)_{*,j}^{n+1}}{2}, \quad u_{*,j}^{n+1} = {}_T(I_3^y)_{*,j}^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Как уже отмечалось ранее, определение типа течения по осредненным собственным числам не улавливает т. н. «звуковые точки». Расчеты течений со звуковыми точками требуют уточнения алгоритма.

Звуковые точки

Рассмотрим транзвуковое течение, ускоряющееся вверх, т. е. по оси y . В этом случае в нижней ячейке дозвуковое течение, в верхней – сверхзвуковое. На горизонтальное ребро $(i+1/2, j)$ проходит только одна характеристика $(I_1^y)_{*,j}^{n+1}$ снизу. Недостающую информацию для определения потоковых переменных на новом временном слое дополним аппроксимацией числа Маха. Полная система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} v_{*,j}^{n+1} + G_{*,j-1/2}^{n+1/2} \cdot (p_{*,j}^{n+1})^\mu &= {}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1}; \quad v_{*,j}^{n+1} = \sigma_{*,j}^{n+1/2} \cdot c_{*,j}^{n+1} = \sigma_{*,j}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma \cdot \frac{p_{*,j}^{n+1}}{\rho_{*,j}}}; \\ \sigma_{*,j}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{V_{*,j-1/2}^{n+1/2}}{C_{*,j-1/2}^{n+1/2}} + \frac{V_{*,j+1/2}^{n+1/2}}{C_{*,j+1/2}^{n+1/2}} \right); \\ \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} &\geq 0 \text{ then} \\ \rho_{*,j}^{n+1} &= \left\{ \frac{p_{*,j}^{n+1}}{\exp[{}_B(I_4^y)_{*,j}^{n+1}]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}; \quad u_{*,j}^{n+1} = {}_B(I_3^y)_{*,j}^{n+1}; \\ \text{else} \\ \rho_{*,j}^{n+1} &= \left\{ \frac{p_{*,j}^{n+1}}{\exp[{}_T(I_4^y)_{*,j}^{n+1}]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}; \quad u_{*,j}^{n+1} = {}_T(I_3^y)_{*,j}^{n+1}; \\ \text{endif} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Откуда находим:

$$p_{*,j}^{n+1} = \left[\frac{{}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1}}{H_{*,j}^{n+1/2} + G_{*,j-1/2}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}; \quad v_{*,j}^{n+1} = {}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1} - G_{*,j-1/2}^{n+1/2} \cdot (p_{*,j}^{n+1})^\mu, \quad (4.88)$$

где

$$H_{*,j}^{n+1/2} = \begin{cases} \sigma_{*,j}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp[{}_B(I_4^y)_{*,j}^{n+1}]^{\frac{1}{2\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} \geq 0 \\ \sigma_{*,j}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp[{}_T(I_4^y)_{*,j}^{n+1}]^{\frac{1}{2\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} < 0 \end{cases} \quad (4.89)$$

и

$$\rho_{*,j}^{n+1} = \begin{cases} \left\{ \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\exp \left[{}_B(I_4^y)_{*,j}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} \geq 0 \\ \left\{ \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\exp \left[{}_T(I_4^y)_{*,j}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} < 0 \end{cases}; \quad (4.90)$$

$$u_{*,j}^{n+1} = \begin{cases} {}_B(I_3^y)_{*,j}^{n+1} & \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} \geq 0 \\ {}_T(I_3^y)_{*,j}^{n+1} & \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} < 0 \end{cases}. \quad (4.91)$$

Для трансзвукового потока, ускоряющегося вниз, замкнутая система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} v_{*,j}^{n+1} - G_{*,j+1/2}^{n+1/2} \cdot (p_{*,j}^{n+1})^\mu &= {}_T(I_2^y)_{*,j}^{n+1}; \quad v_{*,j}^{n+1} = \sigma_{*,j}^{n+1/2} \cdot c_{*,j}^{n+1} = \sigma_{*,j}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma \cdot \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\rho_{*,j}^{n+1}}}; \\ \sigma_{*,j}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{V_{*,j-1/2}^{n+1/2}}{C_{*,j-1/2}^{n+1/2}} + \frac{V_{*,j+1/2}^{n+1/2}}{C_{*,j+1/2}^{n+1/2}} \right); \\ \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} &\geq 0 \text{ then} \\ \rho_{*,j}^{n+1} &= \left\{ \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\exp \left[{}_B(I_4^y)_{*,j}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}; \quad u_{*,j}^{n+1} = {}_B(I_3^y)_{*,j}^{n+1}; \\ \text{else} \\ \rho_{*,j}^{n+1} &= \left\{ \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\exp \left[{}_T(I_4^y)_{*,j}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}; \quad u_{*,j}^{n+1} = {}_T(I_3^y)_{*,j}^{n+1}; \\ \text{endif} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Решение этой системы имеет ту же структуру, что и выписанное ранее:

$$p_{*,j}^{n+1} = \left[\frac{-{}_T(I_2^y)_{*,j}^{n+1}}{H_{*,j}^{n+1/2} + G_{*,j+1/2}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}; \quad v_{*,j}^{n+1} = {}_B(I_2^y)_{*,j}^{n+1} + G_{*,j+1/2}^{n+1/2} \cdot (p_{*,j}^{n+1})^\mu; \quad (4.93)$$

и

$$\rho_{*,j}^{n+1} = \begin{cases} \left\{ \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\exp \left[{}_B(I_4^y)_{*,j}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\tau}} & \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} \geq 0 \\ \left\{ \frac{P_{*,j}^{n+1}}{\exp \left[{}_T(I_4^y)_{*,j}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\tau}} & \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} < 0 \end{cases};$$

$$u_{*,j}^{n+1} = \begin{cases} {}_B(I_3^y)_{*,j}^{n+1} & \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} \geq 0 \\ {}_T(I_3^y)_{*,j}^{n+1} & \text{if } (\lambda_3^y)_{*,j}^{n+1/2} < 0 \end{cases}. \quad (4.94)$$

Случаи торможения потока по оси Y аналогичны случаям торможения потока по оси X .

Анализ случаев торможения потока № 3 и № 4

В нижней ячейке – сверхзвуковое течение вверх, в верхней – дозвук. На «горизонтальную» грань расчетной ячейки $(i+1/2, j)$ на момент t_{n+1} приходят по крайней мере три характеристики – две первые характеристики, приносящие локальные инварианты ${}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1/2}$, ${}_B(I_2^y)_{*,j}^{n+1/2}$ со стороны нижней ячейки, и одна «вторая» характеристика, приносящая инвариант ${}_T(I_2^y)_{*,j}^{n+1/2}$ со стороны верхней ячейки. Для вычисления потокового давления и нормальной составляющей скорости получающаяся система уравнений оказывается переопределенной, поэтому какие-то из уравнений нужно отбросить. Вычислительные эксперименты показали, что следует отказаться от уравнений, отвечающих вторым инвариантам как со стороны нижней, так и со стороны верхней ячейки, т. е. ${}_B(I_2^y)_{*,j}^{n+1/2}$ и ${}_T(I_2^y)_{*,j}^{n+1/2}$, взять за основу уравнение для инварианта ${}_B(I_1^y)_{*,j}^{n+1/2}$ и дополнить его интерполяцией числа Маха, как это сделано для звуковой точки в случае ускорения потока. Другими словами, с точки зрения вычислительных формул, случай торможения потока полностью совпадает со случаем ускорения потока и описывается формулами (4.88)–(4.91).

То же можно сказать и про случай торможения сверхзвукового потока, движущегося сверху вниз. Он реализуется по формулам (4.93), (4.94).

Потоковые переменные на верхней и нижней границах области определяются с учетом граничных условий.

4.10. Граничные условия

Правая граница

Рассмотрим расчетную ячейку, правое ребро которой соответствует границе области. На границе могут быть заданы различные граничные условия. Для уравнений Эйлера возможны следующие варианты:

- сверхзвуковое втекание;
- сверхзвуковое вытекание;
- дозвуковое втекание;
- непроницаемая стенка;
- свободное вытекание;
- условия периодичности.

Реализация условия сверхзвукового втекания

В этом случае все потоковые переменные на границе приносятся сверхзвуковым налетающим потоком и определяются инвариантами $(I_1^x)_{\infty,*}^{n+1}, (I_2^x)_{\infty,*}^{n+1}, (I_3^x)_{\infty,*}^{n+1}, (I_4^x)_{\infty,*}^{n+1}$, которые поток приносит, и которые легко вычисляются по параметрам набегающего потока:

$$\begin{aligned} (I_1^x)_{\infty,*}^{n+1} &= u_{\infty,*}^{n+1} + G_{\infty,*}^{n+1} \cdot (p_{\infty,*}^{n+1})^\mu; & (I_2^x)_{\infty,*}^{n+1} &= u_{\infty,*}^{n+1} - G_{\infty,*}^{n+1} \cdot (p_{\infty,*}^{n+1})^\mu; \\ (I_3^x)_{\infty,*}^{n+1} &= v_{\infty,*}^{n+1}; & (I_4^x)_{\infty,*}^{n+1} &= \ln \left[\frac{P_{\infty,*}^{n+1}}{(\rho_{\infty,*}^{n+1})^\gamma} \right], \end{aligned} \quad (4.95)$$

где

$$G_{\infty,*}^{n+1} = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \cdot \left[\left(\frac{P_{\infty,*}^{n+1}}{(\rho_{\infty,*}^{n+1})^\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{2\gamma}}; \quad \mu = \frac{\gamma-1}{2\gamma}. \quad (4.96)$$

Таким образом, потоковые переменные на правой границе в этом случае задаются как

$$p_{N,*}^{n+1} = p_{\infty,*}^{n+1}; \quad u_{N,*}^{n+1} = u_{\infty,*}^{n+1}; \quad v_{N,*}^{n+1} = v_{\infty,*}^{n+1}; \quad \rho_{N,*}^{n+1} = \rho_{\infty,*}^{n+1}. \quad (4.97)$$

Реализация условия сверхзвукового вытекания

Все потоковые переменные в этом случае приносятся на границу сверхзвуковым вытекающим потоком и определяются инвариантами $(I_1^x)_{N-1/2,*}^{n+1}, (I_2^x)_{N-1/2,*}^{n+1}, (I_3^x)_{N-1/2,*}^{n+1}, (I_4^x)_{N-1/2,*}^{n+1}$. Граничные потоковые переменные вычисляются по формулам или в текущих обозначениях:

$$\begin{aligned} p_{N,*}^{n+1} &= \left[\frac{{}_L(I_1^x)_{N,*}^{n+1} - {}_L(I_2^x)_{N,*}^{n+1}}{2 \cdot G_{N-1/2,*}^{n+1/2}} \right]^\mu, & \rho_{N,*}^{n+1} &= \left\{ \frac{P_{N,*}^{n+1}}{\exp \left[{}_L(I_4^x)_{N,*}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \\ u_{N,*}^{n+1} &= \frac{{}_L(I_1^x)_{N,*}^{n+1} + {}_L(I_2^x)_{N,*}^{n+1}}{2}, & v_{N,*}^{n+1} &= {}_L(I_3^x)_{N,*}^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Реализация условия дозвукового течения

С правой стороны на границу области набегающий поток с заданными параметрами на бесконечности: $u_{\infty,*}^{n+1}, v_{\infty,*}^{n+1}, \rho_{\infty,*}^{n+1}, p_{\infty,*}^{n+1}$. По этим данным вычисляется скорость звука в набегающем потоке $c_{\infty,*}^{n+1/2} = \sqrt{\gamma \cdot \frac{p_{\infty,*}^{n+1/2}}{\rho_{\infty,*}^{n+1/2}}}$, инварианты Римана набегающего потока

$$\begin{aligned} (I_1^x)_{\infty,*}^{n+1} &= u_{\infty,*}^{n+1} + \frac{2 \cdot c_{\infty,*}^{n+1}}{\gamma - 1}; \quad (I_2^x)_{\infty,*}^{n+1} = u_{\infty,*}^{n+1} - \frac{2 \cdot c_{\infty,*}^{n+1}}{\gamma - 1}; \\ (I_3^x)_{\infty,*}^{n+1} &= v_{\infty,*}^{n+1}; \quad (I_4^x)_{\infty,*}^{n+1} = \ln \left[\frac{p_{\infty,*}^{n+1}}{(\rho_{\infty,*}^{n+1})^\gamma} \right] \end{aligned} \quad (4.99)$$

и осредненные собственные числа на правом ребре расчетной ячейки:

$$\begin{aligned} (\lambda_1^x)_{N,*}^{n+1/2} &= 0, 5 \cdot (U_{N-1/2,*}^{n+1/2} + C_{N-1/2,*}^{n+1/2} + u_{\infty,*}^{n+1} + c_{\infty,*}^{n+1}); \\ (\lambda_2^x)_{N,*}^{n+1/2} &= 0, 5 \cdot (U_{N-1/2,*}^{n+1/2} - C_{N-1/2,*}^{n+1/2} + u_{\infty,*}^{n+1} - c_{\infty,*}^{n+1}); \\ (\lambda_3^x)_{N,*}^{n+1/2} &= (\lambda_4^x)_{N,*}^{n+1/2} = 0, 5 \cdot (U_{N-1/2,*}^{n+1/2} + u_{\infty,*}^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Поскольку поток дозвуковой, то давление и нормальная скорость на границе определяются замкнутой системой уравнений:

$$u_{N,*}^{n+1} + G_{N-1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{N,*}^{n+1})^\mu = {}_L(I_1^x)_{N,*}^{n+1}; \quad u_{N,*}^{n+1} - G_{\infty,*}^{n+1/2} \cdot (p_{N,*}^{n+1})^\mu = {}_\infty(I_2^x)_{N,*}^{n+1}, \quad (4.101)$$

где $G_{\infty,*}^{n+1/2}$ определяется выражением. Решение этой системы имеет вид:

$$p_{N,*}^{n+1} = \left[\frac{{}_L(I_1^x)_{N,*}^{n+1} - {}_\infty(I_2^x)_{N,*}^{n+1}}{G_{N-1/2,*}^{n+1/2} + G_{\infty,*}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}; \quad u_{N,*}^{n+1} = \frac{G_{\infty,*}^{n+1/2} \cdot {}_L(I_1^x)_{N,*}^{n+1} + G_{N-1/2,*}^{n+1/2} \cdot {}_\infty(I_2^x)_{N,*}^{n+1}}{G_{\infty,*}^{n+1/2} + G_{N-1/2,*}^{n+1/2}}. \quad (4.102)$$

Плотность и касательная скорость зависят от знака осредненной характеристической скорости переноса для третьего и четвертого инвариантов.

$$\rho_{N,*}^{n+1} = \begin{cases} \left\{ \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\exp \left[{}_L(I_4^x)_{N,*}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,*}^{n+1/2} \geq 0 \\ \left\{ \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\exp \left[{}_\infty(I_4^x)_{N,*}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,*}^{n+1/2} < 0 \end{cases}, \quad (4.103)$$

$$v_{i,*}^{n+1} = \begin{cases} {}_L(I_3^x)_{N,*}^{n+1} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,*}^{n+1/2} \geq 0; \\ {}_\infty(I_3^x)_{N,*}^{n+1} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,*}^{n+1/2} < 0. \end{cases} \quad (4.104)$$

Реализация условия не протекания на правой стенке

В этом случае нормальная составляющая потоковой скорости на правом ребре должна равняться нулю: $u_N^{n+1} = 0$. Расчетные формулы для остальных потоковых величин будут зависеть от комбинации характеристических чисел, вычисленных по значениям консервативных переменных в данной ячейке на половинном слое по времени: $(\lambda_k^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2}$, $k = 1, 2, 3$.

Если $\left[(\lambda_1^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} < 0, (\lambda_3^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} = (\lambda_4^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} \geq 0 \right]$, то на правую грань приходят три характеристики, и система определяющих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{N,*}^{n+1} + G_{N-1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{N,*}^{n+1})^\mu &= (I_1^x)_{N,*}^{n+1}; \quad u_{N,*}^{n+1} = 0; \\ v_{N,*}^{n+1} &= {}_L(I_3^x)_{N,*}^{n+1}; \quad \ln \left[p_{N,*}^{n+1} / (p_{N,*}^{n+1})^\gamma \right] = {}_L(I_4^x)_{N,*}^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.105)$$

откуда и находятся новые потоковые переменные:

$$\begin{aligned} p_{N,*}^{n+1} &= \left[\frac{(I_1^x)_{N,*}^{n+1}}{G_{N-1/2,*}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}; \quad \rho_{N,*}^{n+1} = \left\{ \frac{p_{N,*}^{n+1}}{\exp \left[{}_L(I_4^x)_{N,*}^{n+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}; \\ v_{N,*}^{n+1} &= {}_L(I_3^x)_{N,*}^{n+1}; \quad u_{N,*}^{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (4.106)$$

В случае, когда консервативная скорость направлена «от стенки», на правую границу приходит только одна характеристика, и система определяющих уравнений оказывается замкнутой, но не полной:

$$u_{N,*}^{n+1} + G_{N-1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{N,*}^{n+1})^\mu = (I_1^x)_{N,*}^{n+1}; \quad u_{N,*}^{n+1} = 0. \quad (4.107)$$

Из системы (4.107) находим:

$$p_{N,*}^{n+1} = \left[\frac{(I_1^x)_{N,*}^{n+1}}{G_{N-1/2,*}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}; \quad u_{N,*}^{n+1} = 0. \quad (4.108)$$

Касательная составляющая скорости к стенке и плотность в этом случае полагаются равными соответствующим значениям промежуточных консервативных переменных в данной ячейке:

$$v_{N,*}^{n+1} = v_{N-1/2,*}^{n+1/2}; \quad \rho_{N,*}^{n+1} = \rho_{N-1/2,*}^{n+1/2}. \quad (4.109)$$

В случае сверхзвукового потока вправо, т. е. когда

$\left[(\lambda_1^x)^{n+1/2}_{N-1/2,*} \geq 0, (\lambda_2^x)^{n+1/2}_{N-1/2,*} \geq 0, (\lambda_3^x)^{n+1/2}_{N-1/2,*} = (\lambda_4^x)^{n+1/2}_{N-1/2,*} \geq 0 \right]$, потоковые переменные вычисляются по формулам (4.106), в случае сверхзвукового потока влево (от границы), все потоковые переменные (кроме нормальной скорости) на новом временном слое полагаются равными их консервативным значениям на половинном слое по времени:

$$\begin{aligned} p_{N,*}^{n+1} &= (\gamma - 1) \cdot \Theta_{N-1/2,*}^{n+1/2} \cdot \mathcal{E}_{N-1/2,*}^{n+1/2}; & u_{N,*}^{n+1} &= 0; \\ v_{N,*}^{n+1} &= V_{N-1/2,*}^{n+1/2}; & \rho_{N,*}^{n+1} &= \Theta_{N-1/2,*}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (4.110)$$

где

$$\mathcal{E}_{N-1/2,*}^{n+1/2} = E_{N-1/2,*}^{n+1/2} - 0,5 \cdot \left[\left(U_{N-1/2,*}^{n+1/2} \right)^2 + \left(V_{N-1/2,*}^{n+1/2} \right)^2 \right].$$

Реализация условий «свободного вытекания»

Граничное условие «свободного вытекания» ставится при расчетах течений в трубах и каналах при достижении в точках границы условий квазистационарности, которое в символьном виде иногда записывается как

$$\left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0; \quad \bar{\varphi} = (\rho, u, v, p)^T. \quad (4.111)$$

Следует отметить, что при этом течение может быть и вихревым. В этом случае условие нужно трактовать как осредненное по конечному отрезку времени Δt .

При свободном вытекании течение дозвуковое, поэтому на правое ребро расчетной ячейки всегда приходит по крайней мере одна характеристика изнутри области, которая приносит инвариант $(I_1^x)_{N,*}^{n+1} = u_{N,*}^{n+1} + G_{N-1/2,*}^{n+1/2} \cdot (p_{N,*}^{n+1})^\mu$.

Вместо второго инварианта, значение которого неизвестно, записывается условие квазистационарности числа Маха:

$$\frac{u_{N,*}^{n+1}}{c_{N,*}^{n+1}} = \frac{U_{N-1/2,*}^{n+1/2}}{C_{N-1/2,*}^{n+1/2}} = \sigma^{n+1/2}; \quad c_{N,*}^{n+1} = \sqrt{\gamma \cdot \frac{p_{N,*}^{n+1}}{\rho_{N,*}^{n+1}}} \quad (4.112)$$

и квазистационарности третьего характеристического числа:

$$(\lambda_3^x)_{N,*}^{n+1} = (\lambda_4^x)_{N,*}^{n+1} = (\lambda_3^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2}. \quad (4.113)$$

Таким образом, система уравнений, определяющая потоковые переменные на границе, будет аналогична системе уравнений, описывающих «звуковую точку» (4.75):

$$u_{N,\bullet}^{n+1} + G_{N-1/2,\bullet}^{n+1/2} \cdot (p_{N,\bullet}^{n+1})^\mu = {}_L(I_1^x)_{N,\bullet}^{n+1};$$

$$u_{i,\bullet}^{n+1} = \begin{cases} \sigma_{i,\bullet}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp\left[{}_L(I_4^x)_{i,\bullet}^{n+1}\right]^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot (p_{i,\bullet}^{n+1})^\mu & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,\bullet}^{n+1/2} \geq 0 \\ \sigma_{i,\bullet}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp\left[{}_\infty(I_4^x)_{i,\bullet}^{n+1}\right]^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot (p_{i,\bullet}^{n+1})^\mu & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,\bullet}^{n+1/2} < 0. \end{cases} \quad (4.114)$$

Из этой системы находятся потоковые переменные нормальной скорости и давления:

$$p_{N,\bullet}^{n+1} = \left[\frac{{}_L(I_1^x)_{N,\bullet}^{n+1}}{H_{N,\bullet}^{n+1/2} + G_{N-1/2,\bullet}^{n+1/2}} \right]^\frac{1}{\mu}; \quad u_{N,\bullet}^{n+1} = {}_L(I_1^x)_{N,\bullet}^{n+1} - G_{N-1/2,\bullet}^{n+1/2} \cdot (p_{N,\bullet}^{n+1})^\mu, \quad (4.115)$$

где

$$H_{N,\bullet}^{n+1/2} = \begin{cases} \sigma_{N,\bullet}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp\left[{}_L(I_4^x)_{N,\bullet}^{n+1}\right]^{\frac{1}{2\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,\bullet}^{n+1/2} \geq 0 \\ \sigma_{N,\bullet}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp\left[{}_\infty(I_4^x)_{N,\bullet}^{n+1}\right]^{\frac{1}{2\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,\bullet}^{n+1/2} < 0 \end{cases}. \quad (4.116)$$

Потоковая плотность и касательная компонента скорости определяются выражениями:

$$\rho_{N,\bullet}^{n+1} = \begin{cases} \left\{ \frac{p_{N,\bullet}^{n+1}}{\exp\left[{}_L(I_4^x)_{N,\bullet}^{n+1}\right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,\bullet}^{n+1/2} \geq 0 \\ \left\{ \frac{p_{i,\bullet}^{n+1}}{\exp\left[{}_\infty(I_4^x)_{N,\bullet}^{n+1}\right]} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,\bullet}^{n+1/2} < 0 \end{cases}; \quad (4.117)$$

и

$$v_{N,\bullet}^{n+1} = \begin{cases} {}_L(I_3^x)_{N,\bullet}^{n+1} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,\bullet}^{n+1/2} \geq 0 \\ {}_\infty(I_3^x)_{N,\bullet}^{n+1} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,\bullet}^{n+1/2} < 0 \end{cases}. \quad (4.118)$$

Следует отметить, что если характеристическая скорость $(\lambda_3^x)_{N,\bullet}^{n+1/2} \geq 0$, т. е. направлена наружу области, то все потоковые переменные определяются однозначно по информации, получаемой изнутри области. В противном случае, если в результате выхода за пределы области вихревой структуры возникают условия, при которых характеристическая скорость на короткий промежуток времени становится отрицательной, т. е. направленной внутрь области, решение будет зависеть от инвариантов $(I_3^x)_{N,\bullet}^{n+1}$ и $(I_4^x)_{N,\bullet}^{n+1}$, ранее нигде не определенных. Их следует каким-либо образом доопределить. Конкретные значения этих инвариантов зависят от особенностей решаемой задачи.

Условия периодичности задаются очевидным образом, поэтому не будем на них специально останавливаться.

Выписанные для правой границы граничные условия легко переписываются и для левой границы, а также для верхней и нижней границ.

4.11. Вычисление новых значений консервативных переменных

После того, как все значения потоковых переменных на новом временном слое, в том числе и на границах расчетной области, вычислены, новые значения консервативных переменных находятся явным образом из системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - \Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\rho u)_{i+1,j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{i,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\rho v)_{i+1/2,j+1}^{n+1} - (\rho v)_{i+1/2,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} = 0; \\
 & \frac{(\Theta U)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - (\Theta U)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\rho u^2 + p)_{i+1,j+1/2}^{n+1} - (\rho u^2 + p)_{i,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \\
 & + \frac{(\rho vu)_{i+1/2,j+1}^{n+1} - (\rho vu)_{i+1/2,j}^{n+1}}{\tau_{n+1/2}} = 0; \\
 & \frac{(\Theta V)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - (\Theta V)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\rho v^2 + p)_{i+1/2,j+1}^{n+1} - (\rho v^2 + p)_{i+1/2,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} + \\
 & + \frac{(\rho vu)_{i+1,j+1/2}^{n+1} - (\rho vu)_{i,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0; \\
 & \frac{(\Theta E)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - (\Theta E)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\rho eu + pu)_{i+1,j+1/2}^{n+1} - (\rho eu + pu)_{i,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \\
 & + \frac{(\rho ev + pv)_{i+1/2,j+1}^{n+1} - (\rho ev + pv)_{i+1/2,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} = 0; \\
 & E_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} = \mathcal{E}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + 0,5 \cdot U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \cdot U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + 0,5 \cdot V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \cdot V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}, \quad (4.119)
 \end{aligned}$$

являющейся прямым следствием систем (4.32) и (4.33). Действительно, если сложить (4.119) с (4.33), получим систему дивергентных уравнений второго порядка аппроксимации (4.32).

4.12. Условия вычислительной устойчивости и вычисление величины шага по времени

Для вычислительной устойчивости описываемого алгоритма необходимо соблюдать условия его корректности, выполняющиеся только в том случае, когда все обратные характеристики, проходящие через середины граней на новом временном слое, пересекают плоскость текущего временного слоя в пределах данной ячейки. Математически это выражается неравенствами:

$$\frac{\tau_{n+1/2} \cdot \left| (\lambda_k^x)_{i+1/2,*}^n \right|}{\Delta x_{i+1/2}} \leq 1; \quad \frac{\tau_{n+1/2} \cdot \left| (\lambda_k^y)_{*,j+1/2}^n \right|}{\Delta y_{j+1/2}} \leq 1; \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (4.120)$$

где

$$\begin{aligned} (\lambda_1^x)_{i+1/2,*}^n &= U_{i+1/2,*}^n + C_{i+1/2,*}^n; (\lambda_2^x)_{i+1/2,*}^n = U_{i+1/2,*}^n - C_{i+1/2,*}^n; (\lambda_3^x)_{i+1/2,*}^n = (\lambda_4^x)_{i+1/2,*}^n = U_{i+1/2,*}^n; \\ (\lambda_1^y)_{*,j+1/2}^n &= V_{*,j+1/2}^n + C_{*,j+1/2}^n; (\lambda_2^y)_{*,j+1/2}^n = V_{*,j+1/2}^n - C_{*,j+1/2}^n; (\lambda_3^y)_{*,j+1/2}^n = (\lambda_4^y)_{*,j+1/2}^n = V_{*,j+1/2}^n. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Следует отметить, что

$$C_{i+1/2,*}^n = C_{*,j+1/2}^n = \sqrt{\gamma \cdot \frac{p_{*,j+1/2}^n}{\rho_{*,j+1/2}^n}} = \sqrt{\gamma \cdot \frac{p_{i+1/2,*}^n}{\rho_{i+1/2,*}^n}}. \quad (4.122)$$

Из неравенств следует, что величину шага интегрирования по времени следует выбирать из условия

$$\tau_{n+1/2} = CFL \cdot \min_{i,j} \left\{ \frac{\Delta x_{i+1/2}}{\left| (\lambda_k^x)_{i+1/2,*}^n \right|}, \frac{\Delta y_{j+1/2}}{\left| (\lambda_k^y)_{*,j+1/2}^n \right|} \right\}; \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (4.123)$$

где CFL – число Куранта – Фридрихса – Леви. Из практики расчетов следует, что для устойчивости двумерного алгоритма необходимо, чтобы $CFL \leq 0,5$.

4.13. Примеры тестовых расчетов

Задача о сильном взрыве

В единичном прямоугольнике задана равномерная расчетная сетка с квадратными ячейками. Будем считать, что в начальный момент газ имеет постоянную плотность и покоится. Поле давления однородно всюду, за исключением левой нижней угловой ячейки, где его величина в 10^6 раз превышает фоновое значение. На левой и нижней границах – условие непротекания, на верхней и правой – свободные границы с условиями на бесконечности, совпадающими с фоновыми начальными условиями. Разрешенность расчетной сетки – 20×20 ячеек.

На рисунке 4.5 приведен график изолиний удельной внутренней энергии на начальный момент времени. На рисунках 4.6а, 4.6б приведены изолинии плотности и давления на более поздний момент времени, когда ударная волна прошла большую часть области. На рисунках 4.7а, 4.7б приведены графики тех же величин в изометрической проекции. Основные вопросы, которые ставились перед этим расчетом: выдержит ли схема такой большой перепад давлений в одной расчетной ячейке, и в какой степени нарушится симметрия распространения на такой грубой расчетной сетке?

Выводы: схема считает устойчиво при $CFL = 0,32$, решение монотонно и почти цилиндрически симметрично. Сравнение с точным решением не проводилось.

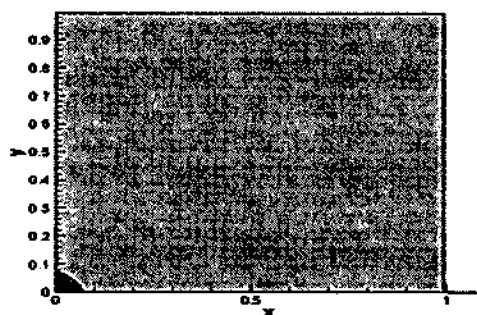


Рис. 4.5. Изолинии начального распределения внутренней энергии

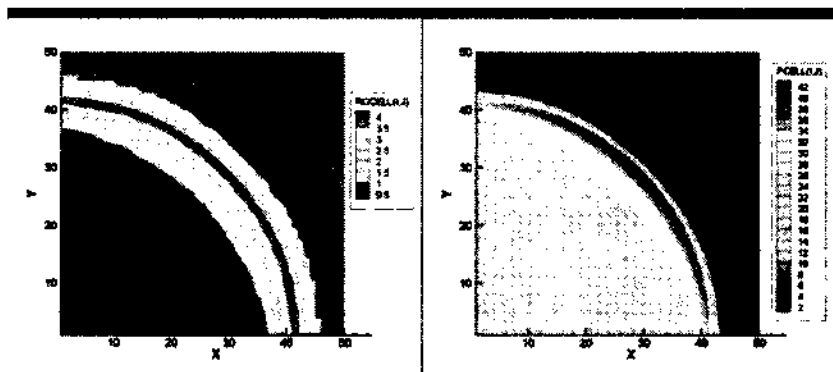


Рис. 4.6а. Изолинии плотности в задаче о сильном взрыве. Сетка 20×20 , начальный перепад давления 10^6 в одной угловой ячейке. $CFL = 0,32$ (см. цветную вклейку)

Рис. 4.6б. Изолинии давления в задаче о сильном взрыве. Сетка 20×20 , начальный перепад давления 10^6 в одной угловой ячейке. $CFL = 0,32$ (см. цветную вклейку)

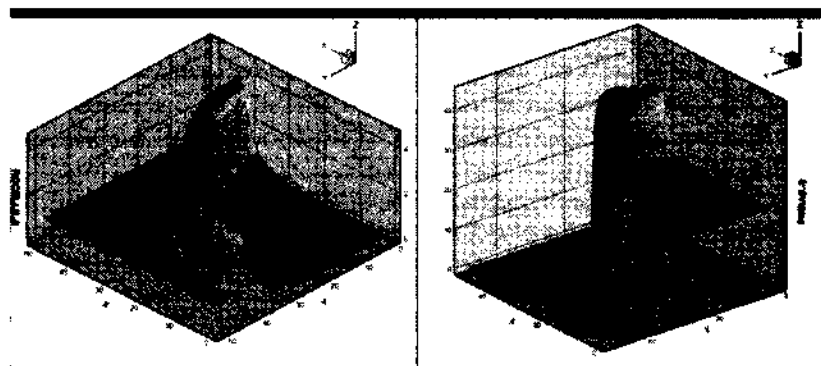


Рис. 4.7а. Изометрическое изображение функции плотности в задаче о сильном взрыве. Сетка 20×20 , начальный перепад давления 10^6 в одной угловой ячейке. $CFL = 0,32$ (см. цветную вклейку)

Рис. 4.7б. Изометрическое изображение функции давления в задаче о сильном взрыве. Сетка 20×20 , начальный перепад давления 10^6 в одной угловой ячейке. $CFL = 0,32$ (см. цветную вклейку)

Двойное маховское отражение

Из верхнего полупространства на горизонтальную отражающую поверхность, совпадающую с осью X , падает косая ударная волна под углом в 60 градусов при числе Маха, равном 10. Расчетная область имеет размеры $[0,4] \times [0,1]$. Отражающая поверхность начинается при $x = 1/6$ и безгранично простирается вправо. В начальный момент косая ударная волна соприкасается с левой границей поверхности. На нижней границе области при $x \in [0, \frac{1}{6}]$ граничные условия соответствуют параметрам потока за набегающей ударной волной. При $x \in [\frac{1}{6}, 4]$ налагаются отражающие граничные условия. Задача решается до момента времени $t = 0,2$ на сгущающейся последовательности сеток без каких-либо настроечных параметров.

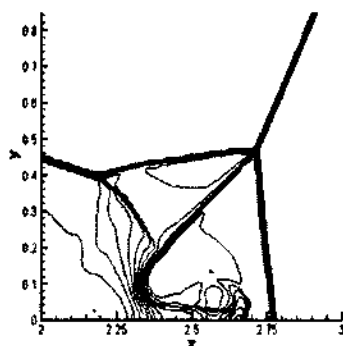


Рис. 4.8а. Двойное маховское отражение. Фрагмент расчетной области. Изолинии плотности. Расчетная сетка (481×121) ячеек на всю область

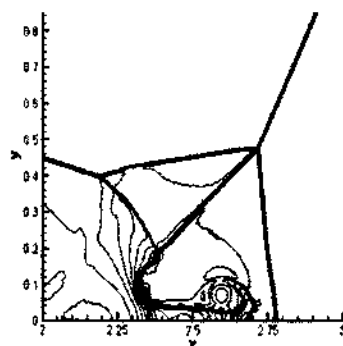


Рис. 4.8б. Двойное маховское отражение. Изолинии плотности. Фрагмент расчетной области. Расчетная сетка (961×241) ячеек на всю область

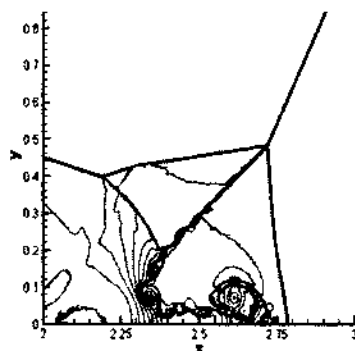


Рис. 4.9. Двойное маховское отражение. Фрагмент расчетной области. Изолинии плотности. Расчетная сетка (1921×481) ячеек на всю область

Сравнение результатов с результатами других авторов (Titarev and Toro, 2002) и (J. Qin and C.-W. Shu, 2003), полученными по схемам высокой разрешимости, указывает на высокую конкурентоспособность схемы «КАБАРЕ».

Распространение акустического возмущения по неподвижному фону на неравномерной сетке

В середине квадратной области $(x, y) \in [-100, 100] \times [-100, 100]$ с постоянными газодинамическими параметрами $p_{\text{фон}}(x, y) = 1/\gamma$, $\rho_{\text{фон}}(x, y) = 1$, $u_{\text{фон}}(x, y) = 0$, $\gamma = 1,4$ в начальный момент времени задано малое по амплитуде (акустическое) возмущение поля давления и плотности $\delta p(x, y)|_{t=0} = \delta \rho(x, y)|_{t=0} = \xi(x, y)$ при нулевой начальной скорости $u(x, y)|_{t=0} = 0$, где $\xi(x, y) = \alpha \cdot \exp(-\beta((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2))$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\beta = \log(2/9)$. (рис. 4.10).

Использовалась неравномерная расчетная сетка с параметрами (рис. 4.11):

$$h_x = 1, x \in [-100, 0]; h_x = 2, x \in [0, 100]; h_y = 1, y \in [-100, 0]; h_y = 2, y \in [0, 100].$$

На границах области задавались инварианты, приносимые из бесконечности, отвечающей невозмущенному фону. Анализировалась степень отклонения цилиндрической акустической волны от идеальной формы при распространении по подобластям с разной густотой сетки.

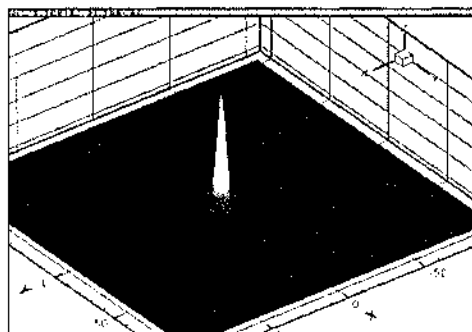


Рис. 4.10. Акустическое возмущение давления в форме гауссиана с амплитудой 10^{-5} от фона

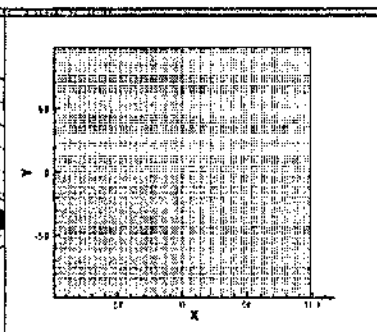


Рис. 4.11. Вид неравномерной расчетной сетки

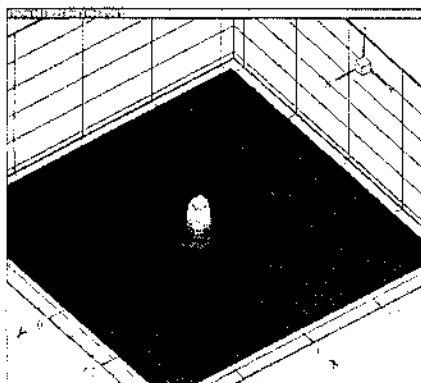


Рис. 4.12а. Поле давления в начальной стадии

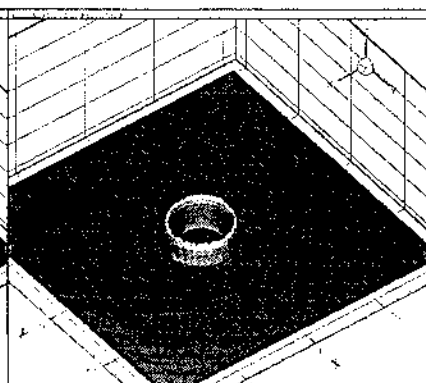


Рис. 4.12б. Поле давления в начальной стадии

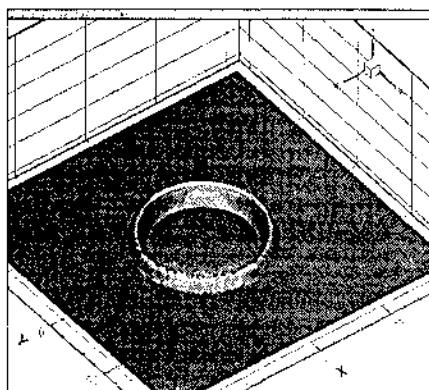


Рис. 4.12в. Поле давления в промежуточной стадии

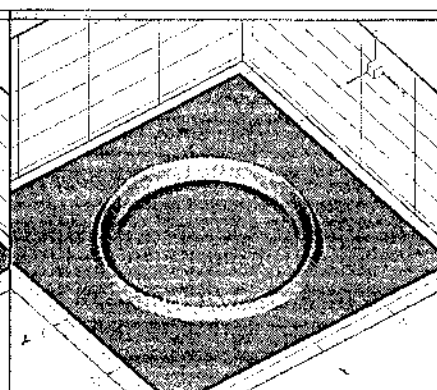


Рис. 4.12г. Поле давления в промежуточной стадии

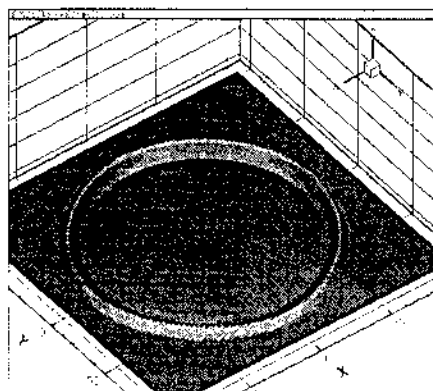


Рис. 4.12д. Поле давления в промежуточной стадии

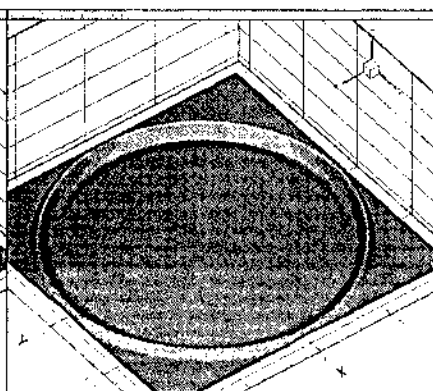


Рис. 4.12е. Поле давления в промежуточной стадии

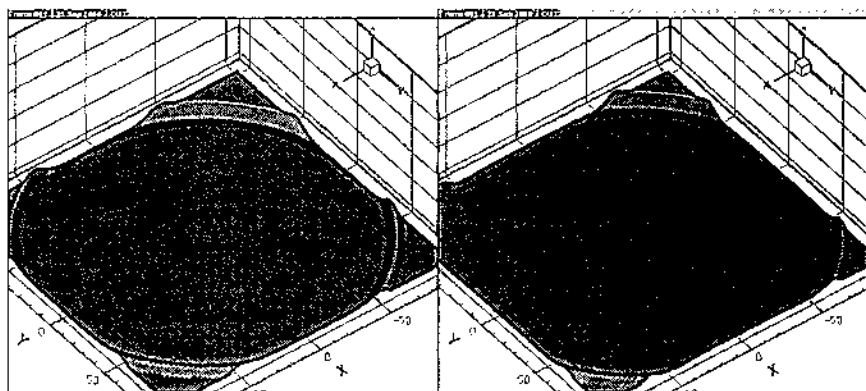


Рис. 4.12ж. Поле давления в заключительной стадии Рис. 4.12з. Поле давления в заключительной стадии

Распространение акустического возмущения по движущемуся фону на однородной сетке

В квадратной области с размерами $L_x = 100$, $L_y = 100$ на фоновом течении с параметрами $\rho_{\text{фон}}(x, y) = 1/\gamma$, $\rho_{\text{фон}}(x, y) = 1$, $u_{\text{фон}}(x, y) = 0,5$, $\gamma = 1,4$ в точке с центром $x_0 = 25$, $y_0 = 50$ задано возмущение давления и плотности в виде гауссиана с параметрами

$$\delta p(x, y, t_0) = \alpha \cdot \text{EXP}\left\{-\beta \cdot \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]\right\}, \quad \beta = \log 2/9, \quad \alpha = 10^{-5},$$

$\delta \rho(x, y, t_0) = \delta p(x, y, t_0)/(\gamma - 1)$. Расчеты проводились на сетке $N_x = 101$, $N_y = 101$.

На рисунке 4.13 изображены два профиля поля давления. Один профиль отвечает начальному возмущению, второй, цилиндрический, моменту выхода акустического возмущения на границы расчетной области.

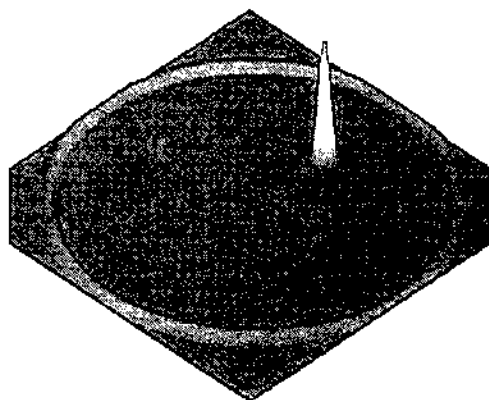


Рис. 4.13. На одном рисунке совмещены начальный профиль давления и форма акустического возмущения поля давления на момент его выхода на границу расчетной области

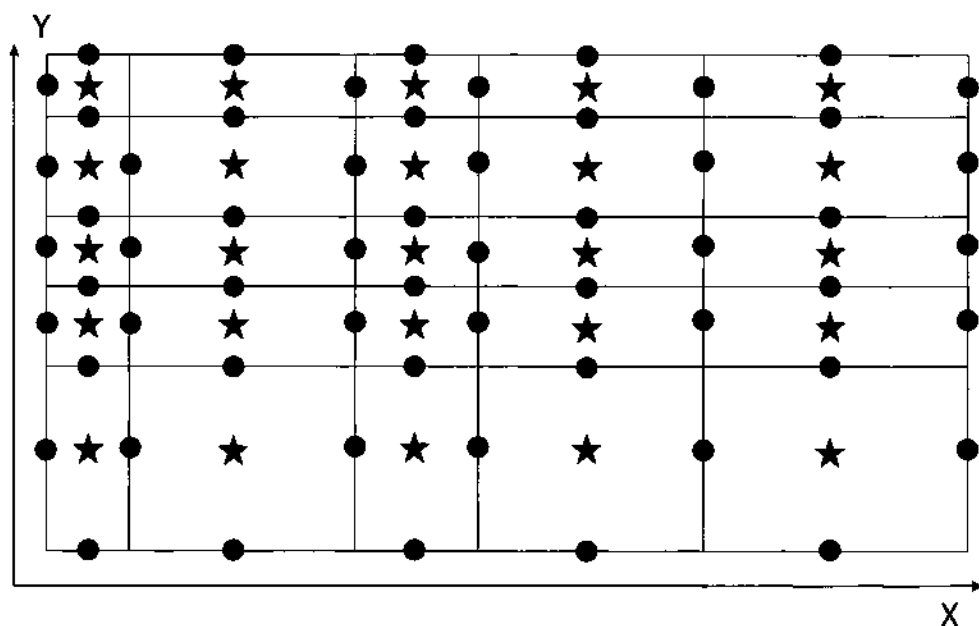


Рис. 4.1. Схематическое изображение проекции сеточных множеств на элементы расчетной сетки. Центры расчетных ячеек, обозначенные красными звездочками, являются носителями сеточных множеств консервативных переменных $\mathcal{H}_w$. Средины вертикальных граней, отмеченные коричневыми кружками, являются «точками привязки» дискретных потоковых переменных сеточного множества $\mathcal{H}_w$. Средины горизонтальных граней, обозначенные зелеными кружками, отвечают сеточному множеству $\mathcal{H}_y$ (к стр. 176)

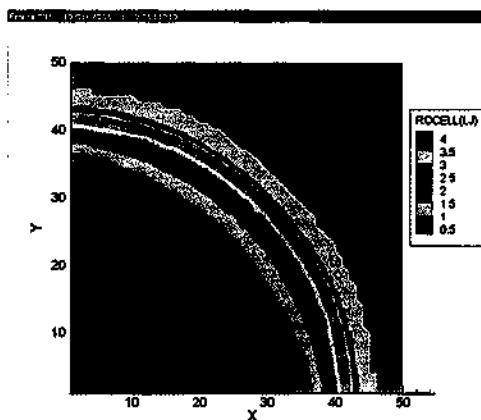


Рис. 4.6а. Изолинии плотности в задаче о сильном взрыве. Сетка 20×20 , начальный перепад давления 10^6 в одной угловой ячейке. CFL = 0,32 (к стр. 204)

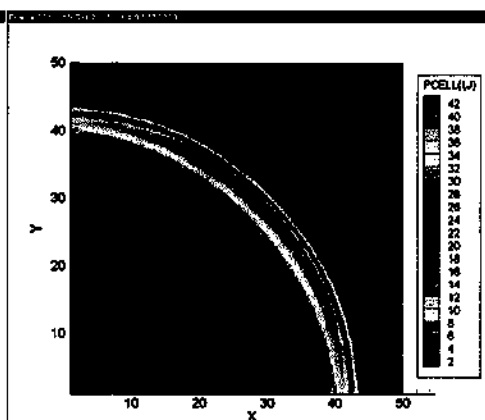


Рис. 4.6б. Изолинии давления в задаче о сильном взрыве. Сетка 20×20 , начальный перепад давления 10^6 в одной угловой ячейке. CFL = 0,32 (к стр. 204)

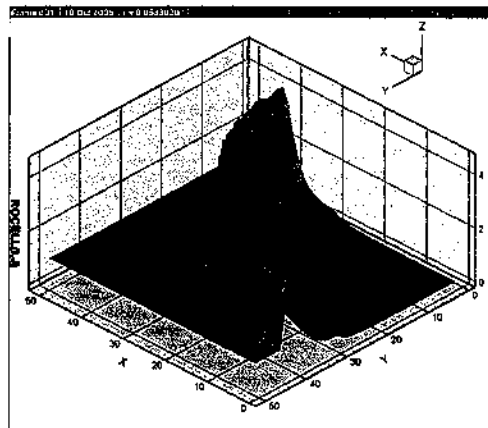


Рис. 4.7а. Изометрическое изображение функции плотности в задаче о сильном взрыве. Сетка 20×20 , начальный перепад давления 10^6 в одной угловой ячейке. $CFL = 0,32$ (к стр. 204)

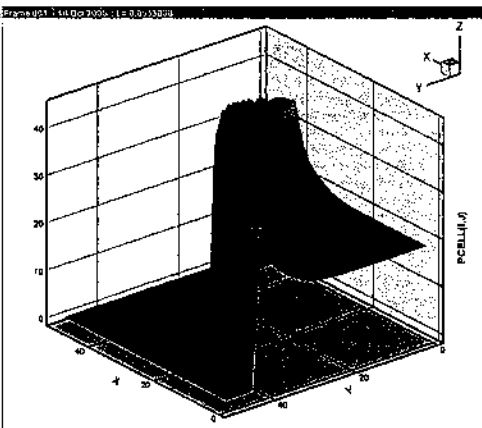


Рис. 4.7б. Изометрическое изображение функции давления в задаче о сильном взрыве. Сетка 20×20 , начальный перепад давления 10^6 в одной угловой ячейке. $CFL = 0,32$ (к стр. 204)

Зависимость кинетической энергии от времени

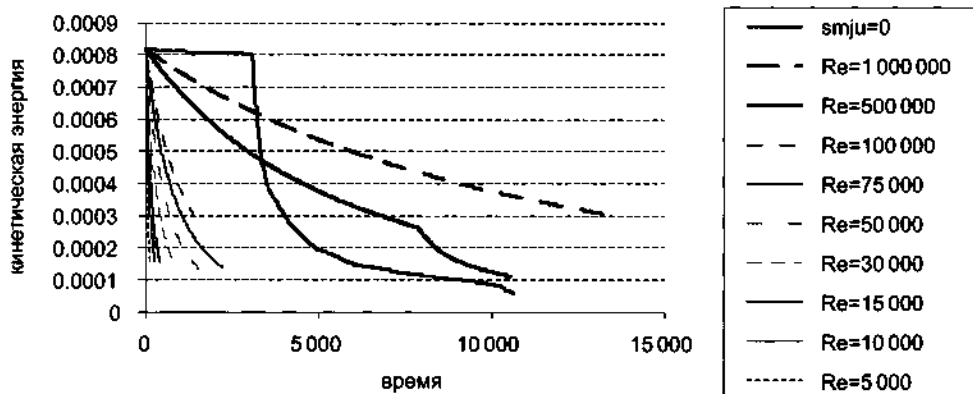


Рис. 4.26. Зависимость кинетической энергии вихря от времени при различных числах Рейнольдса. Красная сплошная линия с резким изломом отвечает нулевой вязкости. При нулевой вязкости за несколько тысяч оборотов развивается нелинейная неустойчивость, которая приводит к быстрому развалу вихря на ряд более мелких, которые затем быстро затухают (к стр. 225)

Зависимость кинетической энергии от времени

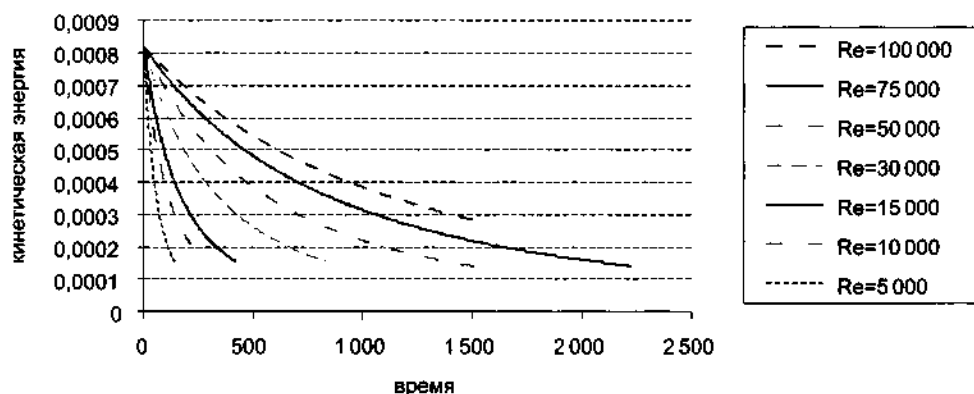


Рис. 4.27. Кривые диссипации кинетической энергии для чисел Рейнольдса, меньших 100 000. Эти графики можно использовать для оценки аппроксимационной вязкости у других схем посредством сравнения с их кривыми диссипации на описанной задаче (к стр. 225)

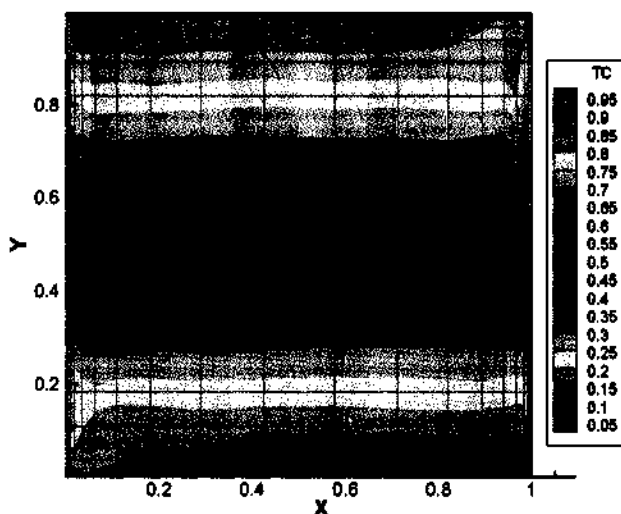


Рис. 6.13. Распределение температуры на сетке 20×20 ячеек при $Ra=10^{10}$ (к стр. 325)

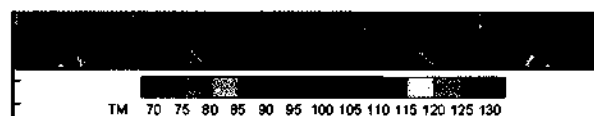
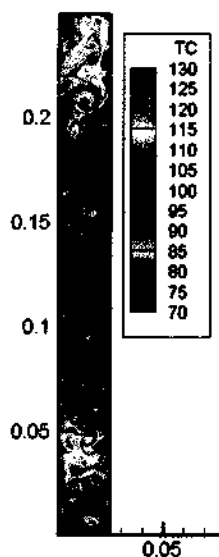


Рис. 6.19. Распределение температуры в один из моментов времени (к стр. 331)

Рис. 6.21. Распределение средней по времени температуры (к стр. 332)

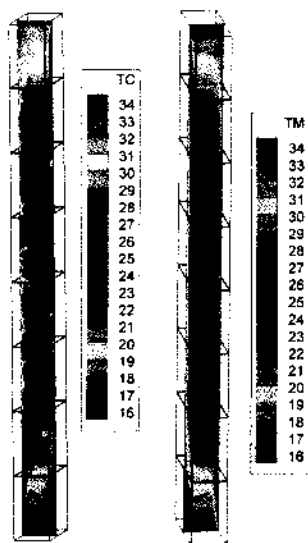


Рис. 6.33. Слева – распределение температуры в сечении расчетной области; справа – осредненное по времени распределение температуры (к стр. 346)

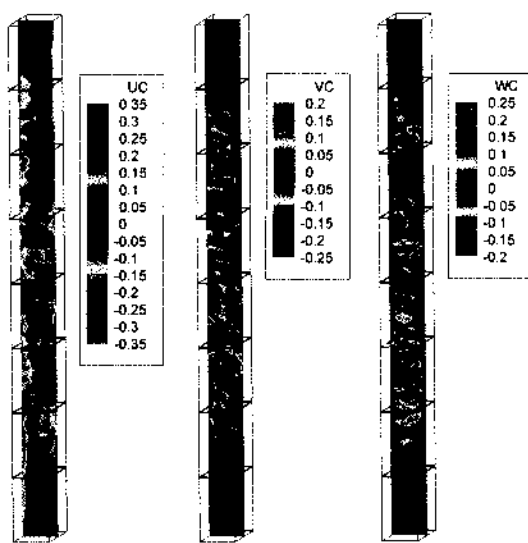


Рис. 6.34. Распределения компонент скоростей u , v , w в сечении расчетной области в один из моментов времени (к стр. 347)

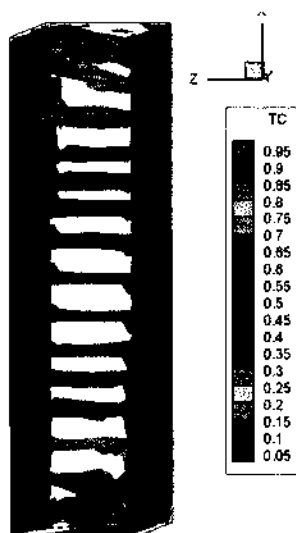
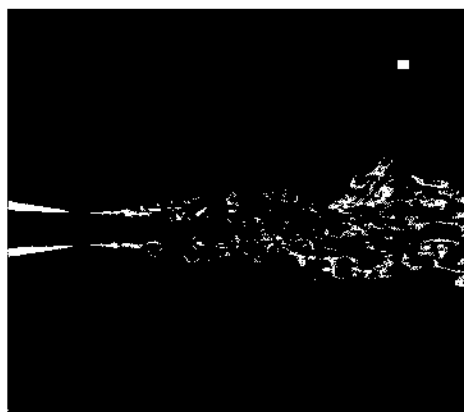
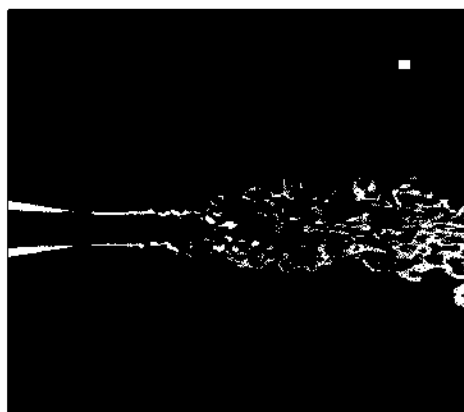


Рис. 6.41. Изоповерхности температуры в установившемся режиме течения, полученные методом «КАБАРЕ» (к стр. 352)



e



f

Рис. 8.8. Соответствующие распределения полей завихренности (e) и (f) в плоскости симметрии струи (к стр. 449)

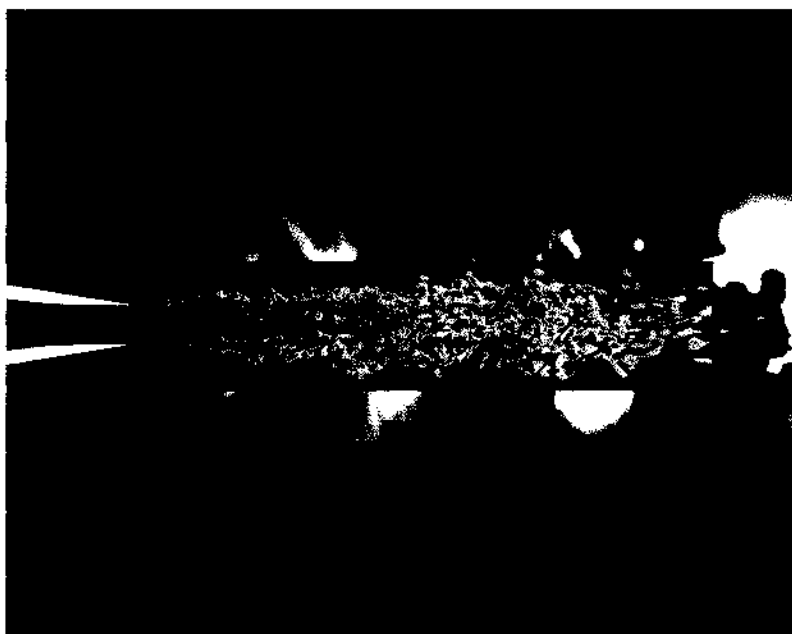


Рис. 8.9. Мгновенное распределение гидродинамических (завихренности) и акустических (давления в акустическом диапазоне) пульсаций с плоскости симметрии струи (*к стр. 450*)

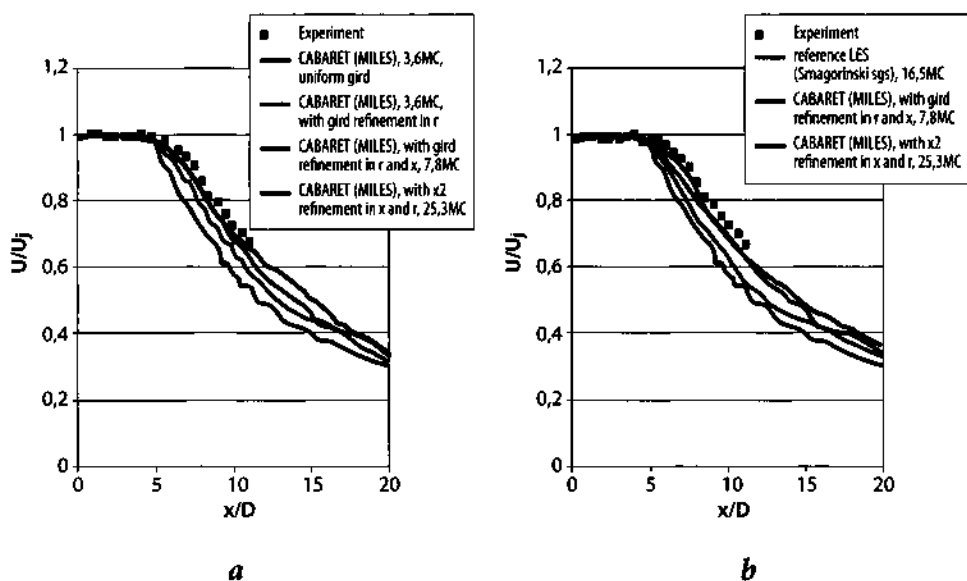


Рис. 8.10. Сравнение распределений усредненной по времени аксиальной компоненты скорости (а), (б) вдоль оси струи (*к стр. 451*)

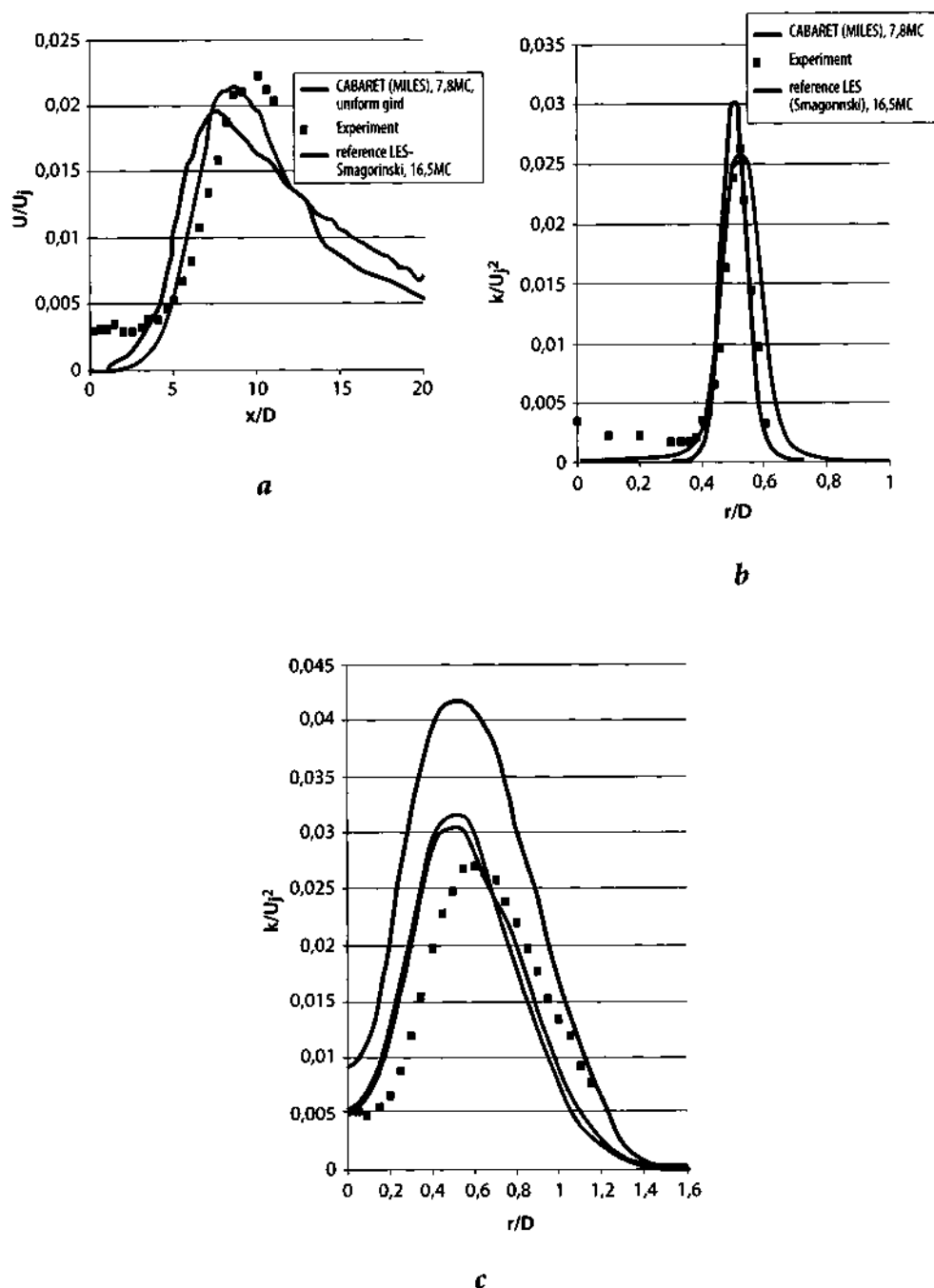
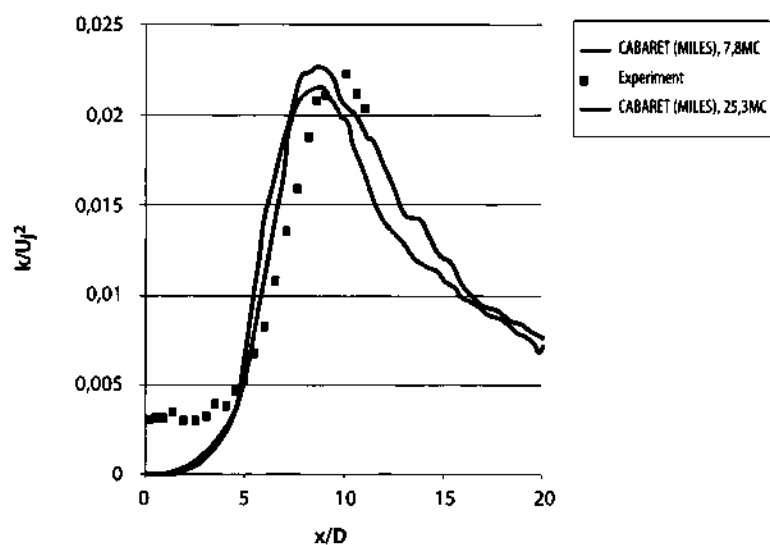
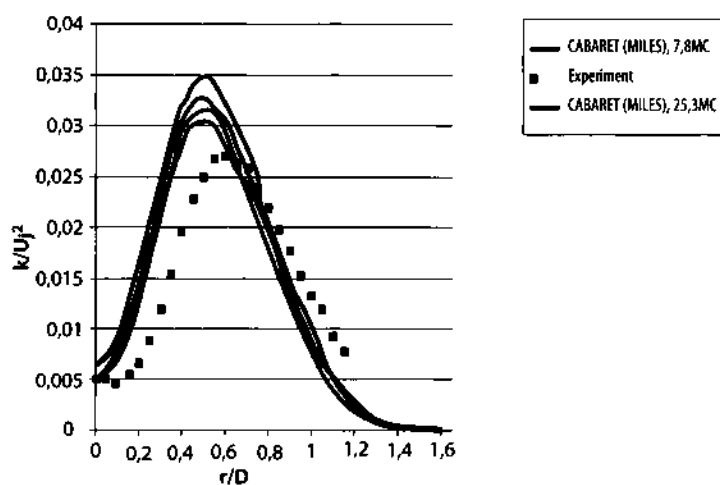


Рис. 8.11. Сравнение распределений усредненной по времени турбулентной кинетической энергии (а) вдоль оси струи и соответствующих радиальных профилей на расстоянии (б) 1 и (с) 5 калибров от среза сопла (*к стр.* 452)



a



b

Рис. 8.12. Сравнение распределений усредненной по времени турбулентной кинетической энергии вдоль оси струи (а) и соответствующих радиальных профилей (b) на расстоянии 5 калибров от среза сопла (к стр. 453)

Одиночный изэнтропический вихрь

В единичном квадрате с периодическими граничными условиями на неподвижном фоне с параметрами $\rho_0, p_0, u_0 = 0, v_0 = 0$ задано возмущение в виде изолированного вихря с центром в середине области и нулевой общей циркуляцией.

В начальный момент возмущения плотности, скорости и давления задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho_0 \left[\left(1 - \frac{(\gamma-1)}{4\alpha\gamma} \varepsilon^2 \exp\{2\alpha(1-\tau^2)\} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right]; \\ p' &= p_0 \left[\left(1 - \frac{(\gamma-1)}{4\alpha\gamma} \varepsilon^2 \exp\{2\alpha(1-\tau^2)\} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]; \\ u' &= \varepsilon \tau \exp\{\alpha(1-\tau^2)\} \sin \theta; \quad v' = -\varepsilon \tau \exp\{\alpha(1-\tau^2)\} \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.124)$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= r/r_c; r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}; \theta = \tan^{-1}((y-y_0)/(x-x_0)); \\ \varepsilon &= 0,204; \alpha = 0,3; r_c = 0,05; x_0 = y_0 = 0,5. \end{aligned}$$

Равновесное течение в данном вихре обеспечивается тем, что центробежные силы уравновешиваются градиентом давления. Энтропия в вихре при этом остается постоянной и равной энтропии невозмущенной среды. Известно, что такой изолированный 2D-вихрь без учета вязкости соответствует устойчивому решению для всех мод колебаний и совершает один оборот за время $T = 1,047$.

Данная модельная задача решалась по схеме «КАБАРЕ» на последовательности расчетных сеток, и результаты решения сравнивались с известными из литературных источников.

На рисунке 4.14 приведен начальный профиль давления на расчетной сетке (50×50) расчетных ячеек. Расчеты показывают, что форма этого возмущения, как и возмущений других физических величин, в процессе расчета остается практически неизменной. В течение времени, соответствующего одному обороту, амплитуда давления уменьшается примерно на 1%, и в дальнейшем остается постоянной неограниченно долго. Фактически это означает, что на данной задаче никак не проявляется т. н. «аппроксимационная вязкость», присущая всем известным ранее схемам. Это уникальное явление можно было бы назвать проявлением «вычислительной сверхтекучести».

На рисунках 4.15а–4.15в приведены профили поля энтропии. В начальный момент возмущение энтропии находится на уровне арифметической погрешности. В процессе вращения за время первого оборота энтропия слегка возрастает, возникает довольно затейливая пространственная структура с амплитудой порядка 10^{-6} . В дальнейшем энтропия не изменяется.

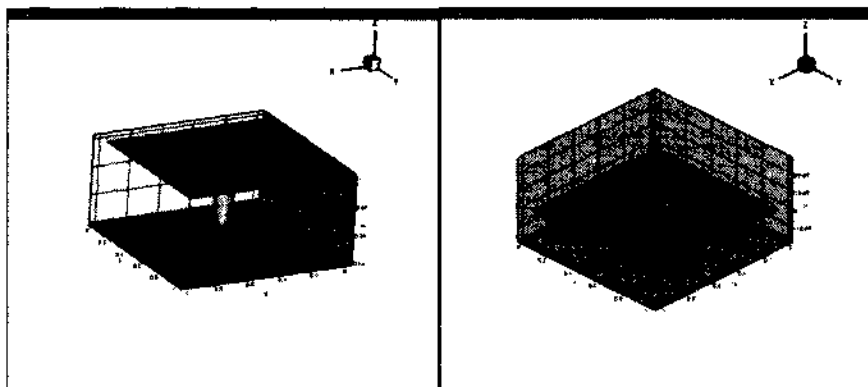


Рис. 4.14. Начальный профиль давления в изолированном неподвижном вихре на сетке (50×50) расчетных ячеек

Рис. 4.15а. Начальное распределение энтропии в области, возмущенной вихревым движением. Возмущения энтропии на уровне 10^{-10}

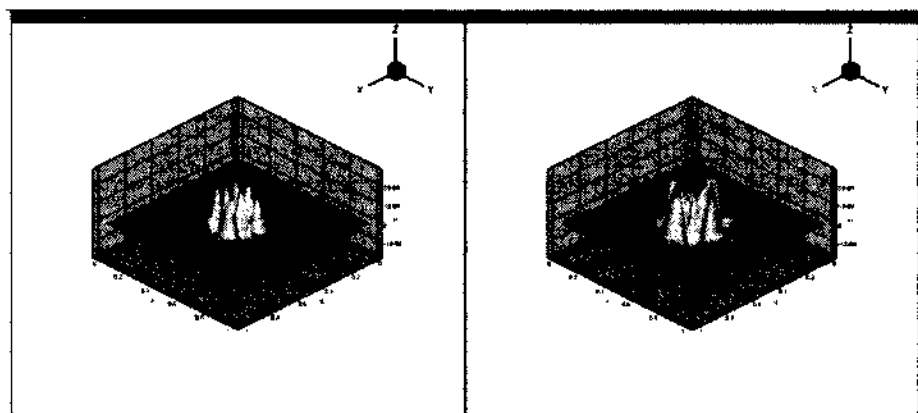


Рис. 4.15б. Возмущение энтропии после половины времени оборота вихря

Рис. 4.15в. После двух оборотов вихря возмущение энтропии выходит на стационар, отвечающий уровню 10^{-6}

На рисунках 4.16а – 4.16в приведены графики ротора скорости на расчетных сетках различной густоты. Явление вычислительной сверхтекучести начинает проявляться на данной задаче уже на сетке (30×30) расчетных ячеек. На более грубых сетках вихрь со временем разваливается.

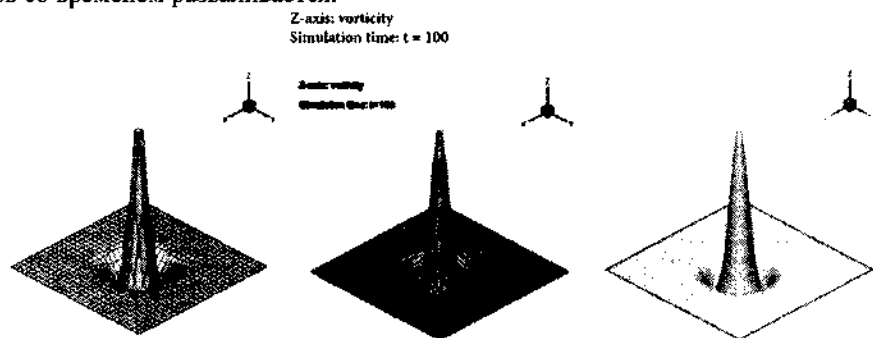


Рис. 4.16а. Ротор скорости, сетка (30×30)

Рис. 4.16б. Ротор скорости, сетка (60×60)

Рис. 4.16в. Ротор скорости, сетка (120×120)

Кинетическая энергия вихря сохраняется в пределах 1%.

На рисунках 4.17а, 4.17б приведены графики ротора скорости при решении данной задачи на достаточно подробной сетке (240×240) по схеме высокой разрешающей способности Roe-MUSCL-TVD на моменты времени, соответствующие четырем и ста оборотам при задействованном TVD-лимитере. Видно, что аппроксимационная вязкость успевает почти полностью погасить вихревое движение. На рисунке 4.17в приведены результаты расчета той же задачи по той же схеме и на той же сетке после четырех оборотов при отключенном TVD-лимитере. Хорошо видно, что вихрь полностью развалился под действием аппроксимационной дисперсии, т. е. с лимитером схема Roe-MUSCL-TVD слишком диссипативна, без лимитера – слишком дисперсионна.

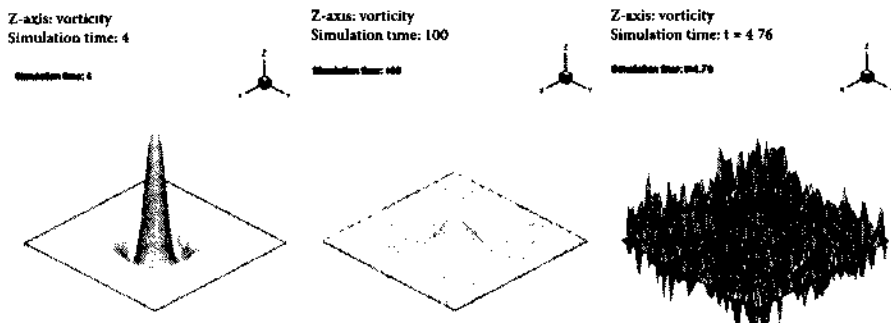


Рис. 4.17а. Ротор скорости, сетка (240×240) , TV-лимитер, $t = 4$

Рис. 4.17б. Ротор скорости, сетка (240×240) , TV-лимитер, $t = 100$

Рис. 4.17в. Ротор скорости, сетка (240×240) , без лимитера, $t = 4$

Если центр вихря не является неподвижным, а перемещается относительно расчетной сетки с какой-то скоростью, то явление «вычислительной сверхтекучести» исчезает. Начинает проявляться очень слабая аппроксимационная вязкость, величина которой сложным образом зависит от скорости. Для демонстрации малости этого эффекта на рисунке 4.18 приведены результаты расчета вихря (4.124) при его перемещении

по диагонали при скорости фонового течения $u_0 = v_0 = 0,5$. За время движения его амплитуда уменьшается на 1%.

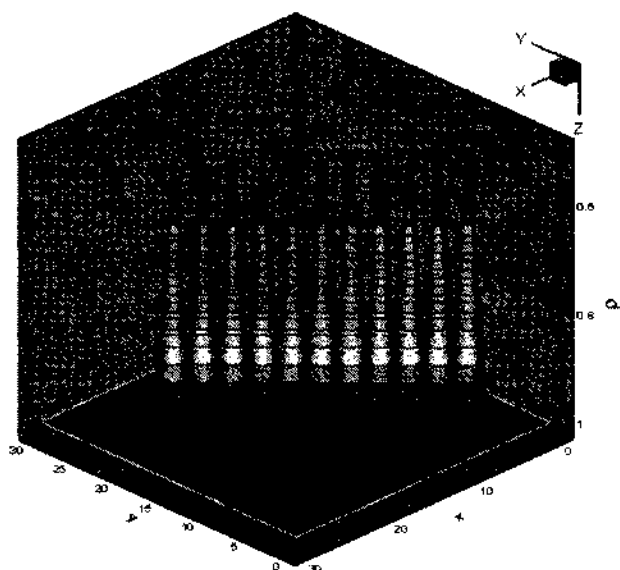


Рис. 4.18. Перенос вихря по диагонали. Амплитуда уменьшается на 1%

Взаимодействие налетающего вихря с неподвижной ударной волной

Рассмотрим задачу о взаимодействии с неподвижной ударной волной вихрей разной интенсивности, переносимых набегающим потоком. Задача решается в прямоугольной области $[0, 2] \times [0, 1]$. На левой границе задано условие сверхзвукового втекания, на правой границе – дозвукового вытекания. Верхняя и нижняя горизонтальные границы представляют собой непроницаемые гладкие стенки. Число Маха набегающего потока $M = 1,1$. Параметры газа за ударной волной $(\rho, u, v, p) = (1; 1, 1\sqrt{\gamma}; 0; 1)$. Фронт неподвижной ударной волны расположен на расстоянии 0,5 от левой границы области.

Слабый вихрь

Вначале рассматривается вихрь с параметрами $\varepsilon = 0,3; r_c = 0,05; \alpha = 0,24$ с центром $(x_0, y_0) = (0, 25; 0)$ в начальный момент времени. На рисунках 4.19а – 4.19в приведены различные стадии прохождения слабого вихря через фронт неподвижной ударной волны.

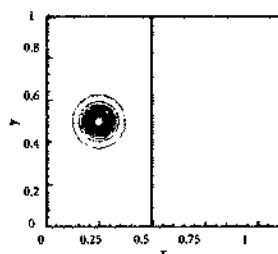


Рис. 4.19а. Вертикальная прямая линия – фронт покоящейся ударной волны. Поток набегаёт слева. На горизонтальных стенках – условие непротекания

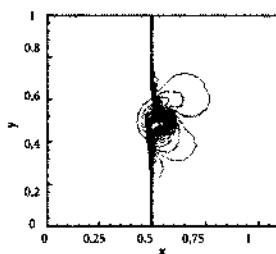


Рис. 4.19б. Стадия сильного взаимодействия

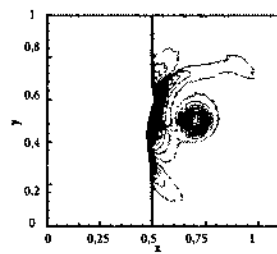


Рис. 4.19в. Слабый вихрь проходит сквозь ударную волну, незначительно искажая ее

Интенсивный вихрь

Та же задача была решена для вихря большей интенсивности с параметрами ($\varepsilon=1.5$; $r_c=0.05$; $\alpha=0.5$). Дополнительная особенность этой постановки состоит в том, что давление в центре вихря близко к нулю и при возникновении численных осцилляций может становиться отрицательным, что неизбежно приведет к невозможности продолжения расчета. На рисунках 4.20а – 4.20в приведены стадии разрушения стационарной ударной волны вихрем большой интенсивности.

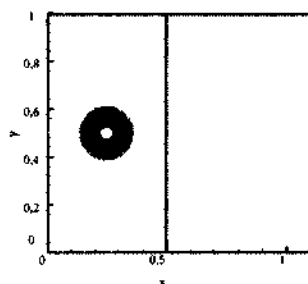


Рис. 4.20а. Интенсивный вихрь и ударная волна перед взаимодействием

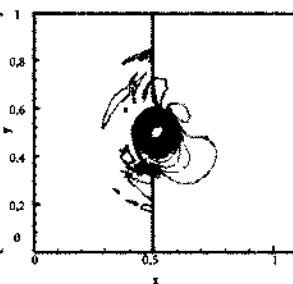


Рис. 4.20б. Процесс временного разрушения фронта ударной волны набегающим вихрем

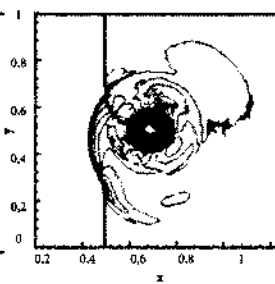


Рис. 4.20в. Возникновение сложной конфигурации ударных волн при прохождении через неподвижную ударную волну вихря сильной интенсивности

4.14. Рассеяние плоской звуковой волны на гладком вихре постоянной циркуляции

В центре открытой области задан изэнтропический вихрь, поле которого обладает постоянной циркуляцией скорости:

$$\begin{aligned}v_r &= 0; \quad \Gamma_\infty > 0; \\v_\theta &= \frac{\Gamma_\infty}{2\pi r} (1 - \exp(-\alpha(r/L)^2)); \\ \alpha &= 1,256431, \quad Ma = (v_\theta)_{\max} / a_\infty.\end{aligned}\tag{4.125}$$

где a_∞ – скорость звука дальнего поля. Плотность и давление, индуцированные вихрем, определяются из (4.125) и закона сохранения импульса и изэнтропического соотношения между давлением и плотностью вихря.

При аналитическом интегрировании (4.125) возникает нетабличный интеграл [7], и для задания начальных условий используется следующая численная процедура. Уравнения (4.125) интегрируются численно вдоль радиуса вихря с помощью введения достаточно частой однородной сетки (10 000 элементов). Полученное радиальное распределение затем интерполируется в каждую ячейку двумерной сетки.

На левой границе расчетной области задаются граничные условия, соответствующие входящей нормальной акустической волне, амплитуда пульсаций скорости которой много меньше максимальной скорости в ядре вихря, $u' = 10^{-5} (v_\theta)_{\max}$. Решается задача о рассеянии этой волны на вихре. Плоская волна задается на левой границе области на расстоянии $R = 10L$ от центра вихря, где L – радиус вихря.

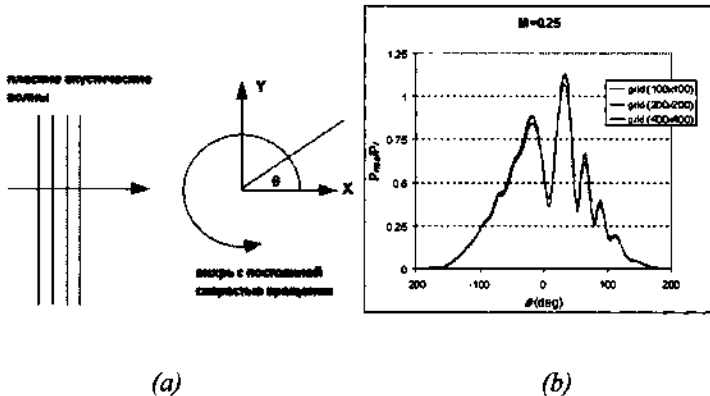
4.14.1. Случай средних акустических волн, $1 = 2,5L$

Рассматривается рассеяние на вихре, который соответствует «акустическому» числу Маха в ядре $Ma = 0,25$. Эталонное решение этой задачи было получено при решении уравнений Навье – Стокса без учета теплопроводности с числом Рейнольдса $Re = 10^5$. Это решение было получено с использованием компактных конечных разностей 6-го порядка аппроксимации на сетке 7–8 расчетных узлов на радиус вихря и интегрирования по 6-шаговой схеме Рунге – Кутты. В этой работе полученное решение представлено в виде диаграммы направленности среднеквадратичных пульсаций акустической компоненты рассеянной волны, $r.m.s.(p')$, определенной по формуле

$$p' = p - p^{(a)} - (p^{(v)} - p_\infty),\tag{4.126}$$

где p – давление при решении задачи с акустической волной, порожденной вихрем, $p^{(a)}$ – решение задачи с вихрем нулевой амплитуды, $p^{(v)}$ – решение задачи с акустической волной нулевой амплитуды, p_∞ – давление дальнего поля вихря. Отметим, что последние два члена в (4.126) введены из-за наличия конечной ошибки при аппроксимации круглого вихря на прямоугольной сетке.

На рис. 4.21b,c представлена диаграмма направленности, $r.m.s.(p') = f(R, \theta)$ на расстоянии $R = 10L$ от центра вихря, где начало отсчета полярного угла соответствует положительному направлению оси x . Решение по схеме «КАБАРЕ» получено на ряде квадратных сеток (100×100) , (200×200) и (400×400) (2,5, 5 и 10 ячеек на радиус вихря) в области размером $40L$. В расчете «КАБАРЕ» использовался модифицированный вариант коррекции при $\alpha = 0,001$ и «изэнтропические» локальные инварианты. При построении диаграммы направленности в графическом редакторе Tесplot решение переинтерполировалось с декартовой на цилиндрическую сетку с центром в ядре вихря. Как видно из графика, решения «КАБАРЕ» на сетках 5 и 10 ячеек на радиус вихря практически неразличимы и хорошо согласуются с эталонным решением. Для сравнения, на рис. 4.21d приведено аналогичное сравнение с другим эталонным решением, полученным по схеме Роу – МАСЛ – ТВД третьего порядка по пространству и схеме Рунге – Кутты третьего порядка по времени на сетке разрешения 10 точек на радиус вихря. Лимитерная функция потоков в расчете по схеме Роу – МАСЛ – ТВД не использовалась, т. к. ее включение приводит к существенному сглаживанию формы вихря. Сравнение с эталонным решением показало, что в решении Роу – МАСЛ – ТВД имеется значительная переоценка пиков амплитуды рассеяния. Эта переоценка возникает в силу накопления дисперсионных ошибок, которые для области с открытыми границами не приводят к полной разболтке вихря в отличие от задачи о вихре в коробке.



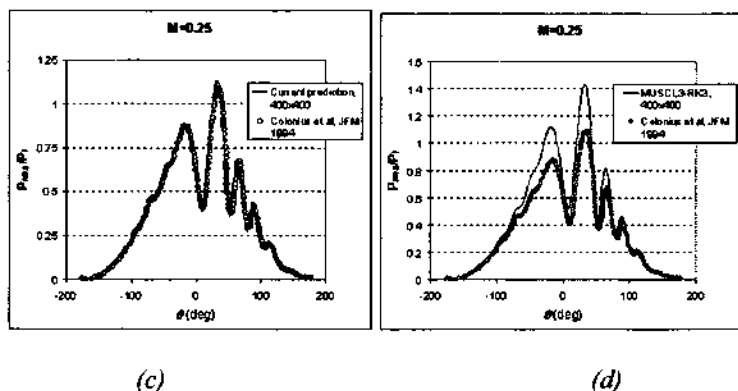


Рис. 4.21. Задача о рассеянии плоской акустической волны на вихре:

(а) – схематическое изображение области решения, (б) – сеточная сходимость решения в норме среднеквадратичных акустических пульсаций при использовании схемы «КАБАРЕ» и сравнение с эталонным решением диаграммы направленности среднеквадратичных пульсаций рассеянной компоненты поля, полученной (с) по схеме «КАБАРЕ» и (д) при использовании схем Роу – МАСЛ – ТВД и Рунге – Кутты третьего порядка

4.14.2. Случай коротких акустических волн, $1 = 0,036L$

Как известно [8,9], в приближении высоких частот уравнения Эйлера могут быть сведены к уравнению эйконала, описывающему изменение траекторий «звуковых лучей» при их прохождении через неоднородное среднее поле. Фокусировка лучей неоднородным средним полем приводит к появлению звуковых узлов в решении, т. н. каустик. Геометрическое место положения каустик напрямую следует из решения уравнения эйконала. С другой стороны, каустики соответствуют наиболее интенсивным среднеквадратичным акустическим пульсациям поля, которые могут быть также получены из решения уравнений Эйлера.

При решении уравнений Эйлера по схеме «КАБАРЕ» использовались прямоугольные декартовы расчетные сетки (1000×1000) и (2000×2000) ячеек (7 и 14 точек на длину падающей волны), а также меньший, чем в случае средних волн, размер расчетной области. В расчете по схеме «КАБАРЕ» использовался модифицированный вариант коррекции (рис. 3.4d) при $\alpha = 0,001$ и «изэнтропические» локальные инварианты.

На рис. 4.22а представлено пространственное распределение среднеквадратичных акустических пульсаций, полученное из решения уравнений Эйлера по схеме «КАБАРЕ». На решение «КАБАРЕ» наложено положение каустик, соответствующее решению эйконала, полученное в работе [7]. Центр вихря соответствует точке начала отсчета координат. Видно, что в соответствии с теорией, каустики хорошо окаймляют зону интерференции волн за вихрем в численном решении. На рис. 4.22б показана диаграмма направленности среднеквадратичных акустических пульсаций $r.m.s.(p) = f(R, \theta)$, соответствующая расстоянию $R = L$ от центра вихря и полученная на сетках разного разрешения: 7 и 14 ячеек на длину падающей волны. Диапазон изменения полярного угла соответствует верхней половине вихря, которую пересекает каустика в решении эйконала.

Видно, что за исключением высокочастотной «пилы» в районе каустики и небольшого фазового сдвига, решение «КАБАРЕ» на грубой сетке (7 точек на волну) содержит в себе основные черты решения на более подробной сетке (14 точек на волну). Двумерные поля распределения среднеквадратичных пульсаций на этих двух сетках приведены на рис. 4.23. Как видно из сравнения, пространственные распределения, полученные на разных сетках, практически совпадают, что подтверждает достаточную сеточную сходимость решения.

В силу имеющихся дисперсионных и диссипативных ошибок стандартные схемы 2–3 порядка аппроксимации требуют сеточного разрешения порядка 30–50 точек на длину акустической волны. Это требование делает использование стандартных схем данного класса задач чрезвычайно трудоемким.

Полученное численным путем решение уравнений Эйлера было использовано для получения траекторий «звуковых лучей» и сравнено с результатами методов на основе приближения геометрической оптики. Траектории «звуковых лучей» в численном решении определяются как нормали к фронтам пульсаций давления. Из этих траекторий можно определить угол наибольшего отклонения акустической волны от первоначального направления (максимальный угол рассеяния) вследствие рефракции в поле вихря (рис. 4.24а) и сравнить с имеющимися результатами решения уравнения эйконала. Точность оценки максимального угла рассеяния, полученного таким методом, определяется точностью обработки графической информации в редакторе Tecplot и составляет не более плюс/минус одного градуса.

На рис. 4.24b построены зависимости максимального угла рассеяния акустической волны от числа Маха вихря, полученные в ряде работ, включая недавнее решение уравнения эйконала на эйлеровых сетках [9] (current prediction). Приведены значения, соответствующие прямому решению уравнений Эйлера по схеме «КАБАРЕ» (Euler).

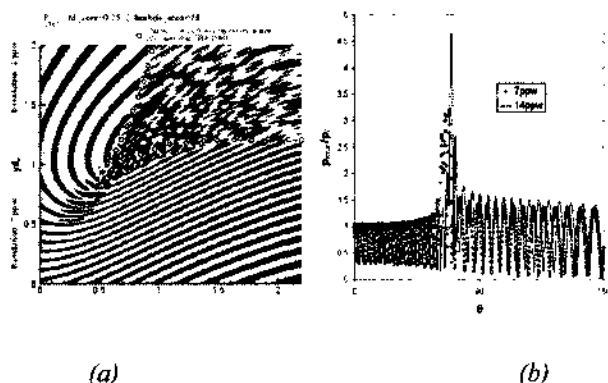


Рис. 4.22. Решение задачи рассеяния на вихре для случая высоких частот

(а) распределение среднеквадратичных акустических пульсаций, полученное решением по схеме «КАБАРЕ», где открытые символы, наложенные на решение, показывают геометрическое место расположения каустик в решении эйконала;

(б) сравнение распределений среднеквадратичных акустических пульсаций в нижней области вихря для решений по схеме «КАБАРЕ» на сетках с разрешением 7 ячеек (7 ppw) и 14 ячеек (14 ppw) на длину падающей волны

Видно, что все значения максимальных углов рассеяния находятся в хорошем соответствии друг с другом. Некоторая недооценка величины максимального угла, полу-

ченного из решения уравнений Эйлера (также имеющаяся в решении [9]), по сравнению с [8], возможно, связана с различиями в расстоянии от левой границы расчетной области, где задается входящая волна, до вихря.

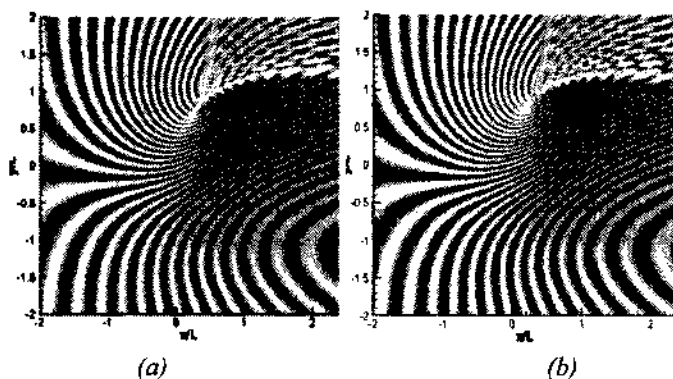


Рис. 4.23. Сравнение распределений среднеквадратичных пульсаций давления рассеянного поля на сетках с разрешением в центре (а) 7 ячеек на длину волны, (б) 14 ячеек на длину волны. Цветовая шкала в обоих случаях соответствует одним и тем же 20 линейно распределенным контурам

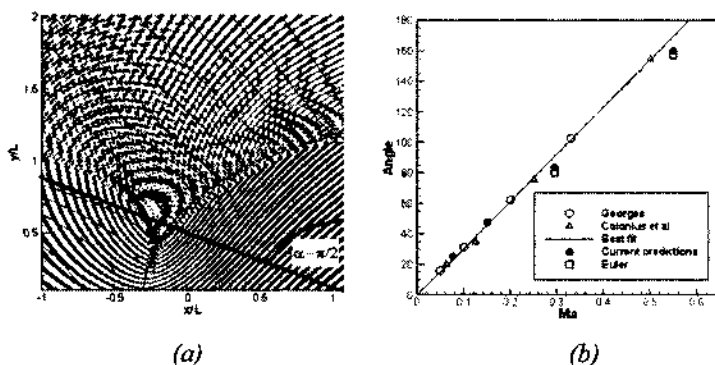


Рис. 4.24. Решение задачи рассеяния на вихре для случая высоких частот: (а) использование пространственного распределения среднеквадратичных акустических пульсаций, полученного по схеме «КАБАРЕ» для нахождения максимального угла рассеяния падающей волны, для случая числа Маха вихря $Ma = 0,55$; (б) сравнение максимальных углов рассеяния, полученных при решении уравнений Эйлера (Euler), с результатами, полученными при решении уравнения эйконала при нескольких числах Маха вихря (Ma)

4.15. Учет вязкости

Схема «КАБАРЕ» может быть обобщена на полную систему уравнений Навье – Стокса, однако мы будем продвигаться к этому обобщению поэтапно, чтобы можно было проследить за всеми особенностями этого процесса.

Простейшее обобщение уравнений Эйлера, учитывающее эффекты вязкости, может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \Lambda_u \cdot u, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \Lambda_v \cdot v, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho Eu + pu)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho Ev + pv)}{\partial y} &= \Lambda_E(u, v), \\ E &= \varepsilon + (u^2 + v^2)/2, \quad p = P(\rho, \varepsilon),\end{aligned}\tag{4.127}$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda_u \cdot u &= \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\mu - \xi) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \Lambda_v \cdot v &= \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\mu - \xi) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \Lambda_E(u, v) &= \mu \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \\ &+ (\mu - \xi) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right].\end{aligned}\tag{4.128}$$

В (4.128) использованы следующие обозначения: μ – коэффициент динамической вязкости, ξ – коэффициент объемной вязкости. При формулировке этого приближения учитывалось, что эти коэффициенты постоянны.

Для системы уравнений (4.127) с операторами (4.128) необходимо доопределить рассмотренные ранее граничные условия, дополнить их «условиями прилипания» на «вязких стенках» $\partial D_1: (u, v)_{\text{св}} = 0$ и «условиями проскальзывания» на «гладких стенках» или плоскостях симметрии $\partial D_2: \left(\frac{\partial \vec{v} \cdot \vec{\xi}}{\partial \vec{n}} \right)_{\text{св}} = 0$, где $\vec{\xi}, \vec{n}$ – единичный касательный и единичный нормальный векторы к границе ∂D_2 .

Дифференциальные операторы второго порядка (4.128) можно свести к операторам первого порядка, если ввести дополнительные «потокосные» переменные

$$q_x'' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q_x' = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad q_y'' = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad q_y' = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.129)$$

С учетом этих переменных операторы приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \Lambda_u \cdot u &= \mu \cdot \left(\frac{\partial q_x''}{\partial x} + \frac{\partial q_y''}{\partial y} \right) + (\mu - \xi) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (q_x'' + q_y''); \\ \Lambda_v \cdot v &= \mu \cdot \left(\frac{\partial q_x'}{\partial x} + \frac{\partial q_y'}{\partial y} \right) + (\mu - \xi) \cdot \frac{\partial}{\partial y} (q_x'' + q_y''); \\ \Lambda_E(u, v) &= \mu \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \cdot q_x'' + v \cdot q_x') + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot q_y'' + v \cdot q_y') \right] + \\ &+ (\mu - \xi) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} u (q_x'' + q_y') + \frac{\partial}{\partial y} v (q_x'' + q_y') \right]. \end{aligned} \quad (4.130)$$

При аппроксимации сил вязкости на ортогональной сетке дополнительные потоковые переменные $(q_x'', q_x', q_y'', q_y')$ будем относить к серединам граней ячеек. Аппроксимируем эти потоки для внутренних граней области как:

$$\begin{aligned} (q_x'')_{i,*}^n &= \frac{U_{i+1/2,*}^n - U_{i-1/2,*}^n}{\Delta x_i}; & (q_x')_{i,*}^n &= \frac{V_{i+1/2,*}^n - V_{i-1/2,*}^n}{\Delta x_i}; \\ (q_y'')_{*,j}^n &= \frac{U_{*,j+1/2}^n - U_{*,j-1/2}^n}{\Delta y_j}; & (q_y')_{*,j}^n &= \frac{V_{*,j+1/2}^n - V_{*,j-1/2}^n}{\Delta y_j}; \\ \Delta x_i &= 0,5(\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}); & \Delta y_j &= 0,5(\Delta y_{j+1/2} + \Delta y_{j-1/2}); \\ i &= 2, \dots, N_x - 1; & j &= 2, \dots, N_y - 1. \end{aligned} \quad (4.131)$$

На границах области «вязкостные» потоковые переменные $(q_x'', q_x', q_y'', q_y')$ должны задаваться или определяться с учетом граничных условий. Если, например, на всех границах области задано условие симметрии, то

$$\begin{aligned} (q_x'')_{1,*}^n &= 0; & (q_x')_{1,*}^n &= 0; & (q_x'')_{N_x,*}^n &= 0; & (q_x')_{N_x,*}^n &= 0; \\ (q_y'')_{*,1}^n &= 0; & (q_y')_{*,1}^n &= 0; & (q_y'')_{*,N_y}^n &= 0; & (q_y')_{*,N_y}^n &= 0. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Если на правой границе области задано условие прилипания, то для более точной аппроксимации потока силы вязкости на стенку можно использовать следующий прием.

Построим в граничной ячейке подсеточное квадратичное восполнение касательной компоненты скорости, используя информацию о консервативной составляющей скорости в центре ячейки и потоковой составляющей касательной скорости на противоположной к данной границе стороне ячейки:

$$v_{N_x-1/2,*}^n(x) = a \cdot x^2 + bx + d; \quad x \in [0,1].$$

Неизвестные коэффициенты (a, b, d) определим из системы уравнений:

$$v_{N_x-1/2,*}^n(0) = v_{N_x-1,*}^n \Rightarrow v_{N_x-1,*}^n = g;$$

$$v_{N_x-1/2,*}^n(1) = 0; \Rightarrow a + b + g = 0;$$

$$\int_0^1 v_{N_x-1/2,*}^n(x) dx = U_{N_x-1/2,*}^n; \Rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + g = U_{N_x-1/2,*}^n,$$

откуда находим

$$\frac{\partial v_{N_x-1/2,*}^n(x)}{\partial x} = 2a + b = (q_x^v)_{N_x,*}^n = 2v_{N_x-1,*}^n - 6U_{N_x-1/2,*}^n. \quad (4.133)$$

Для простоты изложения будем в дальнейшем полагать, что $\mu - \xi = 0$ и члены с объемной вязкостью в (4.130) отсутствуют. С учетом этого упрощающего предположения и новых переменных пространственную аппроксимацию операторов (4.130) определим на максимально компактном вычислительном шаблоне:

$$\begin{aligned} \Lambda_u^h \cdot U &= \mu \cdot \left(\frac{(q_x^v)_{i+1,*} - (q_x^v)_{i,*}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(q_y^v)_{*,j+1} - (q_y^v)_{*,j}}{\Delta y_{i+1/2}} \right); \\ \Lambda_v^h \cdot V &= \mu \cdot \left(\frac{(q_x^v)_{i+1,*} - (q_x^v)_{i,*}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(q_y^v)_{*,j+1} - (q_y^v)_{*,j}}{\Delta y_{i+1/2}} \right); \\ \Lambda_\xi^h(U, V, u, v) &= \mu \cdot \left[\frac{(u \cdot q_x^v)_{i+1,*} - (u \cdot q_x^v)_{i,*}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(v \cdot q_x^v)_{i+1,*} - (v \cdot q_x^v)_{i,*}}{\Delta x_{i+1/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(u \cdot q_y^v)_{*,j+1} - (u \cdot q_y^v)_{*,j}}{\Delta y_{i+1/2}} + \frac{(v \cdot q_y^v)_{*,j+1} - (v \cdot q_y^v)_{*,j}}{\Delta y_{i+1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Следует отметить, что аппроксимация операторов (4.134) является дивергентной (консервативной). Это значит, что если каждый из этих операторов просуммировать по какой-либо подобласти, то останутся только дискретные аналоги контурных интегралов по границам этой подобласти. Таким образом, учет вязкости не будет приводить к нарушению сеточных законов сохранения импульса и полной энергии.

Учет вязких членов в общем алгоритме схемы «КАБАРЕ», изложенном ранее, осуществляется следующим образом. После того, как вычислены промежуточные значения консервативных переменных по формулам, вычисленные значения компонент скорости и полной энергии модифицируются:

$$\begin{aligned}
\Theta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{\tilde{U}_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} &= \Lambda_u^h \cdot [\sigma \cdot \tilde{U}^{n+1/2} + (1-\sigma) \cdot U^n] = \Lambda_u^h \cdot U^\sigma; \\
\Theta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{\tilde{V}_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - V_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} &= \Lambda_v^h \cdot [\sigma \cdot \tilde{V}^{n+1/2} + (1-\sigma) \cdot V^n] = \Lambda_v^h \cdot V^\sigma; \\
\Theta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{\tilde{E}_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - E_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} &= \Lambda_E^h (U^\sigma, V^\sigma, u^n, v^n),
\end{aligned} \tag{4.135}$$

где $\sigma \in [0, 1]$ – весовой параметр. При $\sigma = 0$ уравнения представляют собой явные разностные схемы параболического типа, легко разрешимые относительно искомых переменных. При $\sigma = 1$ первые два уравнения превращаются в неявные разностные схемы, для решения которых необходимо использовать эффективные методы решения систем алгебраических уравнений большой размерности.

Дополнение основного алгоритма процедурой не следует рассматривать как «расщепление по физическим процессам», поскольку под этим термином обычно понимается несколько иная технология, приводящая к суммарной аппроксимации. Здесь же описанное разбиение алгоритма на две части преследует только цель упрощения записи громоздких выражений. Если сложить (4.33) с (4.135), произвести последующее переписывание (переобозначение) переменных:

$$\tilde{U}_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} \Rightarrow U_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}; \quad \tilde{V}_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} \Rightarrow V_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}; \quad \tilde{E}_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} \Rightarrow E_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2},$$

то мы приходим к обычной явной аппроксимации дополнительных членов при вычислении промежуточных переменных.

После «довычисления» промежуточных консервативных переменных реализуется часть алгоритма схемы «КАБАРЕ», связанная с нахождением конвективных переменных на новом временном слое в точности в том виде, что был описан ранее. Изменения снова проявляются только при вычислении значений консервативных переменных на новом временном слое. В данном случае вместо формул (4.119) удобнее использовать формулы (4.32), дополненные процедурой «довычисления»:

$$\begin{aligned}
\Theta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} \cdot \frac{\tilde{U}_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2, j+1/2}^{n+1}}{\tau_{n+1/2}} &= \Lambda_u^h \cdot U^{n+1/2}; \\
\Theta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} \cdot \frac{\tilde{V}_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2, j+1/2}^{n+1}}{\tau_{n+1/2}} &= \Lambda_v^h \cdot V^{n+1/2}; \\
\Theta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} \cdot \frac{\tilde{E}_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - E_{i+1/2, j+1/2}^{n+1}}{\tau_{n+1/2}} &= \Lambda_E^h (U^{n+1/2}, V^{n+1/2}, u^{n+1/2}, v^{n+1/2}),
\end{aligned} \tag{4.136}$$

где $u^{n+1/2} = 0,5 \cdot (u^{n+1} + u^n)$; $v^{n+1/2} = 0,5 \cdot (v^{n+1} + v^n)$.

Следует обратить внимание на то, что система уравнений (4.136), в отличие от (4.135), не содержит весового параметра σ и всегда является явной.

При включении в вычислительный алгоритм членов, учитывающих вязкость описанным выше способом, необходимо модифицировать и процедуру вычисления допустимого шага интегрирования по времени (4.123). Если $\sigma = 0$, то система разностных уравнений (4.135) явная, и появляется дополнительное ограничение на величину шага по времени, характерное для явных аппроксимаций уравнений параболического типа.

$$\tau_{n+1/2} = CFL \cdot \min_{i,j} \left\{ \frac{\Delta x_{i+1/2}}{\left| (\lambda_k^x)_{j+1/2,n}^n \right|}, \frac{\Delta y_{j+1/2}}{\left| (\lambda_k^y)_{i,j+1/2}^n \right|}, \frac{2 \cdot \Delta x_{i+1/2}^2}{\mu}, \frac{2 \cdot \Delta y_{j+1/2}^2}{\mu} \right\}; \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.137)$$

При очень малой величине коэффициента вязкости, т. е. при больших числах Рейнольдса, эти добавочные ограничения никак не проявляются. При понижении чисел Рейнольдса, эти ограничения могут стать достаточно обременительными, особенно для задач, где нужно добиваться сходимости результатов на сгущающихся сетках. В этих случаях следует использовать неявный алгоритм при $\sigma = 1$, не налагающий дополнительных ограничений на устойчивость.

Отметим, что аппроксимация вязких потоков (4.131) на неравномерной расчетной сетке формально имеет первый порядок точности. В учебнике А. А. Самарского и А. В. Гулина [10] на примере двумерного уравнения теплопроводности показано, что на неравномерных ортогональных сетках при аккуратной аппроксимации граничных условий, несмотря на первый порядок аппроксимации потоков, достигается второй порядок точности сеточного решения.

Задача о затухании вихря при наличии вязкости

В единичном квадрате задается равномерная расчетная сетка с числом ячеек 50×50 .

На границах – условие непротекания (нормальная составляющая скорости равна нулю). Рассматривается идеальный газ с $\gamma = 1,4$. Невозмущенный фон характеризуется следующими параметрами:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad \rho_0 = 1, \quad e_0 = 1/(\gamma - 1), \quad P_0 = (\gamma - 1) \cdot \rho_0 \cdot e_0.$$

В центре области с координатами $x_0 = 0,5$, $y_0 = 0,5$ помещается центр изэнтропического вихря, радиальная скорость вращения которого задается формулой:

$$u_r = \alpha \cdot \eta \cdot \exp[\beta \cdot (1 - \eta^2)], \quad \eta = \frac{r}{r_0},$$

$$\alpha = 0,204, \quad \beta = 0,3, \quad r_0 = 0,05.$$

Значения плотности, давления и удельной внутренней энергии в области вихря также отличаются от фоновых и задаются выражениями:

$$\delta T = -\frac{(\gamma - 1) \cdot \alpha^2}{4 \cdot \gamma \cdot \beta} \cdot \exp[2 \cdot \beta \cdot (1 - \eta^2)],$$

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \delta T)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad P = \frac{P_0}{\rho_0} \cdot (1 + \delta T) \cdot \rho, \quad e = \frac{P}{\rho \cdot (\gamma - 1)}.$$

Задача решалась при различных коэффициентах вязкости, отвечающих числам Рейнольдса от бесконечности (при $\mu = 0$) до 5000. При вычислении числа Рейнольдса в качестве характерной длины выбирался размер расчетной области, в качестве скорости – максимальная скорость вращения вихря. В процессе расчета вычислялась полная, кинетическая и внутренняя энергия газа в области как функция времени. Расчеты проводились до момента времени $t_{fin} \geq 1000$, что соответствовало нескольким сотням оборотов вихря по характерному радиусу, на котором скорость вращения является максимальной.

На рис. 4.25а – 4.25в приведены графики изменения со временем суммарной по области полной, кинетической и удельной внутренней энергии при $Re = 10^6$. Расчет проводился при числе Куранта – Фридрихса – Леви $CFL = 0,45$.

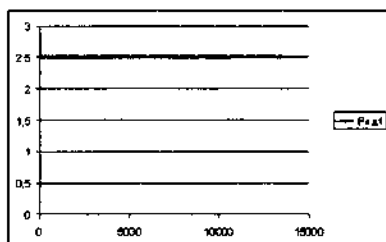


Рис. 4.25а.

Полная энергия, $Re = 10^6$. По горизонтальной оси отложено время

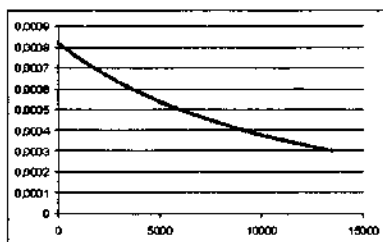


Рис. 4.25б.

Кинетическая энергия, $Re = 10^6$. По горизонтальной оси отложено время

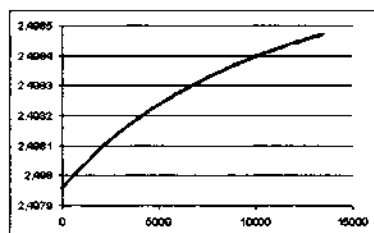


Рис. 4.25в. Удельная внутренняя энергия, $Re = 10^6$.
По горизонтальной оси отложено время

На рисунке 4.26 на один график выведены кривые диссипации кинетической энергии при различных числах Рейнольдса. Красная сплошная линия соответствует $Re = \infty$. Видно, что в течение нескольких тысяч оборотов кинетическая энергия практически не меняется, что соответствует отсутствию аппроксимационной вязкости – явлению «вычислительной сверхтекучести». Затем, в результате развития нелинейной неустойчивости, вихрь начинает деформироваться и распадается на несколько мелких вихрей, которые быстро затухают.

При числе Рейнольдса в один миллион нелинейная неустойчивость не развивается и кинетическая энергия вихря медленно диссипирует. Это можно расценивать как до-

полнительное доказательство существования явления «вычислительной сверхтекучести» для схемы «КАБАРЕ», поскольку для всех известных ранее алгоритмов аппроксимационная вязкость на сетке (50×50) приводит к эффективному числу Рейнольдса на несколько порядков меньшему, чем миллион, и явный учет вязких членов со столь малым коэффициентом вязкости никак не влияет на результаты расчетов.

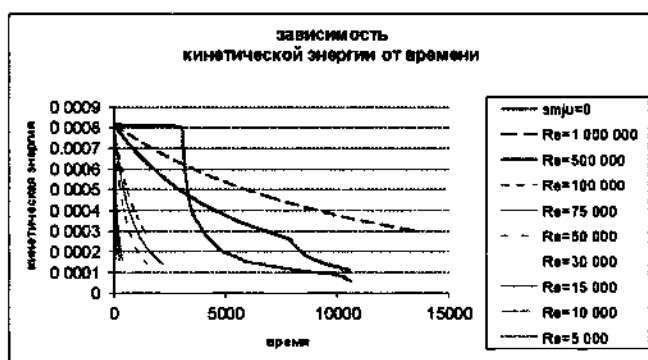


Рис. 4.26. Зависимость кинетической энергии вихря от времени при различных числах Рейнольдса.

Красная сплошная линия с резким изломом отвечает нулевой вязкости.

При нулевой вязкости за несколько тысяч оборотов развивается нелинейная неустойчивость, которая приводит к быстрому развалу вихря на ряд более мелких, которые затем быстро затухают

На рисунке 4.27 в более крупном масштабе приведены кривые диссипации кинетической энергии для чисел Рейнольдса, меньших $100\,000$. Эти графики можно использовать для оценки аппроксимационной вязкости у других схем посредством сравнения с их кривыми диссипации на описанной задаче.

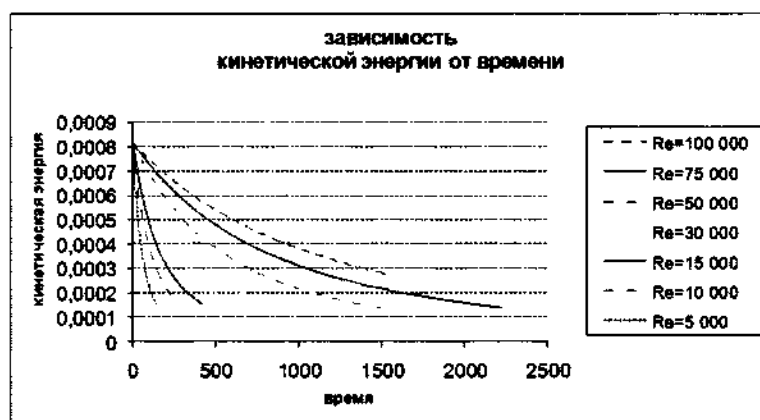


Рис. 4.27. Кривые диссипации кинетической энергии для чисел Рейнольдса,

меньших $100\,000$. Эти графики можно использовать для оценки аппроксимационной вязкости у других схем посредством сравнения с их кривыми диссипации на описанной задаче

4.16. Прямое моделирование взаимодействия вихревых пар

4.16.1. Постановка задачи

Задачи исследования процессов порождения звука вихревыми течениями являются базовыми в теории возникновения звуковых пульсаций в нестационарных и неоднородных гидродинамических потоках, включая турбулентные [11–13]. К их числу можно отнести и задачи генерации звуковых полей когерентными структурами, образуемыми двумерными системами динамически устойчивых концентрированных вихрей [14–16]. В частности, в работе [16] были рассмотрены две вихревые пары конечного размера, каждая из которых содержит плоские вихри положительной и отрицательной циркуляции, равной по модулю. В процессе взаимодействия вихри начинают перескакивать друг через друга в манере, напоминающей детскую игру «чехарда» и со временем сливаются в один вихрь. При высоких числах Рейнольдса движение вихрей сопровождается генерацией тонких вихревых нитей («филаментов завихренности»), нестационарное взаимодействие которых порождает звуковые пульсации. После слияния, в случае слабвязкого газа, система продолжает поступательное движение как одно целое. При этом «филаменты завихренности» оказываются намотанными на ядро общего вихря, и, за исключением самых мелких структур вблизи ядра вихря, решение выходит на стационарный режим, а генерация звука системой вихрей в значительной мере прекращается. Задача о проскальзывающих вихрях представляет интерес не только с точки зрения изучения фундаментальных механизмов генерации звука, но и с точки зрения тестирования расчетных методик, поскольку разрешение как самих мелких «филаментов завихренности», так и порожденных ими акустических пульсаций требует повышенной точности расчета. Возможности прямого численного моделирования «вихревой чехарды» на эйлеровой сетке в настоящее время лимитируются доступными вычислительными ресурсами и ограничиваются, в основном, числами Рейнольдса, не превышающими 1000–4000 [17]. Рекордно большое число Рейнольдса $Re = 10000$ было достигнуто в работе [16] только при использовании неконсервативного эйлерово-лагранжевого подхода. В этом методе для описания переноса завихренности использовались «лагранжевы» частицы, которые наряду с завихренностью также переносят дивергенцию скорости. В настоящей работе данная задача решена с использованием схемы «КАБАРЕ».

На рисунке 4.28 приведена система из четырех вихрей в области с открытой границей. Циркуляция скорости каждого вихря на бесконечности равна $\pm\Gamma$, $\Gamma > 0$. Распределение завихренности задано по гауссову закону:

$$\xi = \frac{1,25\Gamma}{\pi r_0^2} e^{-1,25\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}, \quad (4.138)$$

где циркуляция $\Gamma = 0,24\pi\delta a_\infty$ отвечает числу Маха по радиусу вихря $M_0 = 0,3$, r_0 – радиус вихря и $\delta_1 = \delta_y = \delta = \frac{10}{3}r_0$ – половина расстояния между центрами соседних вихрей.

Скорость движения центра масс и характерное время между двумя соседними проскальзываниями вихревых пар при этом примерно соответствуют параметрам, полученным для аналитического решения задачи в приближении точечных вихрей в невязком потоке [18].

В силу симметрии задачи относительно центральной оси достаточно ограничиться рассмотрением задачи в одной половине области. Также для уменьшения размеров расчетной области исходная задача решается в инерциальной системе координат, движущейся с постоянной скоростью $-\bar{U}$. При $\Gamma = 0,24 \pi \delta a_x$ эта фоновая скорость соответствует числу Маха потока на бесконечности $M_\infty = 0,1083$. В такой движущейся системе координат положение центра масс системы вихрей слабо зависит от времени.

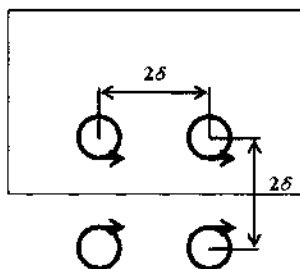


Рис. 4.28. Положение вихрей в расчетной области

Решение этой задачи наиболее полно описывается уравнениями Навье – Стокса. Введем число Рейнольдса по отношению к циркуляции скорости и коэффициенту ламинарной вязкости, $Re_\Gamma = \Gamma / \nu$.

Задание начальных условий в консервативных переменных по заданному распределению завихренности (4.138) происходит относительно стандартным образом. Основные этапы его заключаются в следующем. Используя распределение завихренности, с учетом свойства соленоидальности поля скорости, находится суммарное поле скорости из численного решения уравнения Лапласа для функции тока. Далее, подставляя найденные значения поля скорости в уравнения для компонент импульса и численно проинтегрировав получающееся уравнение относительно неизвестных термодинамических величин, с учетом изэнтропичности вихря, находятся искомые начальные распределения плотности и давления.

Разобьем область решения прямоугольной декартовой сеткой, большинство ячеек которой приходится на равномерную квадратную сетку в центре области, с плавным увеличением шага сетки по краям. На рисунке 4.29 показаны расчетная область, разбитая сеткой, и фрагмент равномерной сетки в окрестности центра области, где задаются вихри. Плотность сетки соответствует 12 расчетным ячейкам на радиус вихря. Наряду с этой сеткой, в расчетах также использовались сетки плотностью 9 и 6 ячеек на радиус вихря.

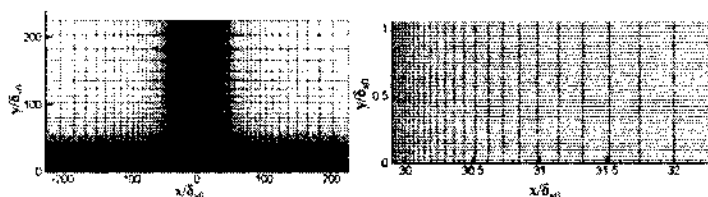


Рис. 4.29. Пример расчетной сетки, радиус вихря соответствует $r_0 = 0,06$, и половина расстояния между вихрями $\delta = 0,2$

На нижней границе области ставится условие проскальзывания в характеристических переменных, и на свободных границах области ставятся одномерные «безотражающие» характеристические граничные условия. На боковых границах области эти условия соответствуют входящему однородному потоку со скоростью $-\bar{U}$. Отметим, что в силу использования разнесенных переменных схемы «КАБАРЕ», реализованные одномерные «безотражающие» условия обеспечивают более слабое отражение волн, выходящих под углом к нормали к границе, по сравнению со стандартными одномерными характеристическими условиями типа Томпсона [19]. Также дополнительно использованное расширение сетки у границ расчетной области, с учетом отсутствия у схемы «КАБАРЕ» нефизичного отражения волн от грубых сеток [20], сводит паразитное отражение волн от открытых границ к минимуму. Для валидации граничных условий был проведен ряд тестов в области с удвоенным количеством ячеек по вертикали и горизонтали. Результаты тестов показали, что при переходе на область большего размера численное решение, включая дальнее поле, меняется незначительно.

4.16.2. Результаты численных расчетов

На рисунке 4.30 представлена эволюция завихренности системы вихрей по мере проскальзывания вихревых пар друг относительно друга при числе Рейнольдса 9400. Сетка соответствует плотности 6 ячеек на радиус вихря. Как показало сравнение решений, именно при этом числе Рейнольдса решение «КАБАРЕ» больше всего соответствует решению, полученному в [16] для числа Рейнольдса 10000. Небольшое отличие в числах Рейнольдса двух решений, возможно, связано с различием в аппроксимации вязких членов при использовании консервативной формы записи уравнений импульса и энергии в схеме «КАБАРЕ» и в методе лагранжевых частиц [16], не использующим консервативную форму записи.

При числе Рейнольдса 9400 в решении «КАБАРЕ» вихревые пары успевают совершить четыре проскальзывания друг относительно друга, рис. 4.30 (б), (г), (д), (е), интервалы между которыми становятся с каждым разом все короче. При меньших числах Рейнольдса слияние вихрей происходит быстрее. Например, при $Re = 5000$ вихри сливаются в один уже после трех оборотов. Для сравнения можно также указать, что при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности (коэффициент ламинарной вязкости равен нулю), на этой же сетке, решение «КАБАРЕ» будет соответствовать шести проскальзываниям вихрей друг относительно друга. Отметим, что свойство решения «КАБАРЕ» оставаться чувствительным к такому малому коэффициенту ламинарной вязкости даже на достаточно грубой сетке говорит о малой диссипативности этого численного метода.

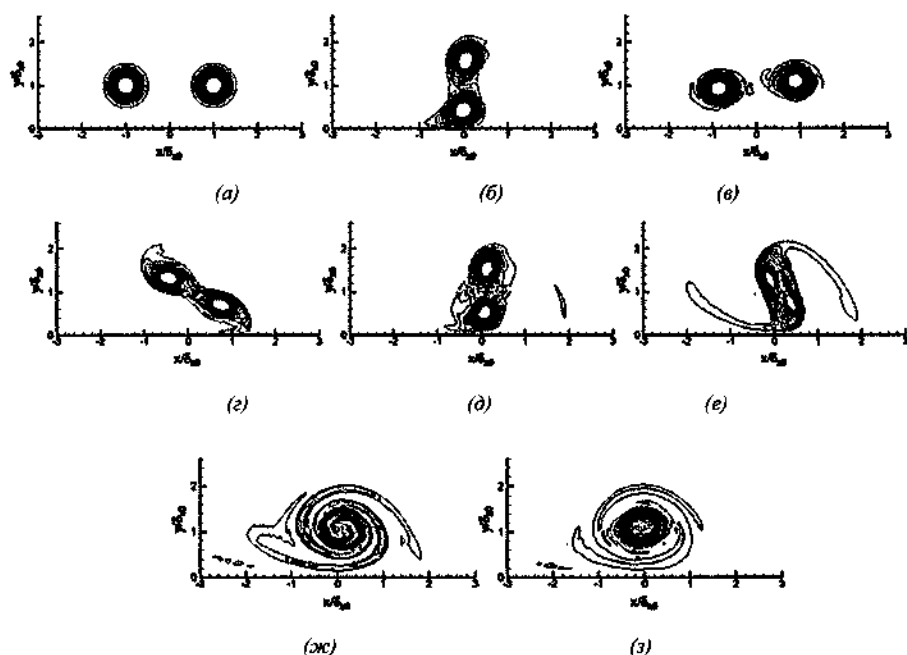


Рис. 4.30 Распределение завихренности системы вихрей в характерные моменты времени $a_\infty t / \delta = 0$ (а), 18 (б), 36 (в), 54 (г), 72 (д), 90 (е), 108 (ж), 120 (з)

Для более детального изучения свойств решения на рис. 4.31 показаны контуры дилатации (а)–(в) и завихренности (г)–(е), полученные из решения «КАБАРЕ» на сетке плотности 6 и 12 ячеек на радиус вихря, и отдельно решение [16], полученное из расчета по методу лагранжевых частиц, переносящих завихренность и дивергенцию. Дилатация определяется как дивергенция скорости, умноженная на плотность, и характеризует «сжимаемость» гидродинамического поля. Ее минимумы и максимумы можно связать с зонами зарождения наиболее сильных акустических пульсаций. Положительные контуры решения показаны сплошной линией, отрицательные – пунктиром. Момент времени отвечает тонкой вихревой структуре и соответствующим мелкомасштабным акустическим пульсациям, возникающим непосредственно перед слиянием вихревых пар, максимально сблизившихся друг с другом. Отметим, что в отличие от метода вихрей, решение «КАБАРЕ» соответствует разностному дифференцированию решения в первичных переменных (производные в ячейках выражались через потоковые переменные «КАБАРЕ») и выглядит менее гладким. Какое-либо косметическое сглаживание производных решения «КАБАРЕ» на сетке не проводилось. Тем не менее, несмотря на наличие мелкомасштабного «шума» в решении «КАБАРЕ», основные черты всех трех решений неплохо совпадают.

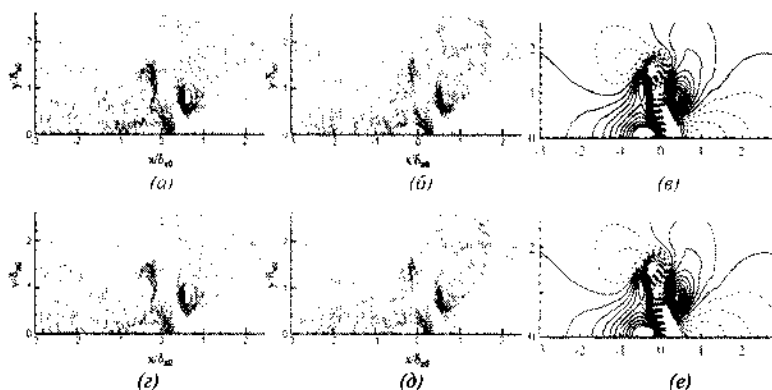


Рис. 4.31. Распределения дилатации и завихренности системы вихрей при $\alpha_\pi t / \delta = 90$, полученные из решения «КАБАРЕ» на сетке плотностью 6 (а), (г) и 12 (б), (д) ячеек на радиус вихря, а также соответствующие распределения, полученные методом лагранжевых частиц [16], (в) и (е)

Перейдя к количественному анализу полученного решения, сравним среднюю скорость центра масс системы вихрей и характерные времена между соседними проскальзываниями вихревых пар с аналитическим решением для двумерных точечных вихрей в невязком потоке. Решение для точечных вихрей является классическим и может быть получено на основе теории потенциала [18]. В частности, для периода и средней скорости потока получены следующие формулы [16]:

$$T_p = \frac{32\pi\delta_x^2}{\Gamma k^2(1+k)}(E(k) - (1-k^2)K(k)), \quad \bar{U} = \frac{\delta_y \cdot \Gamma}{4\pi\delta_x^2} \left[\frac{k^2 E(k)}{E(k) - (1-k^2)K(k)} \right], \quad (4.139)$$

где $k = 1/\left[1 + (\delta_y/\delta_x)^2\right]$, δ_y, δ_x – расстояние между центрами вихрей по вертикали и горизонтали, $K(k), E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. При $\delta_y = \delta_x = \delta$ и значениях потока на бесконечности $\rho_\infty = 1, \rho_\infty = 1$ и $\delta = 0, 2$, эти интегральные параметры системы с точностью до четвертого знака равны

$$T_p = \frac{54,46\delta^2}{\Gamma} = 12,21, \quad \bar{U} = \frac{0,1437 \cdot \Gamma}{\delta} = 0,1282. \quad (4.140)$$

Данные значения можно сравнить с величинами средней скорости и временами между первым и вторым (T_p)₁ и вторым и третьим (T_p)₂ проскальзываниями вихрей, приведенными в таблице 4.1. Значения в таблице были определены из решения «КАБАРЕ» на сетках плотности 6, 9 и 12 ячеек на радиус вихря. Разница между значениями средней скорости и временами между соседними проскальзываниями вихрей при измельчении шага сетки не превышает 1%. Расчетное значение средней скорости потока, полученное на самой грубой сетке, отличается от теоретического значения для системы точечных вихрей также не более чем на 1%.

Таблица 4.1. Сравнение значений средней скорости потока и времени между соседними проскальзываниями вихрей на сетках плотности 6, 9 и 12 ячеек на радиус вихря

Шаг сетки, h	$r_0/6$	$r_0/9$	$r_0/12$
$\bar{U}$	0,1271	0,1277	0,1279
$(T_p)_1$	10,85	10,9	10,9
$(T_p)_2$	7,9	8,1	8,2

Отличие в характерных временах между соседними проскальзываниями вихрей и теоретическим значением для точечных вихрей больше, оно составляет порядка 10–15%. Таким образом, для этого параметра отличие между численным решением «КАБАРЕ» для конечных вихрей и решением для точечных вихрей составляет порядка квадрата отношения радиуса вихря к расстоянию между вихрями $(r_0/\delta)^2 = 0,16$. Поправка в квадратичном члене относительно теории точечных вихрей может объясняться эффектом конечности радиуса вихря, когда при усреднении периода $T_p \sim \delta^2 = |x - y|^2$ по всем точкам пространственно распределенных вихрей $0 < r < r_0$ с центрами в X и Y линейные по возмущению члены сокращаются.

Наряду с динамикой вихрей в ближнем поле, также было проанализировано распределение пульсационной компоненты давления на контрольной поверхности. В качестве такой поверхности была выбрана окружность, покоящаяся относительно центра масс вихрей и расположенная на расстоянии 20δ от центра вихрей. На рисунке 4.32 представлены диаграммы направленности среднеквадратичной пульсации давления, отвечающие усреднению сигнала за промежутки времени до и после слияния вихрей. Жирными и тонкими линиями показаны распределения, отвечающие решениям на сетке плотностью 6 и 12 ячеек на радиус. Как видно из графика, решения, полученные на сетках разной плотности, практически неотличимы друг от друга. Из диаграммы видно, что среднеквадратичные пульсации давления до слияния вихрей заметно больше, чем после слияния, и сама направленность имеет четко выраженный максимум по направлению движения.

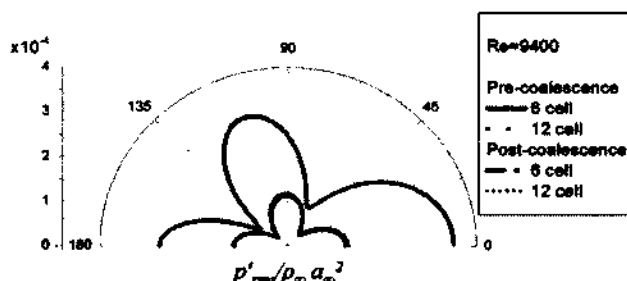


Рис. 4.32. Распределение среднеквадратичных пульсаций акустического поля по полярному углу, начало отсчета совпадает с направлением движения вихрей

Для более тонкого анализа решения представляет интерес сравнить акустические сигналы, поступившие в отдельные точки контрольной поверхности, расположенные под разными углами к движению системы вихрей, и сравнить решения при разных числах Рейнольдса. На рисунке 4.33 представлены результаты расчета акустических пульсаций в точках контрольной поверхности, отвечающих углам 0 и 90 градусов относительно направления движения центра масс вихрей. Показанные результаты отвечают числам Рейнольдса 5000 и 9400 и были получены на сетках плотностью 6 и 12 ячеек на радиус вихря.

Пики акустических пульсаций соответствуют моментам проскальзывания вихревых пар друг относительно друга, соответственно, их количество – полному количеству проскальзываний. Видно, как после нескольких периодов проскальзываний, сопровождающихся бурным выделением акустической энергии, следует «затишье», отвечающее этапу слияния. Амплитуда пульсаций, переносимых под малым углом (рис. 4.33 (а), (б)) в 1,5–2 раза превышает амплитуду пульсаций под 90 градусов к направлению движения потока (в, г). Увеличение ламинарной вязкости в 2 раза несколько снижает амплитуду пульсаций, однако наиболее существенное влияние вязкость оказывает на высокочастотные пульсации, возникающие в системе уже после слияния вихрей ($a_{\omega} t / \delta > 120$ на графиках). По сравнению со случаем $Re = 9400$ (а), (в), для $Re = 5000$ (б), (г), амплитуда этих высокочастотных пульсаций заметно меньше. Можно предположить, что эти высокочастотные пульсации вызваны нестационарностью мелких пространственных структур, возникающих в ядре общего вихря, и наиболее эффективно вязкость действует именно на эти мелкомасштабные структуры. Следует отметить также, что решение на сетках плотности 6 и 12 ячеек на радиус до слияний вихрей практически неразличимы. Небольшая разница между решениями на двух сетках имеется только в мелкомасштабных пульсациях, возникающих после слияния вихрей при более высоком числе $Re = 9400$. На более грубой сетке амплитуды этих пульсаций на 10–15% занижены относительно решения на мелкой сетке. При $Re = 5000$ решения на сетках разной плотности можно считать неразличимыми во всем диапазоне масштабов.

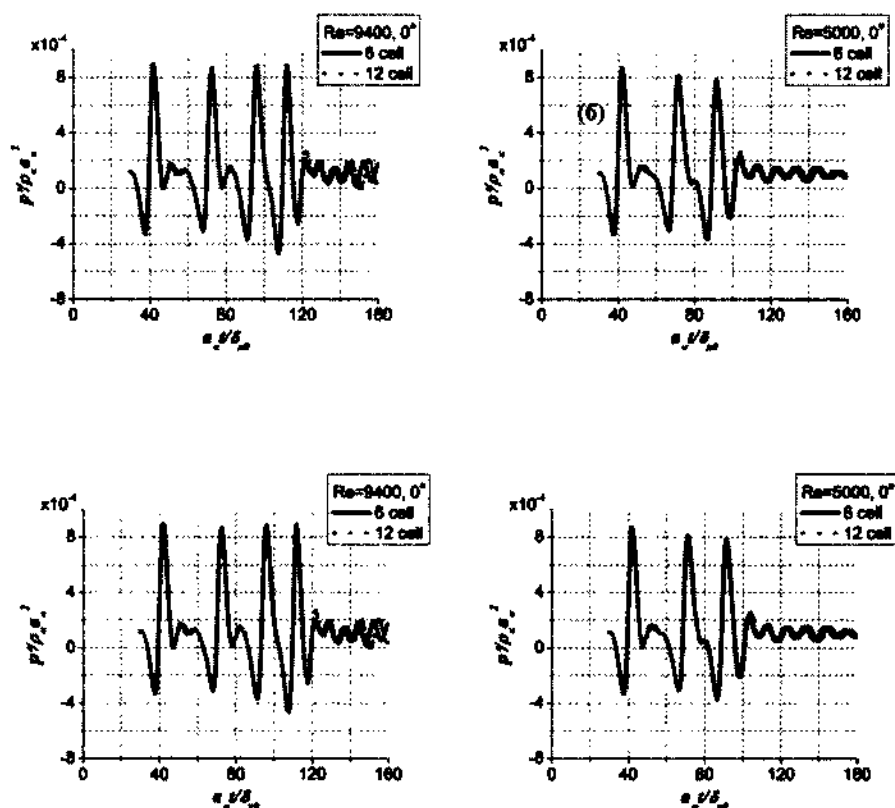


Рис. 4.33. Акустические пульсации поля вихрей на контрольной поверхности под разными углами к потоку и при разных значениях ламинарной вязкости

4.17. Приближение слабой сжимаемости

Для численного решения многомерных задач гидродинамики несжимаемой жидкости иногда используют явные разностные схемы, предназначенные для расчета газодинамических течений, заменяя уравнение состояния газовой среды, зависящее как от плотности, так и от внутренней энергии, на более простое, зависящее только от плотности.

Таким образом, вместо системы уравнений (4.1) используется более простая система уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\
p &= c^2 \cdot (\rho - \rho_0), \quad c^2 = \text{const} > 0.
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Здесь константа c играет роль изотермической скорости звука. Относительное изменение плотности в таких течениях пропорционально квадрату от числа Маха. Чтобы обеспечить относительную сжимаемость порядка одного процента, константу c необходимо подобрать так, чтобы максимальное число Маха не превышало десяти процентов.

Для решения такой системы по схеме «КАБАРЕ» сведем ее к системе уравнений переноса инвариантов Римана. Для этого, как обычно, выполним следующие операции. Вначале преобразуем консервативную форму уравнений (4.141) к т. н. «простой форме».

«Простая форма» уравнений (4.141) имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = 0, \quad \bar{\Phi}^T = (p, u, v), \tag{4.142}$$

где

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} u & c^2 \rho & 0 \\ \rho^{-1} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_y = \begin{pmatrix} v & 0 & c^2 \rho \\ 0 & v & 0 \\ \rho^{-1} & 0 & v \end{pmatrix}. \tag{4.143}$$

Таким образом, систему (4.142) можно представить как в виде неоднородной одномерной системы уравнений переноса в направлении x

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = Q_x; \quad Q_x = -\mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}; \quad \bar{\Phi}^T = (p, u, v), \tag{4.144}$$

так и в виде системы уравнений переноса в направлении y

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = Q_y; \quad Q_y = -\mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}; \quad \bar{\Phi}^T = (p, u, v). \tag{4.145}$$

Для приведения уравнений к характеристической форме нужно знать собственные числа матриц $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y$, которые находятся из условий:

$$\|A_x - \lambda^x \cdot E\| = \left\| \begin{pmatrix} u - \lambda^x & c^2 \rho & 0 \\ \rho^{-1} & u - \lambda^x & 0 \\ 0 & 0 & u - \lambda^x \end{pmatrix} \right\| = 0; \quad \|A_y - \lambda^y \cdot E\| = \left\| \begin{pmatrix} v - \lambda^y & 0 & c^2 \rho \\ 0 & v - \lambda^y & 0 \\ \rho^{-1} & 0 & v - \lambda^y \end{pmatrix} \right\| = 0;$$

и равны соответственно:

$$\begin{aligned} \lambda_1^x &= u + c; & \lambda_2^x &= u - c; & \lambda_3^x &= u; \\ \lambda_1^y &= u + c; & \lambda_2^y &= u - c; & \lambda_3^y &= v. \end{aligned}$$

Далее следует вычислить левые собственные векторы, отвечающие полученным собственным числам, и составить из найденных векторов матрицы:

$$\Omega_x = \begin{pmatrix} (c\rho)^{-1} & 1 & 0 \\ -(c\rho)^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Omega_y = \begin{pmatrix} (c\rho)^{-1} & 0 & 1 \\ -(c\rho)^{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножая уравнения (4.144), (4.145) на эти матрицы (каждое уравнение на свою матрицу), получаем:

$$\Omega_x \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \Lambda_x \cdot \Omega_x \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = \Omega_x \cdot Q_x \equiv \bar{G}^x; \quad (4.146)$$

где

$$\Omega_y \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \Lambda_y \cdot \Omega_y \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = \Omega_y \cdot Q_y \equiv \bar{G}^y,$$

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \lambda_1^x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^x & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+c & 0 & 0 \\ 0 & u-c & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}; \quad \Lambda_y = \begin{pmatrix} \lambda_1^y & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+c & 0 & 0 \\ 0 & v-c & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Представление (4.146) приводит к уравнениям переноса Римановых инвариантов

$$\frac{\partial I_k^x}{\partial t} + \lambda_k^x \cdot \frac{\partial I_k^x}{\partial x} = G_k^x; \quad \frac{\partial I_k^y}{\partial t} + \lambda_k^y \cdot \frac{\partial I_k^y}{\partial y} = G_k^y; \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.147)$$

где сами инварианты имеют следующий вид

$$\begin{aligned} I_1^x &= u + c \cdot \ln(p + c^2 \rho_0); & I_2^x &= u - c \cdot \ln(p + c^2 \rho_0); & I_3^x &= v; \\ I_1^y &= v + c \cdot \ln(p + c^2 \rho_0); & I_2^y &= v - c \cdot \ln(p + c^2 \rho_0); & I_3^y &= u. \end{aligned} \quad (4.148)$$

Учитывая, что $|p| \ll c^2 \rho_0$, и разлагая логарифмы в ряд Тейлора в окрестности единицы, приходим к более простым выражениям для инвариантов

$$\begin{aligned}
 I_1^x &= u + \frac{p}{c\rho_0}; & I_2^x &= u - \frac{p}{c\rho_0}; & I_3^x &= v; \\
 I_1^y &= v + \frac{p}{c\rho_0}; & I_2^y &= v - \frac{p}{c\rho_0}; & I_3^y &= u.
 \end{aligned}
 \tag{4.149}$$

В схеме «КАБАРЕ» используется как консервативная форма записи уравнений (4.141), так и уравнения переноса Римановых инвариантов по различным пространственным направлениям (4.149). Для аппроксимации системы уравнений (4.141) на ортогональной расчетной сетке, как и в предыдущих случаях, используем двойной набор переменных: «консервативные» переменные, относящиеся к серединам расчетных ячеек, и «потокосые» переменные, локализованные на их ребрах.

Вычислительный алгоритм схемы «КАБАРЕ», как это было описано ранее для общего случая сжимаемой среды, можно разбить на несколько этапов. На первом этапе вычисляются новые консервативные переменные на промежуточном слое по времени:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho \cdot u)_{i,j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\rho \cdot v)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho \cdot v)_{i+1/2,j}^n}{\Delta y_{j+1/2}} = 0; \\
 & \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u^2 + p)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho \cdot u^2 + p)_{i,j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \\
 & + \frac{(\rho \cdot v \cdot u)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho \cdot v \cdot u)_{i+1/2,j}^n}{\Delta y_{j+1/2}} = 0; \\
 & \frac{(\Theta \cdot V)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot V)_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot v^2 + p)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho \cdot v^2 + p)_{i+1/2,j}^n}{\Delta y_{j+1/2}} + \\
 & + \frac{(\rho \cdot v \cdot u)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho \cdot v \cdot u)_{i,j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.150}$$

Следует обратить внимание на то, что эта система отличается от (4.33) только отсутствием разностного аналога уравнения сохранения полной энергии. Нетрудно увидеть, что схема (4.150) аппроксимирует консервативную форму уравнений слабосжимаемой жидкости (4.141) со вторым порядком по пространственным переменным и с первым порядком по времени.

Отличительной особенностью модели слабосжимаемой жидкости является то, что число инвариантов Римана у нее на единицу меньше и течение всегда дозвуковое. Это существенно упрощает этап вычисления инвариантов на новом временном слое и последующее определение по ним потоковых переменных.

Опишем особенности этих процедур на примере вычисления новых потоковых переменных на вертикальных границах расчетных ячеек.

В каждой расчетной ячейке всегда $\lambda_1^x = u + c > 0$, $\lambda_2^x = u - c < 0$, поэтому линейная экстраполяция первого инварианта всегда проводится из нижнего левого ребра в правое верхнее ребро:

$$(I_2^x)_{i-1,*}^{n+1} = 2 \cdot (I_2^x)_{i-1/2,*}^{n+1/2} - (I_2^x)_{i,*}^n, \quad (4.151)$$

а второго инварианта – из правого нижнего ребра в левое верхнее:

$$(I_1^x)_{i,*}^{n+1} = 2 \cdot (I_1^x)_{i-1/2,*}^{n+1/2} - (I_1^x)_{i-1,*}^n. \quad (4.152)$$

Для оценки правых частей в уравнениях используется их разностная аппроксимация:

$$\frac{(I_k^x)_{i-1/2,*}^{n+1/2} - (I_k^x)_{i-1/2,*}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (\lambda_k^x)_{i-1/2,*}^{n+1/2} \cdot \frac{(I_k^x)_{i,*}^n - (I_k^x)_{i-1,*}^n}{\Delta x_{i-1/2}} = \langle G_k^x \rangle_{i-1/2,*}^{n+1/2}; \quad k=1,2. \quad (4.153)$$

Действительно, все величины, входящие в левую часть этих разностных аппроксимаций нам известны, поэтому (4.153) можно использовать в качестве определения источниковых членов $\langle G_k^x \rangle_{i-1/2,*}^{n+1/2}$.

Следует отметить, что с третьим инвариантом пока никаких операций не проводилось.

Нелинейная коррекция первых двух инвариантов на основе принципа максимума осуществляется точно так же, как это было описано ранее, т. е.:

$$(I_k^x)_{i,*}^{n+1} = \begin{cases} (I_k^x)_{i,*}^{n+1} & \text{if } \min(I_k^x) \leq (I_k^x)_{i,*}^{n+1} \leq \max(I_k^x) \\ \min(I_k^x) & \text{if } (I_k^x)_{i,*}^{n+1} < \min(I_k^x) \\ \max(I_k^x) & \text{if } (I_k^x)_{i,*}^{n+1} > \max(I_k^x) \end{cases};$$

$$k=1,2,$$

где

$$\max(I_k^x) = \max \left\{ (I_k^x)_{i-1,*}^n, (I_k^x)_{i-1/2,*}^n, (I_k^x)_{i,*}^n \right\} + \tau_{n+1/2} \cdot \langle G_k^x \rangle_{i-1/2,*}^{n+1/2}$$

$$\min(I_k^x) = \min \left\{ (I_k^x)_{i-1,*}^n, (I_k^x)_{i-1/2,*}^n, (I_k^x)_{i,*}^n \right\} + \tau_{n+1/2} \cdot \langle G_k^x \rangle_{i-1/2,*}^{n+1/2}$$

$$k=1,2.$$

Процедура вычисления потоковых переменных скорости и давления на вертикальных ребрах расчетных ячеек, не лежащих на границе расчетной области, также сильно упрощается. Действительно, для каждого такого ребра должны выполняться уравнения:

$$u_{i,*}^{n+1} + \frac{P_{i,*}^{n+1}}{c\rho_0} = (I_1^x)_{i,*}^{n+1}; \quad u_{i,*}^{n+1} - \frac{P_{i,*}^{n+1}}{c\rho_0} = (I_2^x)_{i,*}^{n+1}.$$

Разрешая эти уравнения относительно неизвестных $u_{i,*}^{n+1}$ и $P_{i,*}^{n+1}$, получаем:

$$u_{i,*}^{n+1} = \frac{(I_1^x)_{i,*}^{n+1} + (I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{2}; \quad p_{i,*}^{n+1} = c\rho_0 \cdot \frac{(I_1^x)_{i,*}^{n+1} - (I_2^x)_{i,*}^{n+1}}{2}. \quad (4.154)$$

Для вычисления новой касательной составляющей скорости $v_{i,*}^{n+1}$ (третьего инварианта) в качестве переключателя следует использовать новое значение потоковой скорости $u_{i,*}^{n+1}$.

Если $u_{i,*}^{n+1} \geq 0$, то третий инвариант вычисляется и корректируется по параметрам левой ячейки:

$$(I_3^x)_{i,*}^{n+1} = 2 \cdot (I_3^x)_{i-1/2,*}^{n+1/2} - (I_3^x)_{i-1,*}^n;$$

$$(I_3^x)_{i,*}^{n+1} = \begin{cases} (I_3^x)_{i,*}^{n+1} & \text{if } \min(I_3^x)_{i-1/2,*} \leq (I_3^x)_{i,*}^{n+1} \leq \max(I_3^x)_{i-1/2,*} \\ \min(I_3^x)_{i-1/2,*} & \text{if } (I_3^x)_{i,*}^{n+1} < \min(I_3^x)_{i-1/2,*} \\ \max(I_3^x)_{i-1/2,*} & \text{if } (I_3^x)_{i,*}^{n+1} > \max(I_3^x)_{i-1/2,*} \end{cases};$$

$$\max(I_3^x)_{i-1/2,*} = \max\left\{(I_3^x)_{i-1,*}^n, (I_3^x)_{i-1/2,*}^n, (I_3^x)_{i,*}^n\right\} + \tau_{n+1/2} \cdot \langle G_3^x \rangle_{i-1/2,*}^{n+1/2};$$

$$\min(I_3^x)_{i-1/2,*} = \min\left\{(I_3^x)_{i-1,*}^n, (I_3^x)_{i-1/2,*}^n, (I_3^x)_{i,*}^n\right\} + \tau_{n+1/2} \cdot \langle G_3^x \rangle_{i-1/2,*}^{n+1/2},$$

где

$$\frac{(I_3^x)_{i-1/2,*}^{n+1/2} - (I_3^x)_{i-1/2,*}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (\lambda_3^x)_{i-1/2,*}^{n+1/2} \cdot \frac{(I_3^x)_{i,*}^n - (I_3^x)_{i-1,*}^n}{\Delta x_{i-1/2}} = \langle G_3^x \rangle_{i-1/2,*}^{n+1/2}.$$

В противном случае, т. е. когда $u_{i,*}^{n+1} < 0$, третий инвариант берется из правой ячейки:

$$(I_3^x)_{i,*}^{n+1} = 2 \cdot (I_3^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} - (I_3^x)_{i+1,*}^n;$$

$$(I_3^x)_{i,*}^{n+1} = \begin{cases} (I_3^x)_{i,*}^{n+1} & \text{if } \min(I_3^x)_{i+1/2,*} \leq (I_3^x)_{i,*}^{n+1} \leq \max(I_3^x)_{i+1/2,*} \\ \min(I_3^x)_{i+1/2,*} & \text{if } (I_3^x)_{i,*}^{n+1} < \min(I_3^x)_{i+1/2,*} \\ \max(I_3^x)_{i+1/2,*} & \text{if } (I_3^x)_{i,*}^{n+1} > \max(I_3^x)_{i+1/2,*} \end{cases};$$

$$\begin{aligned}\max(I_3^x)_{i+1/2,*} &= \max\left\{(I_3^x)_{i+1,*}^n, (I_3^x)_{i+1/2,*}^n, (I_3^x)_{i,*}^n\right\} + \tau_{n+1/2} \cdot \langle G_3^x \rangle_{i+1/2,*}^{n+1/2}; \\ \min(I_3^x)_{i+1/2,*} &= \min\left\{(I_3^x)_{i+1,*}^n, (I_3^x)_{i+1/2,*}^n, (I_3^x)_{i,*}^n\right\} + \tau_{n+1/2} \cdot \langle G_3^x \rangle_{i+1/2,*}^{n+1/2},\end{aligned}$$

где

$$\frac{(I_3^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} - (I_3^x)_{i+1/2,*}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (\lambda_3^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot \frac{(I_3^x)_{i+1,*}^n - (I_3^x)_{i,*}^n}{\Delta x_{i+1/2}} = \langle G_3^x \rangle_{i+1/2,*}^{n+1/2}.$$

Потоковые переменные на ребрах, принадлежащих границам области, вычисляются с учетом граничных условий.

Для горизонтальных ребер расчетных ячеек процедура вычисления потоковых переменных на новом временном слое аналогична.

Для завершения вычислительного процесса, обеспечивающего окончательный переход на новый временной слой, остается только вычислить новые значения консервативных переменных по схеме второго порядка точности:

$$\begin{aligned}& \frac{\Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - \Theta_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot u})_{i+1,j+1/2} - (\overline{\rho \cdot u})_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot v})_{i+1/2,j+1} - (\overline{\rho \cdot v})_{i+1/2,j}}{\Delta y_{j+1/2}} = 0; \\ & \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot u^2 + p})_{i+1,j+1/2} - (\overline{\rho \cdot u^2 + p})_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \\ & + \frac{(\overline{\rho \cdot v \cdot u})_{i+1/2,j+1} - (\overline{\rho \cdot v \cdot u})_{i+1/2,j}}{\Delta y_{j+1/2}} = 0; \\ & \frac{(\Theta \cdot V)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot V)_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot v^2 + p})_{i+1/2,j+1} - (\overline{\rho \cdot v^2 + p})_{i+1/2,j}}{\Delta y_{j+1/2}} + \\ & + \frac{(\overline{\rho \cdot v \cdot u})_{i+1,j+1/2} - (\overline{\rho \cdot v \cdot u})_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0,\end{aligned}$$

где использованы обозначения, принятые при написании формулы.

Замечания по использованию приближения слабой сжимаемости

При проведении расчетов динамики несжимаемой жидкости в приближении слабой сжимаемости важно при задании начальных скоростей соблюсти условие, чтобы их дивергенция была равна нулю. В противном случае образуются паразитные псевдоакустические волны, которые в силу особенностей схемы «КАБАРЕ», практически не будут затухать, что может привести к качественно неверным результатам расчетов. Величину «искусственной» скорости звука C можно сделать переменной по времени. Важно лишь то, чтобы на каждом шаге по времени она оставалась постоянной по про-

странству. Чтобы обеспечить несжимаемость в пределах одного процента, скорость звука достаточно на каждом шаге вычислять по формуле:

$$c^{n+1/2} \geq 10 \cdot \max(|U^n|, |V^n|), \quad (4.155)$$

где максимум берется по всем расчетным ячейкам.

Приближение слабой сжимаемости при переходе на массивные параллельные вычисления может оказаться вполне конкурентноспособным среди других методов, базирующихся на условии несжимаемости, поскольку реализация этого условия связана с численным решением сеточных эллиптических уравнений большой размерности.

4.18. Перенос пассивной примеси

Большой практический интерес представляют задачи переноса гидродинамическими и газодинамическими течениями пассивной примеси, в роли которой часто выступают аэрозоли и концентрации различных химических веществ. Примесь называется пассивной, если ее наличие или отсутствие никак не влияет на само течение, т. е. на поле скоростей.

Перенос пассивной примеси представляет собой серьезную вычислительную проблему, если в нем доминирует процесс конвекции (адвекции).

Рассмотрим задачу конвективного переноса пассивной примеси как часть общей гидродинамической задачи в приближении слабой сжимаемости. Соответствующая система уравнений, записанная в виде законов сохранения, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \phi v}{\partial y} &= \rho \cdot Q(x, y, t, \phi), \\ p &= c^2 \cdot (\rho - \rho_0), \quad c^2 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Запишем ее в т. н. простой форме:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = 0, \quad \bar{\phi}^T = (p, u, v, \phi), \quad (4.157)$$

где матрицы $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y$ имеют вид:

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} u & c^2 \rho & 0 & 0 \\ \rho^{-1} & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_y = \begin{pmatrix} v & 0 & c^2 \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ \rho^{-1} & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этих матриц являются действительными, но не различными. Два из них имеют двойную кратность, т. е. совпадают:

$$\begin{aligned} \lambda_1^x &= u + c; & \lambda_2^x &= u - c; & \lambda_3^x &= \lambda_4^x = u; \\ \lambda_1^y &= u + c; & \lambda_2^y &= u - c; & \lambda_3^y &= \lambda_4^y = v; \end{aligned}$$

Кратность собственных чисел в данном случае не порождает жордановой структуры, и матрицы $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y$ приводятся к диагональному виду

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \lambda_1^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^x \end{pmatrix}; \quad \Lambda_y = \begin{pmatrix} \lambda_1^y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^y \end{pmatrix}$$

умножением слева на матрицы Ω_x, Ω_y , составленные из строк – левых собственных векторов.

$$\Omega_x = \begin{pmatrix} (c\rho)^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ -(c\rho)^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Omega_y = \begin{pmatrix} (c\rho)^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ -(c\rho)^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение уравнений в форме (4.157) на эти матрицы приводит к двум квазиодномерным неоднородным уравнениям переноса локальных римановых инвариантов

$$\frac{\partial I_k^x}{\partial t} + \lambda_k^x \cdot \frac{\partial I_k^x}{\partial x} = G_k^x; \quad \frac{\partial I_k^y}{\partial t} + \lambda_k^y \cdot \frac{\partial I_k^y}{\partial y} = G_k^y; \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (4.158)$$

где сами инварианты имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1^x &= u + c \cdot \ln(p + c^2 \rho_0); & I_2^x &= u - c \cdot \ln(p + c^2 \rho_0); & I_3^x &= v; & I_4^x &= \phi; \\ I_1^y &= v + c \cdot \ln(p + c^2 \rho_0); & I_2^y &= v - c \cdot \ln(p + c^2 \rho_0); & I_3^y &= u; & I_4^y &= \phi. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Сравнение с (4.149) показывает, что они совпадают с точностью до четвертого инварианта, в качестве которого выступает концентрация пассивной примеси ϕ . Как и ранее, разлагая логарифмы в ряд Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} I_1^x &= u + \frac{P}{c\rho_0}; & I_2^x &= u - \frac{P}{c\rho_0}; & I_3^x &= v; & I_4^x &= \phi; \\ I_1^y &= v + \frac{P}{c\rho_0}; & I_2^y &= v - \frac{P}{c\rho_0}; & I_3^y &= u; & I_4^y &= \phi. \end{aligned}$$

Таким образом, хорошо видно, что уравнение переноса пассивной примеси можно рассматривать независимо от остальных уравнений системы, которые определяют поле скорости, в котором происходит адвекция. Обратного влияния на скорость уравнение переноса пассивной примеси не оказывает, и нам достаточно описать применение схемы «КАБАРЕ» для одного лишь уравнения конвективного переноса на заданном поле скоростей.

Для реализации схемы «КАБАРЕ» нужна как консервативная форма записи этого уравнения

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \phi v}{\partial y} = Q(x, y, t, \phi), \quad (4.160)$$

так и его представление в виде «расщепленного» переноса по координатным осям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} &= Q(x, y, t, \phi) - v \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \equiv G_4^x; \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} &= Q(x, y, t, \phi) - u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \equiv G_4^y. \end{aligned} \quad (4.161)$$

На заданной расчетной сетке введем, как и ранее, «консервативные» и «потокосые» переменные, описывающие концентрацию примеси. Консервативные переменные отнесем, как обычно, к центрам расчетных ячеек, потокосые – к серединам их ребер.

Вначале вычислим промежуточные консервативные переменные концентрации на половинном временном слое:

$$\begin{aligned} & \frac{(\Theta \cdot \phi)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot \phi)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot \phi)_{i+1}^n - (\rho \cdot \phi)_{i+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\rho \cdot \phi)_{i,j+1}^n - (\rho \cdot \phi)_{i,j}^n}{\Delta y_{i,j+1/2}} = \\ & = Q^{n+1/2}(x, y, t, \phi). \end{aligned} \quad (4.162)$$

Для вычисления потокосых концентраций в серединах вертикальных ребер следует использовать алгоритм, описанный ранее для третьего инварианта системы уравнений

приближения слабосжимаемой жидкости. Поскольку концентрация является четвертым инвариантом полной системы, то естественно записать это в аналогичном виде.

Если $u_{i,*}^{n+1} \geq 0$, то четвертый инвариант вычисляется и корректируется по параметрам левой ячейки:

$$\begin{aligned} (I_4^x)_{i,*}^{n+1} &= 2 \cdot (I_4^x)_{i-1/2,*}^{n+1/2} - (I_4^x)_{i-1,*}^n; \\ (I_4^x)_{i,*}^{n+1} &= \begin{cases} (I_4^x)_{i,*}^{n+1} & \text{if } \min(I_4^x)_{i-1/2,*} \leq (I_4^x)_{i,*}^{n+1} \leq \max(I_4^x)_{i-1/2,*} \\ \min(I_4^x)_{i-1/2,*} & \text{if } (I_4^x)_{i,*}^{n+1} < \min(I_4^x)_{i-1/2,*} \\ \max(I_4^x)_{i-1/2,*} & \text{if } (I_4^x)_{i,*}^{n+1} > \max(I_4^x)_{i-1/2,*} \end{cases}; \\ \max(I_4^x)_{i-1/2,*} &= \max\left\{(I_4^x)_{i-1,*}^n, (I_4^x)_{i-1/2,*}^n, (I_4^x)_{i,*}^n\right\} + \tau_{n+1/2} \cdot \langle G_4^x \rangle_{i-1/2,*}^{n+1/2}; \\ \min(I_4^x)_{i-1/2,*} &= \min\left\{(I_4^x)_{i-1,*}^n, (I_4^x)_{i-1/2,*}^n, (I_4^x)_{i,*}^n\right\} + \tau_{n+1/2} \cdot \langle G_4^x \rangle_{i-1/2,*}^{n+1/2}, \end{aligned}$$

где

$$\frac{(I_4^x)_{i-1/2,*}^{n+1/2} - (I_4^x)_{i-1/2,*}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (\lambda_4^x)_{i-1/2,*}^{n+1/2} \cdot \frac{(I_4^x)_{i,*}^n - (I_4^x)_{i-1,*}^n}{\Delta x_{i-1/2}} = \langle G_4^x \rangle_{i-1/2,*}^{n+1/2}.$$

В противном случае, т. е. когда $u_{i,*}^{n+1} < 0$, третий инвариант берется из правой ячейки:

$$\begin{aligned} (I_4^x)_{i,*}^{n+1} &= 2 \cdot (I_4^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} - (I_4^x)_{i+1,*}^n; \\ (I_4^x)_{i,*}^{n+1} &= \begin{cases} (I_4^x)_{i,*}^{n+1} & \text{if } \min(I_4^x)_{i+1/2,*} \leq (I_4^x)_{i,*}^{n+1} \leq \max(I_4^x)_{i+1/2,*} \\ \min(I_4^x)_{i+1/2,*} & \text{if } (I_4^x)_{i,*}^{n+1} < \min(I_4^x)_{i+1/2,*} \\ \max(I_4^x)_{i+1/2,*} & \text{if } (I_4^x)_{i,*}^{n+1} > \max(I_4^x)_{i+1/2,*} \end{cases}; \\ \max(I_4^x)_{i+1/2,*} &= \max\left\{(I_4^x)_{i+1,*}^n, (I_4^x)_{i+1/2,*}^n, (I_4^x)_{i,*}^n\right\} + \tau_{n+1/2} \cdot \langle G_4^x \rangle_{i+1/2,*}^{n+1/2}; \\ \min(I_4^x)_{i+1/2,*} &= \min\left\{(I_4^x)_{i+1,*}^n, (I_4^x)_{i+1/2,*}^n, (I_4^x)_{i,*}^n\right\} + \tau_{n+1/2} \cdot \langle G_4^x \rangle_{i+1/2,*}^{n+1/2}, \end{aligned}$$

где

$$\frac{(I_4^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} - (I_4^x)_{i+1/2,*}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (\lambda_4^x)_{i+1/2,*}^{n+1/2} \cdot \frac{(I_4^x)_{i,*}^n - (I_4^x)_{i+1,*}^n}{\Delta x_{i+1/2}} = \langle G_4^x \rangle_{i+1/2,*}^{n+1/2}.$$

Вычислительный цикл завершается вычислением новых значений консервативных переменных на новом временном слое по консервативной разностной схеме второго порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} & \frac{(\Theta \cdot \phi)_{i+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot \phi)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot \phi})_{i+1} - (\overline{\rho \cdot \phi})_{i+1}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot \phi})_{j+1} - (\overline{\rho \cdot \phi})_{j+1}^n}{\Delta y_{j+1/2}} = \\ & = Q^{n+1/2}(x, y, t, \phi); \end{aligned} \quad (4.163)$$

где $\overline{\rho \cdot \phi} = 0,5 \cdot [(\rho \cdot \phi)^n + (\rho \cdot \phi)^{n+1}]$.

Тестовая задача о переносе пассивной примеси при круговом вращении плоскости

В квадратной расчетной области задается стационарное поле скоростей, соответствующее вращению плоскости вокруг точки $x_c = (x_c, y_c) = (0,5; 0,5)$ с постоянной угловой скоростью (рис. 4.34а):

$$\begin{aligned} \vec{U} &= (u, v), \quad R = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}, \quad \beta = \arctg\left(\frac{y-y_c}{x-x_c}\right), \\ u &= \begin{cases} R \cdot \sin \beta, & (x-x_c) \geq 0 \\ -R \cdot \cos \beta, & (x-x_c) \leq 0 \end{cases}, \quad v = \begin{cases} -R \cdot \cos \beta, & (x-x_c) \geq 0 \\ R \cdot \sin \beta, & (x-x_c) \leq 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.164)$$

В начальный момент задается профиль концентрации, например, конус с центром основания в точке $x_f = (x_f, y_f) = (0,25; 0,5)$ (рис. 4.34б):

$$\begin{aligned} C_0(x) &= 1 - 8 \cdot \sqrt{(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2} \\ \text{if } C_0(x) &< 0, \quad \text{then } C_0(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.165)$$

За время T_0 , равное периоду одного оборота, начальный профиль концентрации должен вернуться в исходное положение.

По степени деформации начального профиля, например, уменьшению его высоты, можно судить об аппроксимационной диффузии схемы. В задаче о конусе за меру вычислительной эффективности алгоритма примем величину изменения высоты конуса за один оборот.

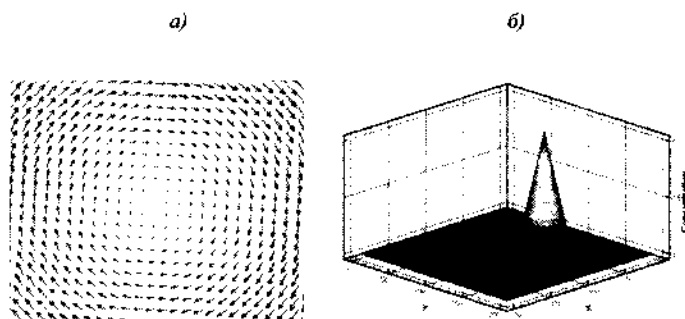


Рис. 4.34. а) фрагмент кольцевого поля скоростей; б) конус на сетке 200×200

Помимо конуса, в качестве начального профиля $C_0(x)$ рассмотрим также гауссиан $C_0(x) = \exp(-\frac{|x-x_c|^2}{2\sigma^2})$ с центром в точке $x_c = (x_c, y_c) = (0, 25; 0, 5)$ и дисперсией $\sigma = 0,0447$ (рис. 4.35):

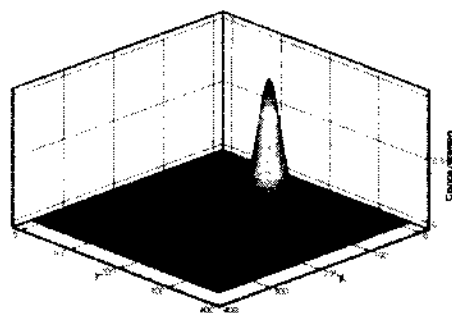


Рис. 4.35. Гауссиан на сетке 400×400

При вращении конуса на достаточно грубых расчетных сетках – 80×80 и 200×200 , получены следующие результаты:

Высота конуса в % от исходной, сетка 80×80	84,0	Высота конуса в % от исходной, сетка 200×200	91,3

Для сравнения, схема высокого порядка точности MUSCL TVD 4-го порядка аппроксимации по времени на сетке 80×80 дает уменьшение конуса 66% [21]. На более точных сетках, например, на 400×400 , конус после одного оборота практически не отличается от исходного.

В работе [22] приводится тест на равномерное вращение гауссиана и сравнение результатов следующих схем: ELLAM (Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method), MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws), схема Minmod, FCT (Flux-Corrected Transport), ENO (Essentially NonOscillatory), WENO (Weighted ENO).

В таблице 4.2 приведены результаты сравнения перечисленных схем на шести различных сетках.

Таблица 4.2. Сравнение схем «КАБАРЕ», FCT, Minmod, MUSCL, ENO, WENO

h	dt	Схема	Max	Min	CPU	h	dt	Схема	Max	Min	CPU
1	π	«КАБАРЕ»	0,9241	- 0,026	1,8с	1	π	«КАБАРЕ»	0,9981	- 2e - 04	2м40с
		FCT	0,8714	0	1м9с			FCT	0,9927	0	1ч32м
		Minmod	0,4223	0	1м5с			Minmod	0,8332	0	1ч29м
		MUSCL	0,6604	- 0,001	1м9с			MUSCL	0,9556	0	1ч49м
		ENO	0,8757	0	1м10с			ENO	0,9981	0	1ч32м
		WENO	0,9617	- 1e - 04	2м4с			WENO	0,9980	0	2ч58м
1	π	«КАБАРЕ»	0,9733	- 0,0024	6,1с	1	π	«КАБАРЕ»	0,9990	- 9e - 05	7м51с
		FCT	0,9565	0	3м59с			FCT	0,9970	0	4ч22м
		Minmod	0,5722	0	3м37с			Minmod	0,8987	0	4ч2м
		MUSCL	0,8012	- 3,2e - 4	4м22с			MUSCL	0,9775	0	4ч55м
		ENO	0,9552	0	3м46с			ENO	0,9989	0	4ч13м
		WENO	0,9832	0	7м7с			WENO	0,9991	0	8ч5м
1	π	«КАБАРЕ»	0,9967	- 2e - 04	1м11с	1	π	«КАБАРЕ»	0,9998	- 1e - 04	23м
		FCT	0,9866	0	43м54с			FCT	0,9979	0	12ч15м
		Minmod	0,7702	0	40м7с			Minmod	0,9250	0	11ч58м
		MUSCL	0,9291	0	49м1с			MUSCL	0,9851	0	14ч39м
		ENO	0,9843	0	42м21с			ENO	0,9993	0	12ч20м
		WENO	0,9964	0	1ч20м			WENO	0,9995	0	23ч51м

Из таблицы видно, что схемы WENO и «КАБАРЕ» одинаково эффективны, но последняя менее сложная и ресурсоемкая, о чем свидетельствует время, затраченное на расчет задачи (схема «КАБАРЕ» примерно в 60 раз быстрее).

4.19. Обобщение схемы «КАБАРЕ» на случай несжимаемой жидкости

Уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \quad \rho = \rho_0 = \text{const.}\end{aligned}\tag{4.166}$$

Первые два уравнения этой системы запишем в «простом» матричном виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y} &= \vec{f}; \quad \vec{\phi} = (u, v); \quad \vec{f} = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right); \\ \mathbf{A}_x &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.167}$$

Систему уравнений (4.167) можно рассматривать как обобщение на двумерный случай неоднородного уравнения Холфа.

Произведем расщепление этого уравнения на два уравнения переноса по каждому из направлений:

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} = \vec{Q}_x; \quad \vec{Q}_x = \vec{f} - \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y};\tag{4.168}$$

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \mathbf{A}_y \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y} = \vec{Q}_y; \quad \vec{Q}_y = \vec{f} - \mathbf{A}_x \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x}.\tag{4.169}$$

Нетрудно увидеть, что собственные числа матриц $\mathbf{A}_x$ и $\mathbf{A}_y$ совпадают с компонентами вектора скорости.

Для численного решения уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости на ортогональных расчетных сетках консервативные компоненты скорости отнесем, как обычно, к центрам расчетных ячеек, а потоковые ее компоненты – к серединам граней. Точки локализации переменной давления определим позднее.

Пусть в начальный момент времени заданы консервативные величины компонент скорости $(U_c^{n=0}, V_c^{n=0})$, удовлетворяющие условию дивергентности в узлах расчетных ячеек:

$$\begin{aligned}& \frac{(U_{i+1/2, j+1/2}^{n=0} + U_{i+1/2, j-1/2}^{n=0}) - (U_{i-1/2, j+1/2}^{n=0} + U_{i-1/2, j-1/2}^{n=0})}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}} + \\ & + \frac{(V_{i+1/2, j+1/2}^{n=0} + V_{i-1/2, j+1/2}^{n=0}) - (V_{i+1/2, j-1/2}^{n=0} + V_{i-1/2, j-1/2}^{n=0})}{\Delta y_{i+1/2} + \Delta y_{i-1/2}} = 0\end{aligned}\tag{4.170}$$

и потоковые составляющие $(u_{i,j+1/2}^{n=0}, v_{i,j+1/2}^{n=0}, u_{i+1/2,j}^{n=0}, v_{i+1/2,j}^{n=0})$, дивергентные относительно центров ячеек

$$\frac{u_{i+1,j+1/2}^{n=0} - u_{i,j+1/2}^{n=0}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{v_{i+1/2,j+1}^{n=0} - v_{i+1/2,j}^{n=0}}{\Delta y_{j+1/2}} = 0. \quad (4.171)$$

Вычислим промежуточные значения консервативных скоростей на половинном временном слое из динамических уравнений без учета градиентов давления:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = 0.$$

Это приводит к дивергентным разностным схемам:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(u_{i+1,j+1/2}^n)^2 - (u_{i,j+1/2}^n)^2}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{u_{i+1/2,j+1}^n v_{i+1/2,j+1}^n - u_{i+1/2,j}^n v_{i+1/2,j}^n}{\Delta y_{j+1/2}} &= 0; \\ \frac{\tilde{V}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - V_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{u_{i+1,j+1/2}^n v_{i+1,j+1/2}^n - u_{i,j+1/2}^n v_{i,j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(v_{i+1/2,j+1}^n)^2 - (v_{i+1/2,j}^n)^2}{\Delta y_{j+1/2}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.172)$$

Вычисленные таким образом значения консервативных скоростей уже не будут удовлетворять условию дивергентности, поскольку

$$\begin{aligned} &\frac{(\tilde{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + \tilde{U}_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}) - (\tilde{U}_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + \tilde{U}_{i-1/2,j-1/2}^{n+1/2})}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}} + \\ &+ \frac{(\tilde{V}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + \tilde{V}_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}) - (\tilde{V}_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2} + \tilde{V}_{i-1/2,j-1/2}^{n+1/2})}{\Delta y_{i+1/2} + \Delta y_{i-1/2}} = [D(\tilde{U}, \tilde{V})]^{n+1/2} \end{aligned} \quad (4.173)$$

и правая часть $[D(\tilde{U}, \tilde{V})]^{n+1/2}$ не обязательно равна нулю. Чтобы подправить полученное решение таким образом, чтобы оно стало дивергентным, учтем отброшенные ранее члены с давлением следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \tilde{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{(P_{i+1,j}^{n+1/2} + P_{i+1,j+1}^{n+1/2}) - (P_{i,j}^{n+1/2} + P_{i,j+1}^{n+1/2})}{2 \cdot \Delta x_{i+1/2}} &= 0; \\ \frac{V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \tilde{V}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{(P_{i+1,j+1}^{n+1/2} + P_{i,j+1}^{n+1/2}) - (P_{i+1,j}^{n+1/2} + P_{i,j}^{n+1/2})}{2 \cdot \Delta y_{j+1/2}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.174)$$

Здесь сеточная функция давления относится к узлам расчетной сетки. Нетрудно увидеть, что если сложить разностные уравнения (4.174) с уравнениями (4.172), то мы получим разностную схему, аппроксимирующую полные динамические уравнения с первым порядком точности.

Неизвестную сеточную функцию давления, входящую в систему (4.174), определим из требования дивергентности поля скорости $(U_c^{n+1/2}, V_c^{n+1/2})$, которое приводит к сеточному эллиптическому уравнению относительно давления:

$$\mathbf{L} \cdot P^{n+1/2} = \frac{2 \cdot \rho_0}{\tau_{n+1/2}} \cdot [D(\tilde{U}, \tilde{V})]^{n+1/2}, \quad (4.175)$$

где сеточный оператор $\mathbf{L}$ для внутренних узлов сеточной области представляет собой симметричную 9-диагональную матрицу:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot P^{n+1/2} = & \frac{1}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}} \cdot \left[\frac{(P_{i+1,j+1}^{n+1/2} + 2P_{i+1,j}^{n+1/2} + P_{i+1,j-1}^{n+1/2}) - (P_{i,j+1}^{n+1/2} + 2P_{i,j}^{n+1/2} + P_{i,j-1}^{n+1/2})}{2 \cdot \Delta x_{i+1/2}} - \right. \\ & \left. - \frac{(P_{i,j+1}^{n+1/2} + 2P_{i,j}^{n+1/2} + P_{i,j-1}^{n+1/2}) - (P_{i-1,j+1}^{n+1/2} + 2P_{i-1,j}^{n+1/2} + P_{i-1,j-1}^{n+1/2})}{2 \cdot \Delta x_{i-1/2}} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta y_{j+1/2} + \Delta y_{j-1/2}} \cdot \left[\frac{(P_{i+1,j+1}^{n+1/2} + 2P_{i,j+1}^{n+1/2} + P_{i-1,j+1}^{n+1/2}) - (P_{i+1,j}^{n+1/2} + 2P_{i,j}^{n+1/2} + P_{i-1,j}^{n+1/2})}{2 \cdot \Delta y_{j+1/2}} - \right. \\ & \left. - \frac{(P_{i+1,j}^{n+1/2} + 2P_{i,j}^{n+1/2} + P_{i-1,j}^{n+1/2}) - (P_{i+1,j-1}^{n+1/2} + 2P_{i,j-1}^{n+1/2} + P_{i-1,j-1}^{n+1/2})}{2 \cdot \Delta y_{j-1/2}} \right]. \quad (4.176) \end{aligned}$$

Можно показать, что на квадратной расчетной сетке этот оператор вырождается в 5-диагональный на сеточном шаблоне «косой крест».

На границах расчетной области необходимо задавать граничные условия, зависящие от решаемой задачи. Обычно это граничные условия первого или второго рода.

После вычисления промежуточных скоростей вычисляются потоковые переменные на новом временном слое линейной экстраполяцией инвариантов Римана с последующей нелинейной коррекцией на основе принципа максимума. Из анализа уравнения переноса (4.168) следует, что у него имеется только одна характеристика, а инварианты Римана совпадают с компонентами скорости. То же можно сказать и про второе уравнение (4.170).

Для вычисления нормальной составляющей потоковой скорости к вертикальной грани, вначале следует линейной экстраполяцией вычислить их новые «прикидочные» значения со стороны каждой из прилегающих ячеек:

$$(u_{i,j+1/2}^{n+1})_L = 2 \cdot U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1,j+1/2}^n; \quad (u_{i,j+1/2}^{n+1})_R = 2 \cdot U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1,j+1/2}^n. \quad (4.177)$$

Затем их следует подвергнуть коррекции на основе принципа максимума:

$$\begin{aligned} (u_{i,j+1/2}^{n+1})_L &= \begin{cases} (u_{i,j+1/2}^{n+1})_L & \text{if } \min(u)_{i-1/2} \leq (u_{i,j+1/2}^{n+1})_L \leq \max(u)_{i-1/2} \\ \min(u)_{i-1/2} & \text{if } (u_{i,j+1/2}^{n+1})_L < \min(u)_{i-1/2} \\ \max(u)_{i-1/2} & \text{if } (u_{i,j+1/2}^{n+1})_L > \max(u)_{i-1/2} \end{cases} ; \\ (u_{i,j+1/2}^{n+1})_R &= \begin{cases} (u_{i,j+1/2}^{n+1})_R & \text{if } \min(u)_{i+1/2} \leq (u_{i,j+1/2}^{n+1})_R \leq \max(u)_{i+1/2} \\ \min(u)_{i+1/2} & \text{if } (u_{i,j+1/2}^{n+1})_R < \min(u)_{i+1/2} \\ \max(u)_{i+1/2} & \text{if } (u_{i,j+1/2}^{n+1})_R > \max(u)_{i+1/2} \end{cases} , \end{aligned}$$

где

$$\max(u)_{i-1/2} = \max(u_{i-1,j+1/2}^n, U_{i-1/2,j+1/2}^n, u_{i,j+1/2}^n) + \tau_{n+1/2} \cdot \langle Q_x \rangle_{i-1/2,j+1/2}^n$$

$$\min(u)_{i-1/2} = \min(u_{i-1,j+1/2}^n, U_{i-1/2,j+1/2}^n, u_{i,j+1/2}^n) + \tau_{n+1/2} \cdot \langle Q_x \rangle_{i-1/2,j+1/2}^n$$

и

$$\langle Q_x \rangle_{i-1/2,j+1/2}^n = \frac{U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - U_{i-1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{u_{i,j+1/2}^n - u_{i-1,j+1/2}^n}{\Delta x_{i-1/2}}. \quad (4.178)$$

По откорректированным значениям скоростей $(u_{i,j+1/2}^{n+1})_L$ и $(u_{i,j+1/2}^{n+1})_R$ вычисляется значение $\tilde{u}_{i,j+1/2}^{n+1}$, соответствующее модифицированному потоку Годунова:

$$\tilde{u}_{i,j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} (u_{i,j+1/2}^{n+1})_L & \text{if } (U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0 \& U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} > 0) \\ (u_{i,j+1/2}^{n+1})_R & \text{if } (U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} < 0 \& U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \leq 0) \\ 0 & \text{if } (U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} > 0 \& U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \leq 0) \\ (u_{i,j+1/2}^{n+1})_L & \end{cases}$$

Аналогичным образом вычисляются нормальные компоненты потоковой скорости $\tilde{v}_{i+1/2,j}^{n+1}$ на горизонтальных гранях расчетной сетки.

По вычисленным нормальным компонентам скорости находится дивергенция поля потоковых скоростей, относящаяся к центрам ячеек:

$$\frac{\tilde{u}_{i+1,j+1/2}^{n+1} - \tilde{u}_{i,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\tilde{v}_{i+1/2,j+1}^{n+1} - \tilde{v}_{i+1/2,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} = [D(u, v)]^{n+1}. \quad (4.179)$$

Величина этой дивергенции будет, вообще говоря, отличной от нуля. Это обстоятельство порождает дополнительную вычислительную процедуру, которая состоит в том, что нормальные компоненты скорости подвергаются минимальной вариации:

$$u_{i,j+1/2}^{n+1} = \tilde{u}_{i,j+1/2}^{n+1} + \delta u_{i,j+1/2}^{n+1}; \quad v_{i+1/2,j}^{n+1} = \tilde{v}_{i+1/2,j}^{n+1} + \delta v_{i+1/2,j}^{n+1}, \quad (4.180)$$

обеспечивающей солениоидальность окончательных значений нормальных компонент потоковой скорости на новом временном слое. Условие солениоидальности поля можно записать как:

$$\frac{\delta u_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - \delta u_{i,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\delta v_{i+1/2,j+1}^{n+1} - \delta v_{i+1/2,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} + [D(u,v)]^{n+1} = 0. \quad (4.181)$$

Чтобы вариации скоростей были минимальны, составим функционал их квадратов

$$\Phi = \frac{1}{8} \sum_{i,j \in \omega} \left[(\delta u_{i,j+1/2}^{n+1/2})^2 + (\delta u_{i,j+1/2}^{n+1/2})^2 + (\delta v_{i+1/2,j}^{n+1/2})^2 + (\delta v_{i+1/2,j}^{n+1/2})^2 \right] \cdot \Delta x_{i+1/2} \cdot \Delta y_{j+1/2} \quad (4.182)$$

и выпишем условия его минимальности при дополнительных ограничениях.

$$\frac{\partial \bar{\Phi}(\delta u_{i,j+1/2}^{n+1/2}, \delta v_{i+1/2,j}^{n+1/2})}{\partial \delta u_{i,j+1/2}^{n+1/2}} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\Phi}(\delta u_{i,j+1/2}^{n+1/2}, \delta v_{i+1/2,j}^{n+1/2})}{\partial \delta v_{i+1/2,j}^{n+1/2}} = 0, \quad (4.183)$$

где $\bar{\Phi}(\delta u_{i,j+1/2}^{n+1/2}, \delta v_{i+1/2,j}^{n+1/2})$ – функция Лагранжа:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\delta u_{i,j+1/2}^{n+1/2}, \delta v_{i+1/2,j}^{n+1/2}) = & \Phi(\delta u_{i,j+1/2}^{n+1/2}, \delta v_{i+1/2,j}^{n+1/2}) + \\ & + \sum_{i,j \in \omega} P_{i+1/2,j+1/2} \left\{ \frac{\delta u_{i+1,j+1/2}^{n+1} - \delta u_{i,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\delta v_{i+1/2,j+1}^{n+1} - \delta v_{i+1/2,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} + [D(u,v)]^{n+1} \right\} \Delta x_{i+1/2} \Delta y_{j+1/2}, \end{aligned} \quad (4.184)$$

а $P_{i+1/2,j+1/2}$ – множители Лагранжа.

Подставляя (4.184) в условия минимума (4.183), получаем:

$$\delta u_{i,j+1/2}^{n+1} = -2 \cdot \frac{P_{i+1/2,j+1/2} - P_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}}; \quad \delta v_{i+1/2,j}^{n+1} = -2 \cdot \frac{P_{i+1/2,j+1/2} - P_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y_{j+1/2} + \Delta y_{j-1/2}}. \quad (4.185)$$

Подставляя эти выражения в условие солениоидальности (4.181), приходим к эллиптическому сеточному уравнению относительно множителей Лагранжа:

$$\Delta \cdot p = [D(u,v)]^{n+1}. \quad (4.186)$$

Оператор Δ представляет собой пятиточечную аппроксимацию оператора Лапласа на неравномерной ортогональной сетке для внутренних точек области:

$$\Lambda \cdot p = \frac{2}{\Delta x_{i+1/2}} \cdot \left(\frac{p_{*,j+3/2} - p_{*,j+1/2}}{\Delta x_{i+3/2} + \Delta x_{i+1/2}} - \frac{p_{i+1/2,*} - p_{i-1/2,*}}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}} \right) + \\ + \frac{2}{\Delta y_{j+1/2}} \cdot \left(\frac{p_{*,j+3/2} - p_{*,j+1/2}}{\Delta y_{j+3/2} + \Delta y_{j+1/2}} - \frac{p_{*,j+1/2} - p_{*,j-1/2}}{\Delta y_{j+1/2} + \Delta y_{j-1/2}} \right). \quad (4.187)$$

Для граничных ячеек расчетной области из описанной выше вариационной процедуры следуют граничные условия для оператора Λ . На непроницаемых границах вариации нормальных скоростей следует полагать равными нулю, на границах вытекания потока множители Лагранжа должны равняться давлению в ресивере.

После вычисления множителей Лагранжа из уравнений (4.185) находятся минимальные вариации нормальных скоростей, а из соотношений (4.180) – их окончательные величины.

Для завершения этапа вычисления потоковых переменных на новом временном слое остается вычислить касательные составляющие скорости. Как уже отмечалось ранее, касательные составляющие скорости являются инвариантами Римана, и для их вычисления должна использоваться линейная экстраполяция с нелинейной коррекцией по принципу максимума. Рассмотрим эту процедуру на примере вычисления касательной составляющей для вертикальной грани.

Прежде всего, нужно определиться, из какой ячейки, левой или правой, должен приходиться соответствующий инвариант. Для этого будем придерживаться правила, согласно которому направление прихода инварианта определяется направлением характеристической скорости, которая совпадает с уже вычисленным значением нормальной скорости на новом временном слое в середине вертикальной грани. Таким образом, если $u_{i,j+1/2}^{n+1} \geq 0$, то касательная компонента должна вычисляться по параметрам левой прилегающей ячейки, в противном случае – по параметрам правой ячейки:

$$v_{i,*}^{n+1} = \begin{cases} 2 \cdot V_{i-1/2,*}^{n+1/2} - v_{i-1,*}^n & \text{if } u_{i,*}^{n+1} \geq 0 \\ 2 \cdot V_{i+1/2,*}^{n+1/2} - v_{i+1,*}^n & \text{if } u_{i,*}^{n+1} < 0 \end{cases}; \quad (4.188)$$

Коррекция на принципе максимума проводится стандартным для схемы «КАБА-РЕ» способом:

Если $u_{i,*}^{n+1} \geq 0$, то

$$(v_{i,j+1/2}^{n+1})_L = \begin{cases} (v_{i,j+1/2}^{n+1})_L & \text{if } \min(v)_{i-1/2} \leq (v_{i,j+1/2}^{n+1})_L \leq \max(v)_{i-1/2} \\ \min(v)_{i-1/2} & \text{if } (v_{i,j+1/2}^{n+1})_L < \min(v)_{i-1/2} \\ \max(v)_{i-1/2} & \text{if } (v_{i,j+1/2}^{n+1})_L > \max(v)_{i-1/2} \end{cases};$$

в противном случае

$$(v_{i,j+1/2}^{n+1})_R = \begin{cases} (v_{i,j+1/2}^{n+1})_R & \text{if } \min(v)_{i+1/2} \leq (v_{i,j+1/2}^{n+1})_R \leq \max(v)_{i+1/2} \\ \min(v)_{i+1/2} & \text{if } (v_{i,j+1/2}^{n+1})_R < \min(v)_{i+1/2} \\ \max(v)_{i+1/2} & \text{if } (v_{i,j+1/2}^{n+1})_R > \max(v)_{i+1/2} \end{cases},$$

где

$$\max(v)_{i-1/2} = \max(v_{i-1,j+1/2}^n, V_{i-1/2,j+1/2}^n, v_{i,j+1/2}^n) + \tau_{n+1/2} \cdot \langle Q_x^2 \rangle_{i-1/2,j+1/2}^n$$

$$\min(v)_{i-1/2} = \min(v_{i-1,j+1/2}^n, V_{i-1/2,j+1/2}^n, v_{i,j+1/2}^n) + \tau_{n+1/2} \cdot \langle Q_x^2 \rangle_{i-1/2,j+1/2}^n$$

и

$$\langle Q_x^2 \rangle_{i-1/2,j+1/2}^n = \frac{V_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - V_{i-1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{v_{i,j+1/2}^n - v_{i-1,j+1/2}^n}{\Delta x_{i-1/2}}.$$

После нахождения потоковых переменных на новом временном слое остается только вычислить новые консервативные переменные. Для этого удобно использовать симметричную по времени схему второго порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} & \frac{U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{\left[(u_{i+1,j+1/2}^n)^2 + (u_{i+1,j+1/2}^{n+1})^2 \right] - \left[(u_{i,j+1/2}^n)^2 + (u_{i,j+1/2}^{n+1})^2 \right]}{2 \cdot \Delta x_{i+1/2}} + \\ & + \frac{\left[(u_{i+1/2,j+1}^n \cdot v_{i+1/2,j+1}^n) + (u_{i+1/2,j+1}^{n+1} \cdot v_{i+1/2,j+1}^{n+1}) \right] - \left[(u_{i+1/2,j}^n \cdot v_{i+1/2,j}^n) + (u_{i+1/2,j}^{n+1} \cdot v_{i+1/2,j}^{n+1}) \right]}{2 \cdot \Delta y_{j+1/2}} + \\ & + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{(P_{i+1,j+1}^{n+1/2} + P_{i+1,j}^{n+1/2}) - (P_{i,j+1}^{n+1/2} + P_{i,j}^{n+1/2})}{2 \cdot \Delta x_{i+1/2}} = 0; \\ & \frac{V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{\left[(v_{i+1/2,j+1}^n)^2 + (v_{i+1/2,j+1}^{n+1})^2 \right] - \left[(v_{i+1/2,j}^n)^2 + (v_{i+1/2,j}^{n+1})^2 \right]}{2 \cdot \Delta y_{j+1/2}} + \\ & + \frac{\left[(u_{i+1,j+1/2}^n \cdot v_{i+1,j+1/2}^n) + (u_{i+1,j+1/2}^{n+1} \cdot v_{i+1,j+1/2}^{n+1}) \right] - \left[(u_{i,j+1/2}^n \cdot v_{i,j+1/2}^n) + (u_{i,j+1/2}^{n+1} \cdot v_{i,j+1/2}^{n+1}) \right]}{2 \cdot \Delta x_{i+1/2}} + \\ & + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{(P_{i+1,j+1}^{n+1/2} + P_{i,j+1}^{n+1/2}) - (P_{i+1,j}^{n+1/2} + P_{i,j}^{n+1/2})}{2 \cdot \Delta y_{j+1/2}} = 0. \end{aligned}$$

На этом вычисления заканчиваются, и осуществляется переход на следующий временной слой.

Следует обратить внимание на то, что к консервативным переменным скорости на новом временном слое процедура дивергенцизации не применяется.

Вычисление допустимого шага по времени

Поскольку конвективные члены в описанном алгоритме вычисляются по явной схеме, то возникает ограничение на величину допустимого шага по времени. Это ограничение совпадает с условием корректности процедуры нелинейной коррекции на принципе максимума. Эта процедура корректна, когда все существующие обрат-

ные характеристики, опущенные из середин ребер на верхнем слое, пересекают нижнюю грань каждой пространственно-временной расчетной ячейки. Это условие, применительно к несжимаемой жидкости, можно записать как:

$$\tau_{n+1/2} \leq CFL \cdot \min_{i,j \in \omega} \left(\frac{\Delta x_{i+1/2}}{|U^n_{i+1/2,j+1/2}|}, \frac{\Delta y_{j+1/2}}{|V^n_{i+1/2,j+1/2}|} \right), \quad (4.189)$$

где CFL – число Куранта – Фридрихса – Леви.

4.20. Примеры тестовых расчетов

Вихревой диполь

В центре единичного квадрата с гладкими непроницаемыми границами задан вихревой диполь, образованный двумя, отстоящими на расстояние $d=0,15$ вдоль горизонтальной оси одинаковыми изоэнтропийными вихрями с параметрами (4.124), вращающимися в разные стороны. Расчет проводился на сетке (128×128) .

На рисунке 4.36 приведены различные моменты последующего движения этой вихревой пары. Вначале вихри сближаются до некоторого критического расстояния, затем начинают двигаться с постоянной скоростью в перпендикулярном их расположению направлении. На месте их первоначального положения возникает другая вихревая пара значительно меньшей интенсивности, с противоположным направлением вихрей, которая начинает движение к противоположной стенке. При столкновении с нижней границей первая пара вихрей разделяется – каждый из вихрей начинает движение вдоль границ в своем направлении. Затем вихри встречаются в центре противоположной границы, вновь образуют вихревой диполь, который отрывается от стенки и возвращается в центр области. Из-за малости аппроксимационной вязкости амплитуды вихрей при этом изменяются незначительно.

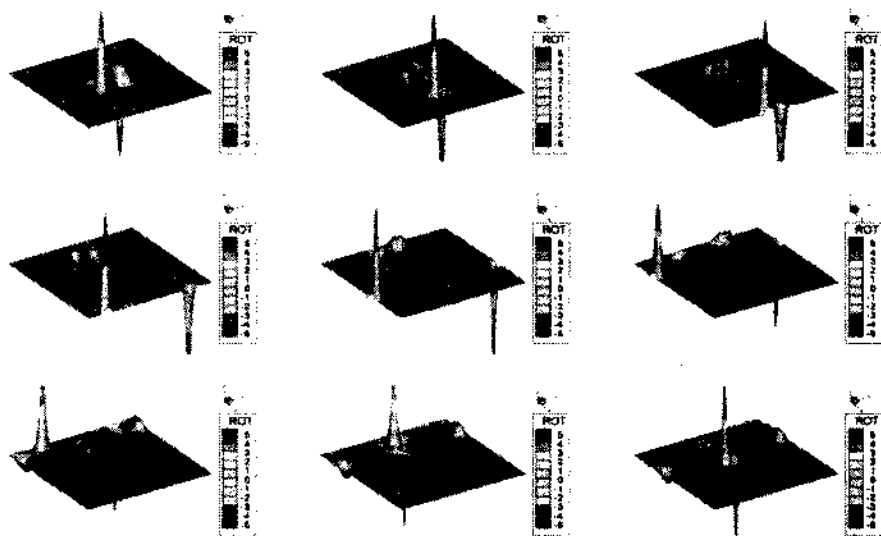


Рис. 4.36. Вихревой диполь. Ротор скорости

Затопленная струя

В прямоугольной области с отношением сторон 1:4 рассчитывается несжимаемое течение невязкой жидкости. В начальный момент времени скорость жидкости постоянна, равна 0,3 и направлена от левой границы к правой. На верхней и нижней границах области заданы условия периодичности, на правой границе – давление, на левой – величина потока и условие Неймана на давление. Расчет проводился на сетке (128×512) . В начальный момент времени в центре левой границы на десяти расчетных ячейках поток ступенькой возрастал до единицы. Это вызывало формирование затопленной струи. На рисунке 4.37а приведена фотография трехмерной затопленной струи, на рисунке 4.37б – результаты расчета по схеме «КАБАРЕ» в двумерном приближении. Отметим, что фотография 4.37а не имеет никакого отношения к расчету и приведена здесь исключительно из эстетических соображений.

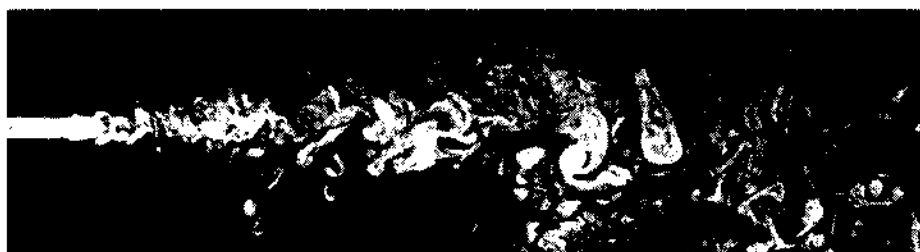


Рис. 4.37а. Затопленная струя

На расчетном графике видно, что изначально однородная струя разбивается в результате неустойчивости Гельмгольца на серию долгоживущих вихрей, взаимодействие которых между собой и создает достаточно реалистичную картину течения.

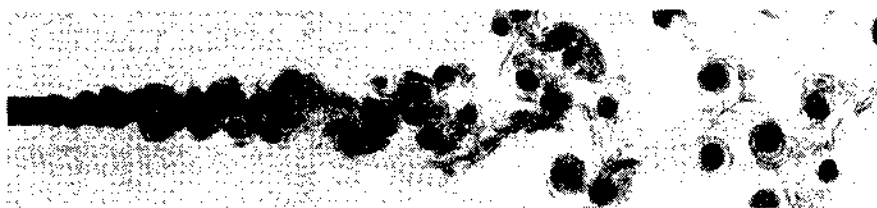
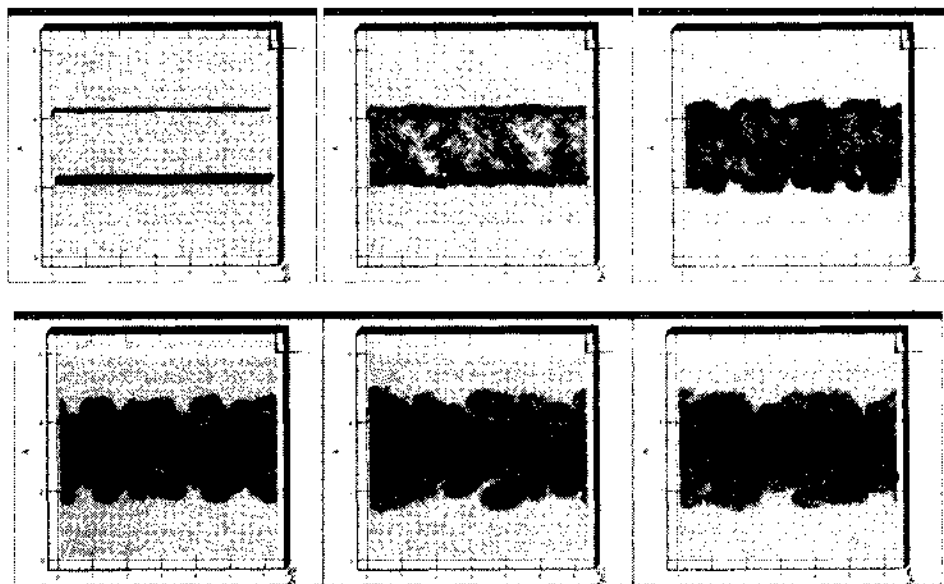


Рис. 4.37b. Затопленная струя. Результаты расчета двумерной струи по схеме «КАБАРЕ»

Неустойчивость плоской струи

В единичном квадрате с периодическими граничными условиями на горизонтальных и вертикальных границах, в покоящейся несжимаемой жидкости движется с единичной скоростью в горизонтальном направлении плоская струя, имеющая поперечное сечение $S = 1/3$ и слегка возмущенные границы. Расчеты велись на сетке (256×256) . На рисунке 4.38 представлены различные этапы развития неустойчивости Гельмгольца. Хорошо видно, что высокое качество воспроизведения отдельных вихрей, которое является характерным для схемы «КАБАРЕ», позволяет проследить этот процесс практически до полного перемешивания.



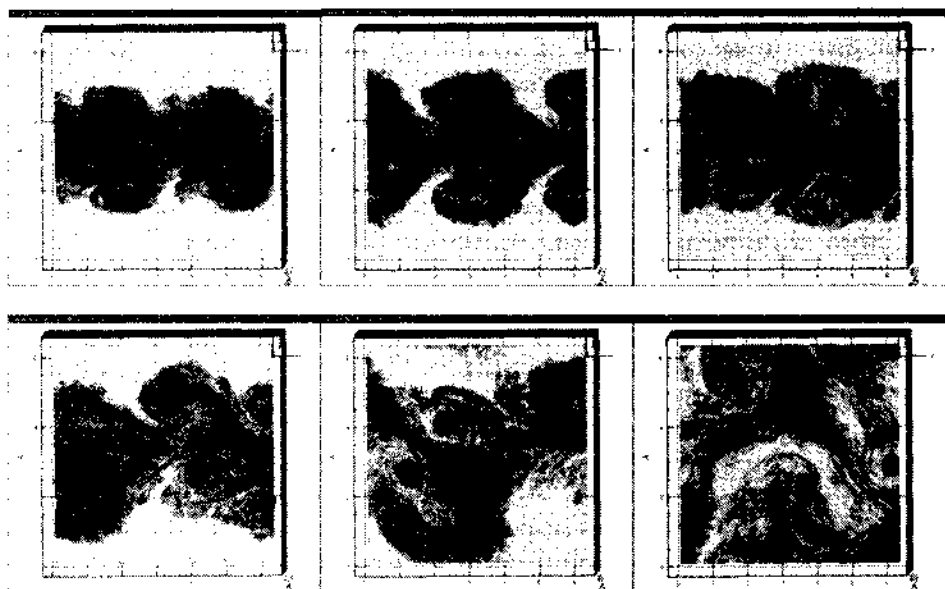


Рис. 4.38. Плоская струя

Турбулизующая решетка

В прямоугольной области с отношением сторон 1:2 рассчитывается течение несжимаемой жидкости с периодическими условиями на горизонтальных границах, заданным давлением на правой границе и заданном «решетчатом» потоке на левой границе. «Решетчатый» поток характеризуется тем, что половина граней границы, расположенных через одну ячейку, непроницаемы, а в промежуточных гранях задается скорость, равная единице. Расчет проводился на сетке (128×256).

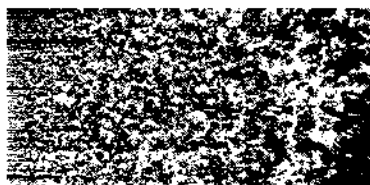


Рис. 4.39а. Трехмерное течение за турбулизующей решеткой (фото из Интернета)

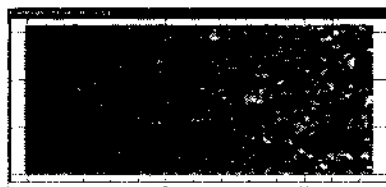


Рис. 4.39б. Двумерный расчет течения за турбулизующей решеткой, выполненный по схеме «КАБАРЕ»

Заключение к главе 4

Переход от одного пространственного измерения к двум для схемы «КАБАРЕ» происходит относительно безболезненно. Наиболее принципиальным моментом является пространственное расщепление уравнения переноса локальных инвариантов Ри-

мана. Вместо «конуса» характеристик [23] выделяется два направления, совпадающих с ориентацией границ прямоугольной расчетной сетки. Для каждого из этих направлений выписывается одномерное характеристическое представление с ненулевыми правыми частями, и этого оказывается достаточно для построения локальных инвариантов и их коррекции в соответствии с принципом максимума. Для уравнений газовой динамики по каждому пространственному направлению формируется четыре инварианта, для несжимаемой жидкости – только два. В обоих случаях касательная составляющая скорости рассматривается как равноправный локальный инвариант.

При переходе к двумерному случаю сохранились все положительные качества одномерной схемы «КАБАРЕ», и появилось новое, связанное с аномально высокой точностью расчета по схеме «КАБАРЕ» стационарных течений, в частности вихревых структур с неподвижной относительно расчетной сетки осью вращения. Как для сжимаемой, так и для несжимаемой жидкости, такие структуры в расчетах могут без заметных изменений существовать очень долго. Можно, видимо, даже говорить об отсутствии проявления на таких структурах аппроксимационной вязкости – своего рода «вычислительной сверхтекучести». Такая трактовка подкрепляется и тем обстоятельством, что при перемещении осей вихревых структур по сетке, диссипативные эффекты проявляются также очень слабо. Это дает основания надеяться, что схема «КАБАРЕ» окажется весьма эффективной при расчетах вихревых и турбулентных течений.

Литература к главе 4

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов // Докл. Акад. наук СССР. – 1954. – 99(1). – С. 27–30.
2. Hirsch C. Numerical Computation of Internal and External Flows // The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. – 2007. – John Wiley & Sons, Ltd.
3. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – М.: МАКС Пресс, 2004. – 332 с.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
5. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987.
6. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // Математическое моделирование. – 2006. – 18(11). – С. 14–30.
7. Colonius T., Lele S.K., Moin P. The scattering of sound waves by a vortex: numerical simulations and analytical solutions // J. Fluid Mech. – 1994. – 260. – С. 271–298.
8. Georges T.M. Acoustic ray paths through a model vortex with a viscous core // J. Acoust. Soc. of America. – 1972. – 51(Part 2). – P. 206–209.
9. Tucker P.G., Karabasov S.A. Unstructured Grid Solution Approach for Eikonal Equation with Acoustics in Mind // International Journal of Aeroacoustics. – 2009. – 8(6). – P. 535–554.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
11. Powell A. Theory of vortex sound. Journal of the Acoustical Society of America. – 1964. – 36(1). – P. 177–195.

12. *Williams J.E.* Hydrodynamic Noise // *Annual Review of Fluid Mechanic.* – 1969. – 1. – P. 197–222.
13. *Koenig M. et al.* Filtering and source imaging for the study of jet noise. AIAA 2010–3779, 16th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference and Exhibit, 2010.
14. *Mitchell B.E., Lele S.K., Moin P.* Direct computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1995. – 285. – P. 181–202.
15. *Tang S.K., Ko N.W.M.* Sound sources in the interactions of two inviscid two-dimensional vortex pairs // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2000. – 419. – P. 177–201.
16. *Eldridge J.D.* The dynamics and acoustics of viscous two-dimensional leapfrogging vortices // *J. Sound Vib.* – 2007. – 301. – P. 74–92.
17. *Inoue O.* Sound generation by the leapfrogging between two coaxial vortex rings. *Physics of Fluids.* – 2002. – 14(9). – P. 3361–3364.
18. *Hicks W.M.* On the Mutual Threading of Vortex Rings. *Proc. R. Soc. London A* 10. – 1922. – 111.
19. *Thompson K.W.* Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems. – II // *J. Comput. Phys.* – 1990. – 89(439).
20. *Karabasov S.A., Goloviznin V.M.* Compact Accurately Boundary-Adjusting High-Resolution Technique for Fluid Dynamics // *J. Comp. Physics.* – 2009. – 228. – P. 7426–7451.
21. *Roache P.J.* *Computational Fluid Dynamics.* – 1972. – Hermosa: Albuquerque.
22. *Al-Lawati M., Wang H.* Preliminary Investigation on an ELLAM Schemes for Linear Transport Equations // *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* – 2003. – 19(1). – P. 22–43.
23. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 607 с.

Моделирование затухания однородной изотропной турбулентности по схеме «КАБАРЕ» в двумерной и трехмерной несжимаемой жидкости

Введение

Большинство движений жидкостей, газов и плазмы, встречающихся в природе и технике, являются турбулентными. Однако, несмотря на интенсивное развитие вычислительной техники и достигнутые успехи в области построения численных методов и разработке соответствующего математического обеспечения, проблема численного моделирования турбулентности остается одной из наиболее сложных и важных проблем механики жидкостей и газов.

С теоретической точки зрения, турбулентные течения представляют собой пример нелинейной механической открытой системы с большим числом степеней свободы. В процессе нелинейного растяжения вихрей происходит передача энергии от крупных вихрей к более мелким вихрям, рассеивающим кинетическую энергию в тепло [1]. Ричардсон впервые ввел представление о существовании в турбулентном потоке иерархии вихрей различного масштаба и о каскадном механизме передачи энергии между ними. Колмогоров дополнил это представление, отметив ослабление ориентирующего влияния среднего течения при каждом переходе к более мелким структурам, и сформулировал гипотезу о том, что статистический режим мелкомасштабной турбулентности является универсальным и определяется лишь двумя размерными параметрами: средней скоростью диссипации кинетической энергии и коэффициентом вязкости. В инерциальной области спектра, на которую вязкость влияние не оказывает, Колмогоров вывел «закон пяти третей», впоследствии неоднократно подтвержденный экспериментами и ставший классическим в теории турбулентности.

Общая методология описания турбулентных течений предложена в работе Рейнольдса (*RANS*) [2–5], согласно которой мгновенные значения искомых функций представляются в виде суммы средней и пульсационной составляющих. Данный подход позволил разрешить поведение средних характеристик турбулентного потока, довольно медленно меняющихся во времени (по сравнению с пульсационной составляющей). Однако в большинстве случаев (например, при высокоскоростном турбулентном течении сжимаемого газа) этот метод неприемлем. Более того, данный подход не позволяет получить решение той или иной задачи в рамках строгой математической постановки, поскольку уравнения, полученные Рейнольдсом, являются незамкнуты-

ми. Проблема замыкания решается на основе введения полуэмпирических моделей турбулентности.

Для описания неустановившихся течений была предложена методика, основанная на пространственном осреднении уравнений Навье – Стокса (*LES*) [6–12]. В *LES*-моделях используется так называемое *SGS*-моделирование (*subgrid-scale*), т. е. подсеточное, смысл которого заключается в том, чтобы в уравнениях оставить масштабы, превосходящие размеры расчетной сетки. Это уменьшает количество степеней свободы до разумной величины и позволяет использовать современную вычислительную технику для определения средних полей течения. Пульсации с подсеточными частотами при этом обрабатываются с помощью того или иного фильтра. Под фильтром здесь подразумевается свертка уравнения Навье – Стокса с неким бесконечно гладким финитным ядром, обладающим определенным внутренним пространственным масштабом. Данная операция также приводит к незамкнутым уравнениям. В простейшей *SGS*-модели роль подсеточных масштабов выполняет искусственно введенный параметр – вихревая вязкость.

Таким образом, в *LES*-методах ошибки дискретизации разностной схемой и ошибки *SGS*-модели связаны друг с другом. Это значит, что усилия по совершенствованию вычислительных моделей турбулентности можно (может быть, даже с большим успехом) сосредоточить на разработке разностных схем для уравнений Навье – Стокса с улучшенными диссипативными и дисперсионными свойствами. Подходы, в которых *SGS*-модели и разностные схемы объединились в одно целое, получили название *ILES*-методов (т. е. неявных *LES*) [13–17]. Одним из способов построения *ILES* является использование нелинейных разностных схем, например, *TVD*-схем с «лимитером». Фльтрация подсеточных пульсаций осуществляется в них неявно при нелинейной коррекции, без введения полуэмпирических моделей. Дальнейшее развитие *TVD*-подхода привело к созданию популярных на данный момент схем *ENO* и *WENO*, которые способны обеспечить достаточную монотонность решения при произвольном порядке точности в областях гладкости.

В методах *ILES* на первый план выходит проблема оптимизации свойств разностных операторов, позволяющих правильно передавать энергетический каскад и согласовано уводить его на подсеточный уровень. Появление *ILES*-методов – это, безусловно, большой шаг в развитии *SGS*-моделирования, однако они не решают ряда существующих проблем (например, задач аэроакустики и случая несжимаемой жидкости). В настоящее время активно разрабатываются альтернативные идеи управления диссипативными потоками. Одна из таких идей реализована в схеме «КАБАРЕ» [18–21]. В ней, как и в методах *ILES*, фильтрация подсеточных пульсаций происходит неявно, за счет прямого действия принципа максимума; причем коррекции подвергаются только потоковые переменные. Результаты моделирования одномерной «бюргуленции» по схеме «КАБАРЕ» [22] имели уникальное свойство: на всех расчетных сетках наклоны энергетических спектров совпадали с теоретическими предсказаниями вплоть до самых высоких гармоник, соответствующих размерам ячеек. То есть увод каскада энергии на подсеточный уровень происходил наиболее оптимально во всех смыслах. Это свойство, связанное с особенностями внутренней диссипации схемы «КАБАРЕ», выгодно выделяет данный алгоритм из класса *LES*-методов и позволяет трактовать его как некое новое направление в *SGS*-моделировании – *Perfect*

LES (PLES). На рисунке 5.1 представлена иллюстрация видов энергетических спектров, полученных при использовании различных численных методов типа *LES*. Максимально возможное волновое число ограничивается размером расчетной сетки, которая при больших числах Рейнольдса не простирается до диссипативного предела. От идеального *LES*-алгоритма следовало бы ждать спектральной характеристики, изображенной на рисунке 5.1г. В этом случае при измельчении расчетной сетки такой идеальный алгоритм приводил бы к поэтапному включению последующих пространственных масштабов турбулентности вплоть до колмогоровского в соответствии с рисунком 5.2.

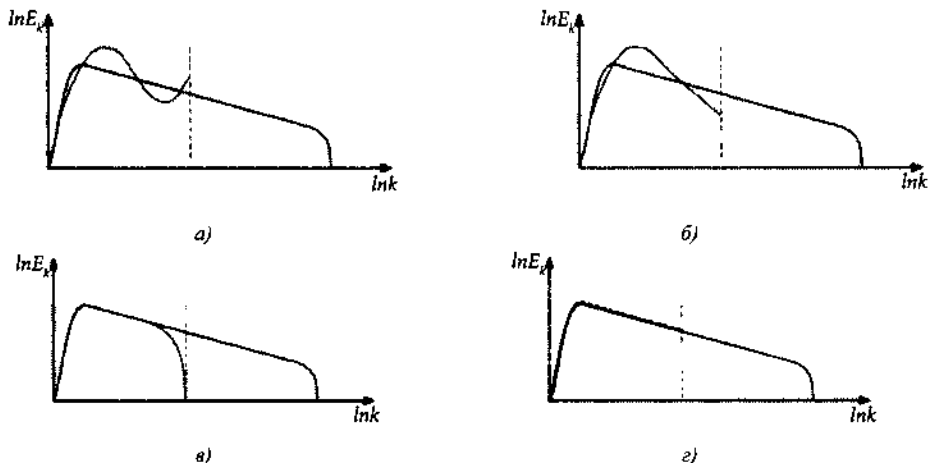


Рис. 5.1. Спектральная плотность кинетической энергии в затухающей однородной изотропной турбулентности, рассчитанная при помощи различных численных методов, в сравнении с теоретически предсказанной спектральной плотностью

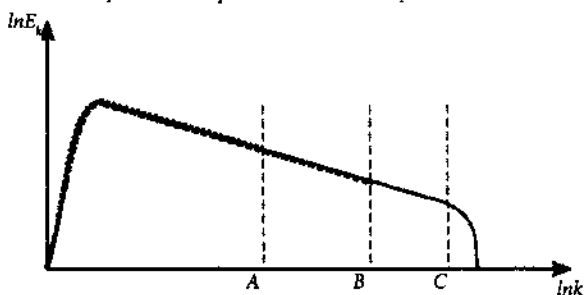


Рис. 5.2. Спектральная плотность кинетической энергии в затухающей однородной изотропной турбулентности, смоделированной при помощи идеального *LES*-алгоритма в сравнении с теоретически предсказанной спектральной плотностью

Данная работа является продолжением работы [22], в которой подробно описан алгоритм «КАБАРЕ» в одномерном случае, и приводятся результаты решения тестовых задач в одномерном и двумерном случае по данной схеме и классическим схемам «Крест», Аракавы, Годунова, Лакса – Вендроффа. Результаты моделирования двумерных вихревых структур по схеме «КАБАРЕ» свидетельствовали о высоком качестве получаемых результатов на очень грубых расчетных сетках. Однако в задаче о за-

тухании однородной изотропной двумерной турбулентности энергетические спектры имели наклон «–4», что заметно расходилось с общепризнанной теорией Бэтчелора («–3»). В настоящей работе удалось преодолеть этот недостаток после введения дополнительной свободы потокам. Причем задача ставилась сразу в трех типах переменных («скорость – давление», «завихренность – функция тока», «завихренность – скорость»), и во всех случаях был получен устойчивый результат «–3» вне зависимости от мелкости разбиения сетки. Кроме этого, проведено обобщение методики «КАБАРЕ» на трехмерный случай. На примерах тестовых задач были исследованы диссипативные и дисперсионные свойства алгоритма, проведен анализ ряда статистических характеристик развитой турбулентности в пространстве и времени.

5.1. Моделирование двумерных турбулентных течений по схеме «КАБАРЕ»

Турбулентность – явление существенно трехмерное, и переход к плоской геометрии приводит к качественным изменениям свойств течений. До недавнего времени вопрос о существовании двумерной турбулентности оставался открытым. Первое экспериментальное подтверждение существования обратного каскада энергии (предложенного теоретически Крайчнаном [23]) было получено в работе Соммерия [24]. Идея эксперимента Соммерия получила развитие в серии работ Табелинга [25–27], посвященных исследованию турбулентности в тонком слое электролита. Некоторые черты двумерной турбулентности имеют и многие крупномасштабные геофизические и астрофизические течения.

Пусть $\hat{u}(\mathbf{k}, t)$ – образы в Фурье пространстве поля скорости $u(\mathbf{r}, t)$. Определим *энергетический спектр (спектр кинетической энергии)* $E(k, t)$ так:

$$E(k, t) = 1/2 \cdot \int_{|\mathbf{k}|} \langle |\hat{u}(\mathbf{k}, t)|^2 \rangle d\mathbf{k}. \quad (5.1)$$

Угловые скобки означают в этом случае осреднение по ансамблю эквивалентных реализаций данного турбулентного течения в фиксированный момент времени t . Таким образом, энергетический спектр характеризует энергию всех гармоник с заданным модулем волнового вектора.

В отличие от классической теории Колмогорова (К41) [28] в двумерной турбулентности имеются две сохраняющиеся квадратичные величины: энергия и энтропия [29], переносимые от одних масштабов к другим, и процессы в турбулентности определяются *скоростью диссипации энергии* $\mathcal{E}$ и *скоростью диссипации энтропии* $\mathcal{E}_\omega$. При этом потоки энергии и энтропии направлены к противоположным концам энергетического спектра (прямой каскад энтропии и обратный – энергии), что приводит к образованию крупномасштабных двумерных вихревых структур. Подробнее эффекты плоских турбулентных течений изложены в работах [30–35].

При сохранении в каскаде вихрей скорости диссипации энтропии размерностный анализ [29] приводит к спектральному распределению вида:

$$E(k) \sim \varepsilon_\omega^{2/3} k^{-3}. \quad (5.2)$$

Помимо изучения спектральных свойств при статистическом исследовании турбулентности часто рассматривают *структурные функции*, характеризующие степень корреляции пульсаций скоростей в зависимости от масштаба в обычном физическом пространстве [29]:

$$S_q(l) = \left\langle \left| (\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}), \mathbf{l}/l) \right|^q \right\rangle, \quad (5.3)$$

где усреднение проводится по всем точкам пространства $\mathbf{r}$ и всем векторам с модулем l . Данные функции показывают зависимость величины пульсации скорости в различных точках пространства от расстояния между ними.

В двумерном случае наклоны структурных функций соответствуют закону, следующему из теории размерностей:

$$S_q(l) \sim \varepsilon_\omega^{q/3} l^q, \quad (5.4)$$

где $S_q(l)$ – структурная функция порядка q ; ε_ω – скорость диссипации энтропии с единицы площади в единицу времени; l – расстояние между точками, в которых рассматривается пульсация скорости.

В данном разделе для моделирования двумерных вихревых течений в несжимаемой жидкости предложено три алгоритма на основе «КАБАРЕ», использующих для описания движения наборы переменных «скорость – давление», «завихренность – скорость» и «завихренность – функция тока» [36]. Для приведенных алгоритмов проведено исследование их дисперсионных и диссипативных свойств на примере задачи об эволюции неподвижного и движущегося изолированного вихря в двумерной прямоугольной области с периодическими граничными условиями. Показано, что приведенные модификации схемы «КАБАРЕ» обладают лучшими по сравнению с классической схемой Аракавы [37–38] трансляционными свойствами. При помощи всех трех алгоритмов на сетках различной густоты проведено моделирование затухания однородной изотропной турбулентности. Рассмотрен вопрос о формировании в ней энергетического каскада. Исследованы статистические свойства турбулентности (энергетические спектры и структурные функции). Обнаружено хорошее соответствие полученных результатов с теорией Батчелора.

5.1.1. Уравнения движения

Переменные «скорость – давление»

Движение идеальной жидкости описывается уравнением Эйлера и уравнением непрерывности:

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p / \rho, \quad (5.5)$$

$$(\nabla \mathbf{u}) = 0, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{u}$, ρ , p – скорость, плотность и давление жидкости соответственно.

Переменные «завихренность – скорость»

Взяв ротор от обеих частей уравнения Эйлера, получим трехмерное уравнение переноса завихренности ω :

$$\partial\omega/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\omega = -(\omega\nabla)\mathbf{u}, \quad (5.7)$$

$$\omega = [\nabla\mathbf{u}]. \quad (5.8)$$

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (5.7):

$$[\nabla\omega] = [\nabla[\nabla\mathbf{u}]], \quad (5.9)$$

$$[\nabla\omega] = \nabla(\nabla\mathbf{u}) - \Delta\mathbf{u}. \quad (5.10)$$

С учетом уравнения неразрывности (5.6) получим:

$$\Delta\mathbf{u} = -[\nabla\omega]. \quad (5.11)$$

Учитывая, что для плоских течений $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ и $\omega = (0, 0, \omega)$, получим систему уравнений движения двумерной несжимаемой жидкости в переменных «завихренность – скорость»:

$$\partial\omega/\partial t + u\partial\omega/\partial x + v\partial\omega/\partial y = 0, \quad (5.12)$$

$$\Delta u = -\partial\omega/\partial y \quad \Delta v = \partial\omega/\partial x, \quad (5.13)$$

$$\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y. \quad (5.14)$$

Переменные «завихренность – функция тока»

Введем скалярную функцию ψ , такую, что $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, называемую функцией тока, и, используя ранее описанное понятие завихренности ω , получим новую форму записи уравнений движения несжимаемой жидкости:

$$\partial\omega/\partial t + u\partial\omega/\partial x + v\partial\omega/\partial y = 0, \quad (5.15)$$

$$\Delta\psi = -\omega, \quad (5.16)$$

$$u = \partial\psi/\partial y \quad v = -\partial\psi/\partial x. \quad (5.17)$$

5.1.2. Численный алгоритм

Аппроксимация проводится на равномерной ортогональной пространственной сетке с шагами h_x и h_y вдоль соответствующих координатных осей.

Характерной особенностью схемы «КАБАРЕ» является использование так называемых консервативных и потоковых переменных. Под консервативными понимаются переменные, отвечающие за значение того или иного свойства течения в центрах расчетных ячеек. Под потоковыми понимаются переменные, относящиеся к центрам граней расчетных ячеек и отвечающие за перенос тех или иных свойств течения из

одной ячейки в другую. Также используются переменные, отнесенные к узлам расчетной сетки.

Для обозначения точки, которой соответствует та или иная переменная, введены следующие обозначения: L, C, R, CR, RR – *left, center, right, center right, right right* и т. д. Индексы C, CR, CL, CT, CB используются для обозначения консервативных переменных в центральной, правой, левой, верхней и нижней ячейках соответственно. Индексы $LL, L, R, RR, BB, B, T, TT$ используются для обозначения потоковых переменных на соответствующих гранях ячеек. Данная система обозначений наглядно изображена на рисунке 5.3.

Схема «КАБАРЕ» является двухслойной: n (первоначальный слой), $n+1$ (новый слой). Дополнительно используется вспомогательный $n+1/2$ слой. Каждый тип переменных, относящийся к тому или иному временному слою, обозначается соответствующим верхним индексом.

Начальные условия задаются в узлах расчетной сетки, после чего проводится их линейная интерполяция в центры расчетных ячеек и в центры их граней.

Для каждого используемого комплекта переменных алгоритм вычислений разбит на несколько последовательных шагов. У всех алгоритмов есть как общие неотъемлемые элементы (вычисление консервативных переменных на полуделом временном слое, расчет потоковых переменных на новом временном слое и их коррекция, вычисление консервативных переменных на новом временном слое, расчет шага по времени), так и частные, наличие которых обусловлено особенностями того или иного комплекта переменных. Далее подробно описан каждый исследованный вычислительный алгоритм.

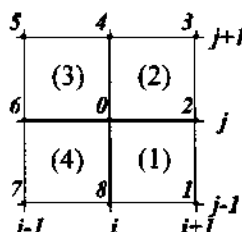
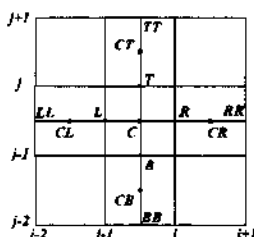


Рис. 5.3. Шаблон для двумерной схемы «КАБАРЕ»

Рис. 5.4. Шаблон для решения двумерного уравнения Пуассона

Переменные «скорость – давление»

Шаг первый

На этом этапе рассчитываются промежуточные (отмеченные тильдой) скорости без учета давления:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}_C^{n+1/2} - u_C^n}{\tau/2} + \frac{(u_R^n)^2 - (u_L^n)^2}{h_x} + \frac{u_T^n v_T^n - u_B^n v_B^n}{h_y} = 0 \\ \frac{\tilde{v}_C^{n+1/2} - v_C^n}{\tau/2} + \frac{v_R^n u_R^n - v_L^n u_L^n}{h_x} + \frac{(v_T^n)^2 - (v_B^n)^2}{h_y} = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

Шаг второй

Находим давление на промежуточном временном слое и производим коррекцию консервативных скоростей:

$$\begin{cases} \frac{u_C^{n+1/2} - \tilde{u}_C^{n+1/2}}{\tau/2} = -\nabla_x P^{n+1/2} \\ \frac{v_C^{n+1/2} - \tilde{v}_C^{n+1/2}}{\tau/2} = -\nabla_y P^{n+1/2} \end{cases} \quad (5.19)$$

Систему (5.19) можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{u}_C^{n+1/2} = \tilde{\mathbf{u}}_C^{n+1/2} - \frac{2}{\tau} \nabla_h P^{n+1/2}, \quad (5.20)$$

где $\mathbf{u}_C = (u_C, v_C)$, оператор ∇_h обозначает разностный аналог градиента. Численно возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (5.20)

$$\operatorname{div}_h(\mathbf{u}_C^{n+1/2}) = \operatorname{div}_h(\tilde{\mathbf{u}}_C^{n+1/2}) - \frac{2}{\tau} \Delta_h P^{n+1/2} \quad (5.21)$$

и приравняем левую часть полученного равенства к нулю, что соответствует соленоидальности поля консервативных скоростей. Получим уравнение Пуассона, решением которого будет значение давления на промежуточном временном слое:

$$\Delta_h P^{n+1/2} = \frac{\tau}{2} \operatorname{div}_h(\tilde{\mathbf{u}}_C^{n+1/2}). \quad (5.22)$$

Оператор Δ_h соответствует 9-точечной аппроксимации лапласиана. Из полученного поля давления при помощи формул (5.19) найдем скорости на промежуточном временном слое.

Шаг третий

Вычисление и коррекция потоковых скоростей на новом временном слое. Нескорректированные потоковые скорости вычисляются по следующему алгоритму:

$$\tilde{u}_R^{n+1} = \begin{cases} 2 \cdot u_C^{n+1/2} - u_L^n, u_C^n > 0, u_{CR}^n > 0 \\ 2 \cdot u_{CR}^{n+1/2} - u_{RR}^n, u_C^n < 0, u_{CR}^n < 0 \\ 2u_C^{n+1/2} - u_L^{n+1/2}, u_C^n < 0, u_{CR}^n > 0, \left| u_C^{n+1/2} - \frac{u_L^n}{2} \right| \geq \left| u_{CR}^{n+1/2} - \frac{u_{RR}^n}{2} \right|, \\ 2u_{CR}^{n+1/2} - u_{RR}^{n+1/2}, u_C^n < 0, u_{CR}^n > 0, \left| u_C^{n+1/2} - \frac{u_L^n}{2} \right| < \left| u_{CR}^{n+1/2} - \frac{u_{RR}^n}{2} \right| \\ 0, u_C^n < 0, u_{CR}^n > 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\tilde{v}_R^{n+1} = \begin{cases} 2 \cdot v_C^{n+1/2} - v_L^n, u_C^n > 0, u_{CR}^n > 0 \\ 2 \cdot v_{CR}^{n+1/2} - v_{RR}^n, u_C^n < 0, u_{CR}^n < 0 \\ 2v_C^{n+1/2} - v_L^{n+1/2}, u_C^n < 0, u_{CR}^n > 0, \left| u_C^{n+1/2} - \frac{u_L^n}{2} \right| \geq \left| u_{CR}^{n+1/2} - \frac{u_{RR}^n}{2} \right| \\ 2v_{CR}^{n+1/2} - v_{RR}^{n+1/2}, u_C^n < 0, u_{CR}^n > 0, \left| u_C^{n+1/2} - \frac{u_L^n}{2} \right| < \left| u_{CR}^{n+1/2} - \frac{u_{RR}^n}{2} \right| \\ \tilde{v}_R^n, u_C^n < 0, u_{CR}^n > 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

Согласно принципу максимума, минимумы и максимумы потоковой скорости в пределах одной вычислительной ячейки можно оценить следующим образом.

Если $u_{CR}^n < 0$, то для правой ячейки

$$\begin{aligned} [\max(u)]_R &= \max(u_R^n, u_{CR}^n, u_{RR}^n) + \tau Q_R, \\ [\min(u)]_R &= \min(u_R^n, u_{CR}^n, u_{RR}^n) + \tau Q_R, \\ Q_R &= \frac{u_{CR}^{n+1/2} - u_{CR}^n}{\tau/2} + \frac{u_{CR}^n \cdot (u_{RR}^n - u_R^n)}{h_x}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Аналогично, если $u_C^n > 0$, то для левой ячейки

$$\begin{aligned} [\max(u)]_L &= \max(u_L^n, u_C^n, u_R^n) + \tau Q_L, \\ [\min(u)]_L &= \min(u_L^n, u_C^n, u_R^n) + \tau Q_L, \\ Q_L &= \frac{u_C^{n+1/2} - u_C^n}{\tau/2} + \frac{u_C^n \cdot (u_R^n - u_L^n)}{h_x}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Для управления коррекцией потоков в схеме «КАБАРЕ» введем скалярный безразмерный параметр ξ :

$$\begin{aligned} [\max(u)]_{\xi R} &= [\max(u)]_R + \xi \cdot ([\max(u)]_R - [\min(u)]_R), \\ [\min(u)]_{\xi R} &= [\min(u)]_R - \xi \cdot ([\max(u)]_R - [\min(u)]_R), \\ [\max(u)]_{\xi L} &= [\max(u)]_L + \xi \cdot ([\max(u)]_L - [\min(u)]_L), \\ [\min(u)]_{\xi L} &= [\min(u)]_L - \xi \cdot ([\max(u)]_L - [\min(u)]_L). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Коррекция потоковых скоростей при $u_{CR}^n < 0$ производится следующим образом:

$$u_R^{n+1} = \begin{cases} \tilde{u}_R^{n+1}, [\min(u)]_{\xi R} < \tilde{u}_R^{n+1} < [\max(u)]_{\xi R} \\ [\min(u)]_{\xi R}, \tilde{u}_R^{n+1} < [\min(u)]_{\xi R} \\ [\max(u)]_{\xi R}, [\max(u)]_{\xi R} < \tilde{u}_R^{n+1} \end{cases} \quad (5.28)$$

Аналогично при $u_{CR}^n > 0$:

$$u_R^{n+1} = \begin{cases} \tilde{u}_R^{n+1}, [\min(u)]_{\xi L} < \tilde{u}_R^{n+1} < [\max(u)]_{\xi L} \\ [\min(u)]_{\xi L}, \tilde{u}_R^{n+1} < [\min(u)]_{\xi L} \\ [\max(u)]_{\xi L}, [\max(u)]_{\xi L} < \tilde{u}_R^{n+1} \end{cases} \quad (5.29)$$

Шаг четвертый

Проводится процедура, представляющая собой получение соленоидального (в дискретном смысле) поля скоростей из нескорректированных скоростей, полученных в предыдущем шаге численного алгоритма, то есть происходит преобразование $\mathbf{u}_h \rightarrow \mathbf{u}_h^*$, где знаком $*$ обозначены соленоидальные скорости.

Поскольку любое дивергентное поле определяется с точностью до сеточного ротора, то в качестве дополнительного требования обычно налагают условие минимальности квадратичного отклонения скорректированного поля от исходного. Такая постановка приводит к задаче поиска условного минимума функционала:

$$\Phi(\mathbf{u}_h^*, \lambda) = \sum_{k \in \Omega} (\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}_h)_k^2 \cdot g_k + \sum_{m \in \Omega^*} \lambda_m \cdot \left\{ \operatorname{div}_h(\mathbf{u}_h^*) \right\}_m \cdot \Delta S_m, \quad (5.30)$$

где λ_m – множители Лагранжа, Ω^* – множество всех узлов сетки и всех центров расчетных ячеек, а $g_k > 0$ и $\Delta S_m > 0$ – так называемые геометрические факторы. Необходимое условие минимума приводит к следующему уравнению:

$$\mathbf{u}_{(k)}^* = \mathbf{u}_{(k)} - \{ \nabla \lambda \}_{(k)}. \quad (5.31)$$

Поддействовав оператором div_h на обе части уравнения (5.31) и потребовав, чтобы $\operatorname{div}_h(\mathbf{u}_h^*) = 0$, получим:

$$\Delta_h \lambda = \operatorname{div}_h(\mathbf{u}_{(k)}). \quad (5.32)$$

Множители Лагранжа описывают силу реакции системы на нарушение условия несжимаемости. В данном случае оператор Δ_h является 5-точечной аппроксимацией лапласиана. Разрешив уравнение (5.32) относительно множителей Лагранжа, находим дивергентное поле потоковых скоростей по формуле (5.31). Описанная процедура называется соленоидацией поля скоростей.

Шаг пятый

На последнем этапе находим поле консервативных скоростей на новом слое по времени:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{u_C^{n+1} - u_C^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{(u_R^{n+1})^2 - (u_L^{n+1})^2}{h_x} + \frac{(u_T^{n+1} v_T^{n+1} - u_B^{n+1} v_B^{n+1})}{h_y} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{(u_R^n)^2 - (u_L^n)^2}{h_x} + \frac{(u_T^n v_T^n - u_B^n v_B^n)}{h_y} \right) = -\nabla_x P^{n+1/2} \\ & \frac{v_C^{n+1} - v_C^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{(v_R^{n+1} u_R^{n+1} - v_L^{n+1} u_L^{n+1})}{h_x} + \frac{((v_T^{n+1})^2 - (v_B^{n+1})^2)}{h_y} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{(v_R^n u_R^n - v_L^n u_L^n)}{h_x} + \frac{((v_T^n)^2 - (v_B^n)^2)}{h_y} \right) = -\nabla_y P^{n+1/2}. \end{aligned} \right. \quad (5.33)$$

В завершение алгоритма найдем шаг по времени на новом временном слое из условия Куранта – Фридриха – Леви:

$$\tau^{n+1} = \min \left\{ \frac{CFL \cdot h_x}{\max_{u_i \in G} (|u^{n+1}|)}, \frac{CFL \cdot h_y}{\max_{v_i \in G} (|v^{n+1}|)} \right\}, \quad (5.34)$$

где G – расчетная область.

Переменные «завихренность – скорость»

Данный алгоритм отличается от описанного выше отсутствием процедуры соленизации поля скоростей, вместо которой производится численное решение уравнений Пуассона (5.13), также дающее на выходе соленидальное поле скоростей.

Шаг первый

В данном шаге производится расчет консервативных завихренностей на промежуточном временном слое по явной разностной схеме второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени:

$$\frac{\omega_C^{n+1/2} - \omega_C^n}{\tau/2} + \frac{u_R^n \omega_R^n - u_L^n \omega_L^n}{h_x} + \frac{v_T^n \omega_T^n - v_B^n \omega_B^n}{h_y} = 0. \quad (5.35)$$

Шаг второй

Шаг состоит в нахождении узловых скоростей на слое $n+1/2$, получаемых при численном решении уравнений Пуассона (5.13). Для дискретизации оператора Лапласа применяется девятиточечный шаблон, представленный на рисунке 2.2:

$$\partial^2 u / \partial x^2 = ((u_3 - 2u_4 + u_5) + 2 \cdot (u_2 - 2u_0 + u_6) + (u_1 - 2u_7 + u_8))^{n+1/2} / (4 \cdot h_x^2), \quad (5.36)$$

$$\partial^2 u / \partial y^2 = ((u_3 - 2u_2 + u_1) + 2 \cdot (u_4 - 2u_0 + u_8) + (u_5 - 2u_6 + u_7))^{n+1/2} / (4 \cdot h_y^2), \quad (5.37)$$

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2. \quad (5.38)$$

Для дискретизации правых частей уравнений (5.9) используются консервативные завихренности, полученные в первом шаге алгоритма:

$$\partial \omega / \partial y = (\omega_{(2)}^{n+1/2} - \omega_{(1)}^{n+1/2} + \omega_{(3)}^{n+1/2} - \omega_{(4)}^{n+1/2}) / (2 \cdot h_y), \quad (5.39)$$

$$\partial \omega / \partial x = (\omega_{(2)}^{n+1/2} - \omega_{(3)}^{n+1/2} + \omega_{(1)}^{n+1/2} - \omega_{(4)}^{n+1/2}) / (2 \cdot h_x). \quad (5.40)$$

Для решения полученных дискретных аналогов уравнений (5.13) применяется быстрое преобразование Фурье.

Шаг третий

Шаг состоит в вычислении и коррекции потоковых завихренностей на новом временном слое в соответствии с принципом максимума. Вычисление завихренностей производится по следующему алгоритму:

$$\tilde{\omega}_R^{n+1} = \begin{cases} 2 \cdot \omega_C^{n+1/2} - \omega_L^n, u_L^n + u_R^n > 0, u_R^n + u_{RR}^n > 0 \\ 2 \cdot \omega_{CR}^{n+1/2} - \omega_{RR}^n, u_L^n + u_R^n < 0, u_R^n + u_{RR}^n < 0 \\ \omega_C^{n+1/2} - \omega_L^n / 2 + \omega_{CR}^{n+1/2} - \omega_{RR}^n / 2, u_L^n + u_R^n > 0, u_R^n + u_{RR}^n < 0 \\ 0, u_L^n + u_R^n < 0, u_R^n + u_{RR}^n > 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

За вычислением потоковых завихренностей следует их коррекция в соответствии с принципом максимума [3]. Алгоритм коррекции изложен далее.

Минимумы и максимумы завихренности в точке R (рис. 5.3) можно оценить следующим образом.

Если $u_R^n + u_L^n < 0$, $u_R^n + u_{RR}^n < 0$, то

$$[\max(\omega)]_R = \max(\omega_R^n, \omega_{CR}^n, \omega_{RR}^n) + \tau Q_R,$$

$$[\min(\omega)]_R = \min(\omega_R^n, \omega_{CR}^n, \omega_{RR}^n) + \tau Q_R,$$

$$Q_R = \frac{\omega_{CR}^{n+1/2} - \omega_{CR}^n}{\tau / 2} + \frac{(u_{RR}^n + u_R^n)(\omega_{RR}^n - \omega_R^n)}{2h_x}. \quad (5.42)$$

Иначе, если $u_R^n + u_L^n > 0$, $u_R^n + u_{RR}^n > 0$, то

$$[\max(\omega)]_R = \max(\omega_L^n, \omega_C^n, \omega_R^n) + \tau Q_L, \quad (5.43)$$

$$[\min(\omega)]_R = \min(\omega_L^n, \omega_C^n, \omega_R^n) + \tau Q_L,$$

$$Q_L = \frac{\omega_C^{n+1/2} - \omega_C^n}{\tau/2} + \frac{(u_R^n + u_L^n)(\omega_R^n - \omega_L^n)}{2h_x}.$$

В оригинальный алгоритм коррекции вводится настроечный параметр $\xi > 0$, определяющий ширину зоны коррекции потоковых завихренностей. Данный параметр позволяет регулировать диссипативные и дисперсионные свойства схемы «КАБАРЕ». Изменение максимальных и минимальных значений потоковых завихренностей на новом временном слое осуществляется следующим образом:

$$\begin{cases} [\max(u)]_{\xi R} = [\max(u)]_R + \xi \cdot ([\max(u)]_R - [\min(u)]_R) \\ [\min(u)]_{\xi R} = [\min(u)]_R - \xi \cdot ([\max(u)]_R - [\min(u)]_R) \end{cases} \quad (5.44)$$

Коррекция потоковых завихренностей при $u_R^n + u_L^n < 0$, $u_R^n + u_{RR}^n < 0$:

$$\omega_R^{n+1} = \begin{cases} \tilde{\omega}_R^{n+1}, [\min(\omega)]_{\xi R} < \tilde{\omega}_R^{n+1} < [\max(\omega)]_{\xi R} \\ [\min(\omega)]_{\xi R}, \tilde{\omega}_R^{n+1} < [\min(\omega)]_{\xi R} \\ [\max(\omega)]_{\xi R}, [\max(\omega)]_{\xi R} < \tilde{\omega}_R^{n+1} \end{cases} \quad (5.45)$$

Иначе, если $u_R^n + u_L^n > 0$, $u_R^n + u_{RR}^n > 0$, то

$$\omega_R^{n+1} = \begin{cases} \tilde{\omega}_R^{n+1}, [\min(\omega)]_{\xi R} < \tilde{\omega}_R^{n+1} < [\max(\omega)]_{\xi R} \\ [\min(\omega)]_{\xi R}, \tilde{\omega}_R^{n+1} < [\min(\omega)]_{\xi L} \\ [\max(\omega)]_{\xi R}, [\max(\omega)]_{\xi L} < \tilde{\omega}_R^{n+1} \end{cases} \quad (5.46)$$

Коррекция потоковых завихренностей в точках L , T , B (рис. 5.3), производится аналогичным способом.

Шаг четвертый

Шаг заключается в вычислении консервативных переменных на новом временном слое:

$$\frac{\omega_C^{n+1} - \omega_C^n}{\tau} + \frac{\bar{u}_R \bar{\omega}_R - \bar{u}_L \bar{\omega}_L}{h_x} + \frac{\bar{u}_T \bar{\omega}_T - \bar{u}_B \bar{\omega}_B}{h_y} = 0, \quad (5.47)$$

где $\bar{u}_f = u_f^{n+1/2}$, $\bar{v}_f = v_f^{n+1/2}$, $\bar{\omega}_f = (\omega_f^n + \omega_f^{n+1})/2$.

В завершение алгоритма по формуле (5.34) рассчитывается шаг по времени на будущем временном слое.

Переменные «завихренность – функция тока»

Данный алгоритм, в отличие от предыдущего, требует численного решения всего одного уравнения Пуассона за один шаг по времени, что обусловлено особенностями переменных «завихренность – функция тока».

Шаг первый

В первом шаге по явной разностной схеме, имеющей первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространству, вычисляются консервативные переменные на $n + 1/2$ временном слое:

$$\frac{\omega_C^{n+1/2} - \omega_C^n}{\tau/2} + \frac{u_R^n \omega_R^n - u_L^n \omega_L^n}{h_x} + \frac{v_T^n \omega_T^n - v_B^n \omega_B^n}{h_y} = 0. \quad (5.48)$$

На рисунке 5.3 изображен шаблон схемы «КАБАРЕ» для первого и четвертого шагов алгоритма; жирными точками отмечены центры ячеек и граней и показаны их обозначения.

Шаг второй

На этом шаге находятся потоковые переменные на новом временном слое последовательно для вертикальных и горизонтальных граней. Опишем алгоритм для вертикальных граней (для горизонтальных граней процедура выполняется аналогично). Новые значения потоковых завихренностей найдем с помощью линейной экстраполяции, направление которой будет определяться скоростями на гранях L, R, RR :

$$\tilde{\omega}_R^{n+1} = \begin{cases} 2 \cdot \omega_C^{n+1/2} - \omega_L^n, & u_R^n \geq 0 \\ 2 \cdot \omega_{CR}^{n+1/2} - \omega_{RR}^n, & u_R^n < 0 \end{cases}. \quad (5.49)$$

Далее следует процедура нелинейной коррекции потоков, основанная на принципе максимума.

Минимумы и максимумы завихренностей можно оценить следующим образом. Если $u_R^n < 0$, то для правой ячейки

$$\begin{aligned} [\max(\omega)]_R &= \max(\omega_R^n, \omega_{CR}^n, \omega_{RR}^n) + \tau Q_R, \\ [\min(\omega)]_R &= \min(\omega_R^n, \omega_{CR}^n, \omega_{RR}^n) + \tau Q_R, \\ Q_R &= \frac{\omega_{CR}^{n+1/2} - \omega_{CR}^n}{\tau/2} + \frac{(u_R^n + u_{RR}^n)(\omega_{RR}^n - \omega_R^n)}{2h_x}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Аналогично, если $u_R^n \geq 0$, то для левой ячейки

$$\begin{aligned}
[\max(\omega)]_L &= \max(\omega_L^n, \omega_C^n, \omega_R^n) + \tau Q_L, \\
[\min(\omega)]_L &= \min(\omega_L^n, \omega_C^n, \omega_R^n) + \tau Q_L, \\
Q_L &= \frac{\omega_C^{n+1/2} - \omega_C^n}{\tau/2} + \frac{(u_L^n + u_R^n)(\omega_R^n - \omega_L^n)}{2h_x}.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Здесь дополнительное слагаемое Q_R (Q_L) характеризует изменение завихренности в соответствующей ячейке за счет «сноса» в перпендикулярном направлении (вдоль оси y) и диффузионного «расплывания» за время τ .

Коррекция потоковых величин при $u_R^n < 0$ производится следующим образом:

$$\omega_R^{n+1} = \begin{cases} \tilde{\omega}_R^{n+1}, [\min(\omega)]_{\xi R} < \tilde{\omega}_R^{n+1} < [\max(\omega)]_{\xi R} \\ [\min(\omega)]_{\xi R}, \tilde{\omega}_R^{n+1} < [\min(\omega)]_{\xi R} \\ [\max(\omega)]_{\xi R}, [\max(\omega)]_{\xi R} < \tilde{\omega}_R^{n+1} \end{cases}. \tag{5.52}$$

Аналогично при $u_R^n \geq 0$

$$\omega_R^{n+1} = \begin{cases} \tilde{\omega}_R^{n+1}, [\min(\omega)]_{\xi L} < \tilde{\omega}_R^{n+1} < [\max(\omega)]_{\xi L} \\ [\min(\omega)]_{\xi L}, \tilde{\omega}_R^{n+1} < [\min(\omega)]_{\xi L} \\ [\max(\omega)]_{\xi L}, [\max(\omega)]_{\xi L} < \tilde{\omega}_R^{n+1} \end{cases}. \tag{5.53}$$

Шаг третий

На этом этапе рассчитываются потоковые скорости на новом слое по времени. Для этого нужно решить уравнение Пуассона с уже известной правой частью относительно неизвестной функции тока.

Будем маркировать индексами 02, 04, 06, 08 потоковые переменные на новом временном слое, заданные в центрах граней расчетных ячеек (рис. 5.4). Завихренность в узле 0 будем аппроксимировать следующим образом:

$$\omega_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \frac{v_{02} - v_{06}}{h_x} - \frac{u_{04} - u_{08}}{h_y}. \tag{5.54}$$

Для скоростей на вертикальных гранях (например, для грани 08) можно записать

$$u_{08} = \frac{\psi_0 - \psi_8}{h_y}. \tag{5.55}$$

Аналогично для горизонтальных граней (например, для грани 02)

$$v_{02} = -\frac{\psi_2 - \psi_0}{h_x}. \tag{5.56}$$

Завихренность в узле 0 находим по значениям потоковых завихренностей в прилегающих ячейках:

$$\omega_0 = \{\omega_{02} + \omega_{04} + \omega_{06} + \omega_{08}\}^{n+1}/4. \quad (5.57)$$

Подставляя (5.55), (5.56) и (5.57) в (5.54), получаем пятиточечную аппроксимацию лапласиана:

$$\left(\frac{\psi_2 - 2\psi_0 + \psi_6}{h_x^2} + \frac{\psi_4 - 2\psi_0 + \psi_8}{h_y^2} \right) = - \frac{\{\omega_{02} + \omega_{04} + \omega_{06} + \omega_{08}\}^{n+1}}{4}. \quad (5.58)$$

Далее по найденным значениям функции тока ψ согласно формулам (5.55), (5.56) рассчитаем поле скоростей на новом временном слое.

Шаг четвертый

В последней фазе алгоритма находятся значения консервативных завихренностей на новом временном слое. Для этого воспользуемся явной консервативной разностной схемой, обладающей вторым порядком аппроксимации по пространству и времени:

$$\frac{\omega_c^{n+1} - \omega_c^n}{\tau} + \frac{\bar{u}_R \bar{\omega}_R - \bar{u}_L \bar{\omega}_L}{h_x} + \frac{\bar{v}_T \bar{\omega}_T - \bar{v}_B \bar{\omega}_B}{h_y} = 0, \quad (5.59)$$

где $\bar{u} = (u^{n+1} + u^n)/2$, $\bar{\omega} = (\omega^{n+1} + \omega^n)/2$.

Новый шаг по времени, как и в предыдущих случаях, рассчитывается по формуле (5.34).

5.1.3. Примеры расчетов

Задача о неподвижном изолированном вихре

Свойства предложенных численных алгоритмов можно наглядно проиллюстрировать на примере задачи об одиночном (изолированном) вихре [37]. Зададим скорость движения жидкости в полярной системе координат с центром в точке $(x_0, y_0) = (\pi, \pi)$:

$$\begin{cases} u_r(r, \varphi) = \alpha \cdot f(r_\sigma) \cdot \exp[\beta(1 - r_\sigma^2)], & r_\sigma = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} / \sigma, \\ u_\varphi(r, \varphi) = 0 \end{cases} \quad (5.60)$$

где $f(r_\sigma) = r_\sigma$. Полученные скорости проецируются на прямоугольную систему координат. По проекциям скоростей, в свою очередь, в расчетной области строится поле завихренности. Вихрь представляет собой центрально-симметричную структуру, амплитуда которой определяется параметром α , а форма – параметрами β и σ .

Параметры $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,3$, $\sigma = 0,5$ выбраны из следующих соображений. Во-первых, для достаточного разрешения по пространству вихрь должен занимать значительное количество ячеек расчетной сетки, во-вторых, для исключения взаимодействия вихря с границей расчетной области завихренность и скорость должны стремиться на ней к нулю.

Введем величину, характеризующую среднюю частоту вращения жидкости в вихре:

$$\bar{\nu} = 1/\pi \cdot \int_0^{\pi} \nu(r) dr, \quad (5.61)$$

где $\nu(r) = u_\tau(r, \varphi)/r$ – линейная частота вращения слоев жидкости в зависимости от их расстояния до центра вихря.

Эффективным периодом обращения вихря будем называть следующую величину:

$$T_0 = \bar{\nu}^{-1}. \quad (5.62)$$

При заданных параметрах вихревого течения $T_0 \approx 5,6$.

В непрерывной постановке задачи вихрь будет оставаться неподвижным и сохранять свою форму во времени. При этом сохраняются интегральные характеристики, такие как полная кинетическая энергия и энтропия. При численном расчете эволюции вихря сохранение данных свойств (консервативности по энергии и энтропии, неизменность формы вихря) позволяет судить о качестве используемого алгоритма решения.

Решение проводится в прямоугольной области $G = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, на которой введена равномерная ортогональная пространственная сетка с количеством ячеек $N_x = N_y = 32$.

Шаг сетки вдоль соответствующих координатных осей равен $h_x = 2\pi/N_x$, $h_y = 2\pi/N_y$. Граничные условия периодические. Число Куранта $CFL = 0,3$. Характерный радиус вихря составляет 10 ячеек расчетной сетки. В данной работе приведены результаты численного эксперимента, в котором использовалось обобщение схемы «КАБАРЕ» на случай переменных «скорость – завихренность», результаты моделирования в случае использования других комплектов переменных («скорость – давление», «завихренность – функция тока») полностью аналогичны нижеприведенным. Результаты расчета по схеме «КАБАРЕ» сравниваются с аналогичными, полученными при помощи схемы Аракавы.

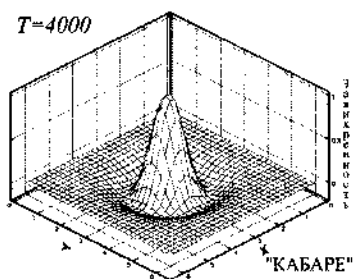


Рис. 5.5а. Моделирование неподвижного одиночного вихря. Эволюция вихря на моменты времени $T = 4000$. Сетка «КАБАРЕ». Сетка 32×32 . $CFL = 0,3$

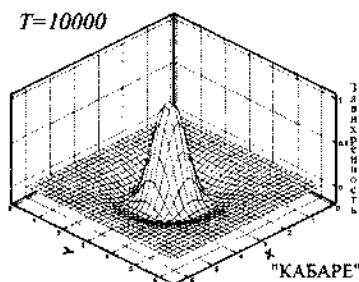


Рис. 5.5б. Моделирование неподвижного одиночного вихря. Эволюция вихря на моменты времени $T = 10000$. Сетка «КАБАРЕ». Сетка 32×32 . $CFL = 0,3$

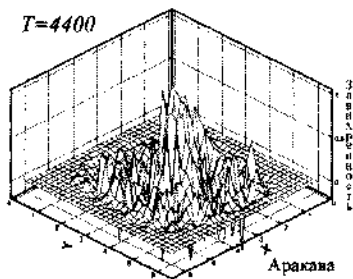
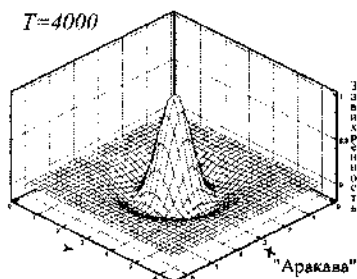


Рис. 5.5в. Моделирование неподвижного одиночного вихря. Эволюция вихря на моменты времени $T = 4000$. Схема Аракавы. Сетка 32×32 . CFL = 0,3

Рис. 5.5г. Моделирование неподвижного одиночного вихря. Эволюция вихря на моменты времени $T = 4400$. Схема Аракавы. Сетка 32×32 . Решение расходится

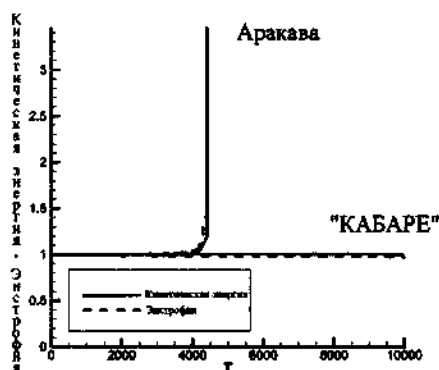


Рис. 5.6. Моделирование неподвижного одиночного вихря. Зависимость интегральных параметров течения от времени. В расчете по схеме Аракавы интегралы движения уходят в бесконечность, схема «КАБАРЕ» сохраняет устойчивость. Сетка 32×32 . CFL = 0,3

Из рисунков 5.5 и 5.6 видно, что при использовании обеих схем («КАБАРЕ» и Аракавы) вихрь практически не изменяет своей формы вплоть до времени $T = 4400$, что соответствует более чем 750 его оборотам вокруг своей оси. В этот момент времени отклонение кинетической энергии и энтропии от первоначального значения для исследуемых схем составляет величину, не превышающую 0,1 % и 2 % соответственно. После времени $T = 4400$ расчет по схеме Аракавы теряет устойчивость. Течения на момент распада вихря представлены на рисунке 5.5г, соответствующая зависимость интегральных параметров течения от времени представлена на рисунке 5.6. Расчет, проведенный по схеме «КАБАРЕ», сохраняет устойчивость к моменту времени $T = 10000$, что соответствует более чем 1750 оборотам вихря вокруг своей оси. К этому времени падение кинетической энергии составляет менее 0,4 %, падение энтропии – менее 4 %. При этом форма вихря слабо отличается от первоначальной, что показано на рис. 5.5а,б. При использовании схемы «КАБАРЕ» решение устойчиво вплоть до времени $T = 100000$. Ожидается устойчивость решения и на больших показателях времени.

Задача о движущемся изолированном вихре

В данной задаче изолированных вихрь (5.58) переносится вдоль оси y со скоростью $\pi/3$. За время расчета $T = 96$ вихрь совершает 16 проходов вдоль расчетной области, более 15 раз обращаясь вокруг своей оси. Решение проводится в прямоугольной области $G = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, на которой введена равномерная ортогональная пространственная сетка с количеством ячеек $N_x \cdot N_y$, где $N_x = N_y = 64$. Шаг сетки вдоль соответствующих координатных осей равен $h_x = 2\pi / N_x$, $h_y = 2\pi / N_y$. Граничные условия периодические. Число Куранта $CFL = 0,3$. Характерный радиус вихря составляет 20 диагоналей ячеек расчетной сетки. В силу идентичности результатов, полученных для разных пар переменных, далее приведены расчеты только для комплекта «скорость — завихренность». Результаты расчета по схеме «КАБАРЕ» сравниваются с аналогичными, полученными при помощи схемы Аракавы.

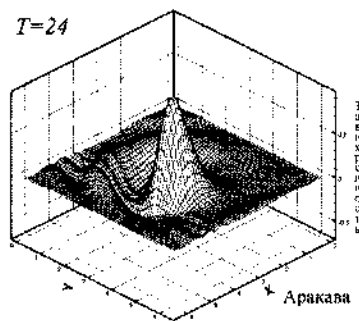
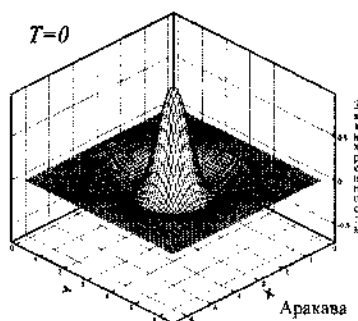


Рис. 5.7а. Моделирование движущегося одиночного вихря. Движение происходит вдоль положительного направления оси y . Завихренность в момент времени $T = 0$. Схема «КАБАРЕ». Сетка 64×64 . $CFL = 0,3$

Рис. 5.7б. Моделирование движущегося одиночного вихря. Движение происходит вдоль положительного направления оси y . Завихренность в момент времени $T = 24$. Схема «КАБАРЕ». Сетка 64×64 . $CFL = 0,3$

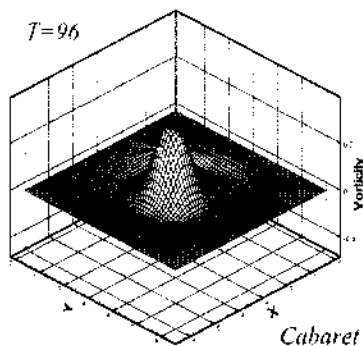
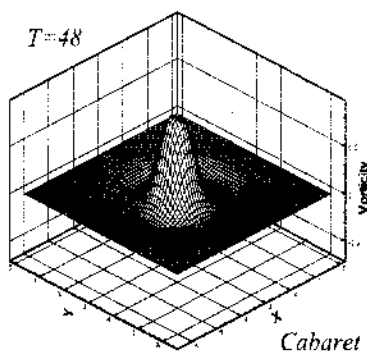


Рис. 5.7в. Моделирование движущегося одиночного вихря. Движение происходит вдоль положительного направления оси y . Завихренность в момент времени $T = 48$. Схема «КАБАРЕ». Сетка 64×64 . $CFL = 0,3$

Рис. 5.7г. Моделирование движущегося одиночного вихря. Движение происходит вдоль положительного направления оси y . Завихренность в момент времени $T = 96$. Схема «КАБАРЕ». Сетка 64×64 . $CFL = 0,3$

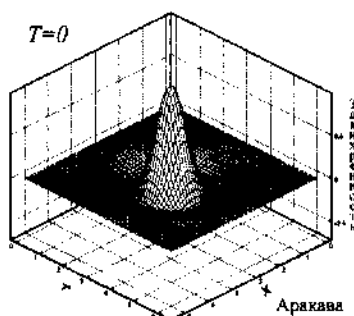


Рис. 5.8а. Моделирование подвижного одиночного вихря. Движение происходит вдоль положительного направления оси y . Завихренность в момент времени $T = 0$. Схема Аракавы. Сетка 64×64 . CFL = 0,3

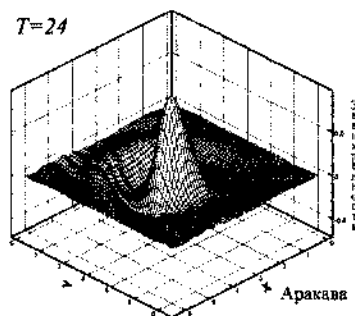


Рис. 5.8б. Моделирование подвижного одиночного вихря. Движение происходит вдоль положительного направления оси y . Завихренность в момент времени $T = 24$. Схема Аракавы. Сетка 64×64 . CFL = 0,3

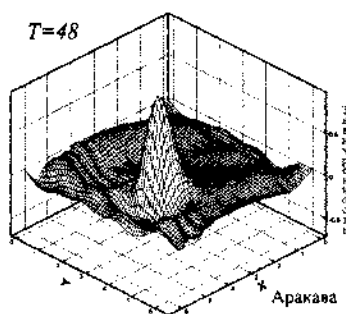


Рис. 5.8в. Моделирование подвижного одиночного вихря. Движение происходит вдоль положительного направления оси y . Завихренность в момент времени $T = 48$. Схема Аракавы. Сетка 64×64 . CFL = 0,3

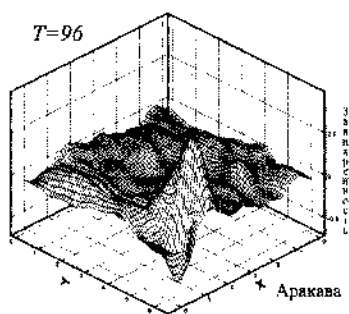


Рис. 5.8г. Моделирование подвижного одиночного вихря. Движение происходит вдоль положительного направления оси y . Завихренность в момент времени $T = 96$. Схема Аракавы. Сетка 64×64 . CFL = 0,3

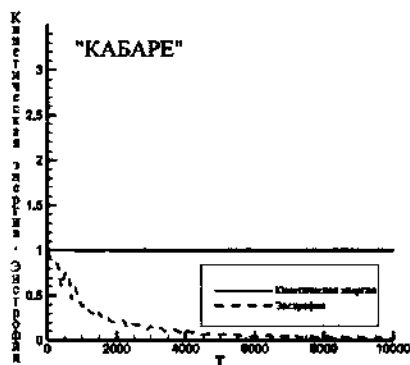


Рис. 5.9а. Моделирование неподвижного одиночного вихря. Зависимость интегральных параметров течения от времени. Схема «КАБАРЕ» $\xi = 0,00$. Сетка 64×64 . CFL = 0,3

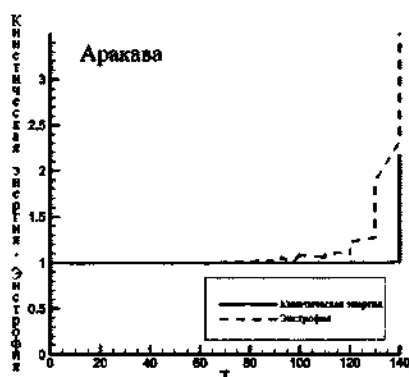


Рис. 5.9б. Моделирование неподвижного одиночного вихря. Зависимость интегральных параметров течения от времени. Схема Аракавы. Сетка 64×64 . CFL = 0,3

Расчет по схеме «КАБАРЕ» сохраняет кинетическую энергию с точностью 0,1 % ко времени $T = 96$ и 4 % ко времени $T = 10000$. На момент времени $T = 96$ энтропия составляет 90 % от первоначально значения, на момент времени $T = 10000$ – 1 %. Подвижный вихрь, рассчитанный по схеме «КАБАРЕ», сохраняет форму в течение всего расчета, в решении отсутствует паразитная рябь (рис. 5.7).

При использовании схемы Аракавы обеспечивается сохранение энергии и энтропии с точностью 0,1 % вплоть до времени $T = 96$, после чего решение расходится (рис. 5.8). Вихрь теряет форму и распадается за несколько проходов через расчетную область.

Задача о затухающей однородной турбулентности

Спектральная плотность кинетической энергии

Зададим случайное поле скоростей, соответствующее начальной спектральной плотности кинетической энергии вида

$$E(k) = A \cdot k^\alpha \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right\}, \quad (5.63)$$

где A , α , k_0 – параметры распределения. Графический вид данного спектра представлен на рисунке 5.10. Параметр A нормирует общую кинетическую энергию течения на величину 0,1.

Воспользуемся обратным преобразованием Фурье для нахождения исходного поля скоростей:

$$\begin{cases} u(x, y) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} u_{k_1 k_2} \exp(i(k_1 x + k_2 y + \varphi_1)) \\ v(x, y) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} v_{k_1 k_2} \exp(i(k_1 x + k_2 y + \varphi_2)) \end{cases} \quad (5.64)$$

где $u_{k_1 k_2}, v_{k_1 k_2}$ – коэффициенты Фурье, полученные из энергетического спектра (5.60), φ_1 и φ_2 – фазы, задаваемые случайными величинами с равномерным распределением на отрезке $[0, 2\pi]$. Характерный вид поля скорости и соответствующего ему поля завихренности представлен на рис. 5.11.

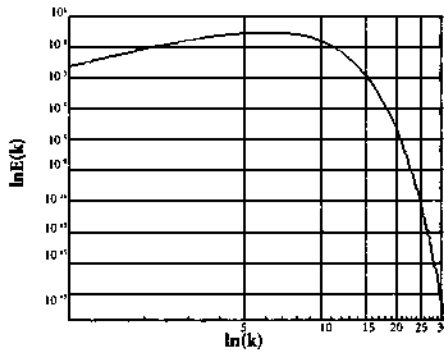


Рис. 5.10. Спектр исходного поля скоростей. Сетка 64×64

Решение проводится в прямоугольной области $G = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, на которой введена равномерная ортогональная пространственная сетка с количеством ячеек $N_x \cdot N_y$. Моделирование проводится для сеток различной густоты $N_x = N_y = 32, 64, 128, 256$. Шаг сетки вдоль соответствующих координатных осей равен $h_x = 2\pi / N_x, h_y = 2\pi / N_y$. Граничные условия периодические. Число Куранта $CFL = 0,3$.

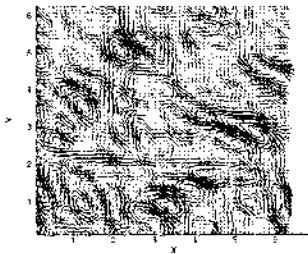


Рис. 5.11а. Характерный вид исходного поля скорости. Сетка 64×64

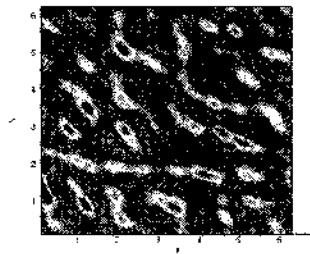


Рис. 5.11б. Характерный вид исходного поля завихренности. Сетка 64×64

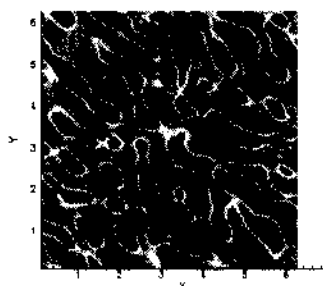


Рис. 5.12а. Изоконтурсы поля завихренности в задаче со случайным полем скоростей в момент времени $T = 0$. Схема «КАБАРЕ». Сетка 64×64

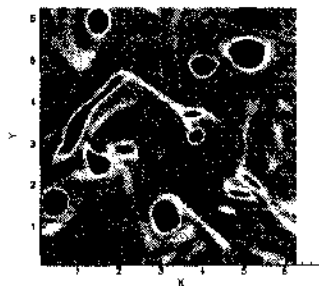


Рис. 5.12б. Изоконтурсы поля завихренности в задаче со случайным полем скоростей в момент времени $T = 250$. Схема «КАБАРЕ». Сетка 64×64

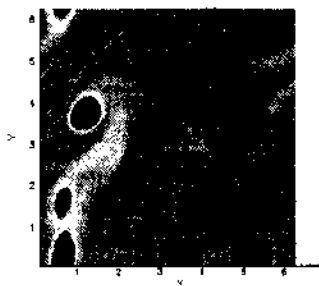


Рис. 5.12в. Изоконтурсы поля завихренности в задаче со случайным полем скоростей в момент времени $T = 500$. Схема «КАБАРЕ». Сетка 64×64

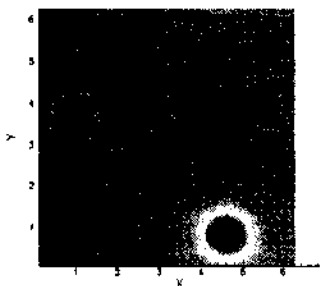


Рис. 5.12г. Изоконтурсы поля завихренности в задаче со случайным полем скоростей в момент времени $T = 1000$. Схема «КАБАРЕ». Сетка 64×64

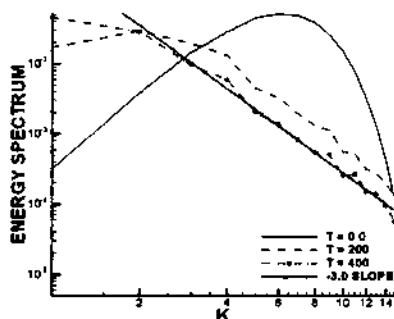


Рис. 5.13а. Спектр энергии в логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 200, 400$. Схема «КАБАРЕ». Переменные «скорость – давление». Сетка 32×32 . Наклон спектральной кривой равен -3

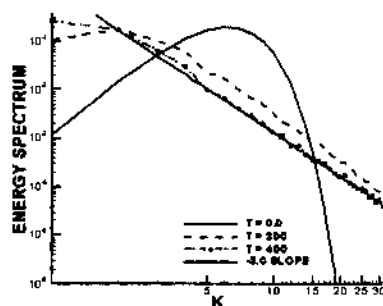


Рис. 5.13б. Спектр энергии в логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 200, 400$. Схема «КАБАРЕ». Переменные «скорость – давление». Сетки $32 \times 32, 64 \times 64$ и 128×128 . Наклон спектральной кривой равен -3

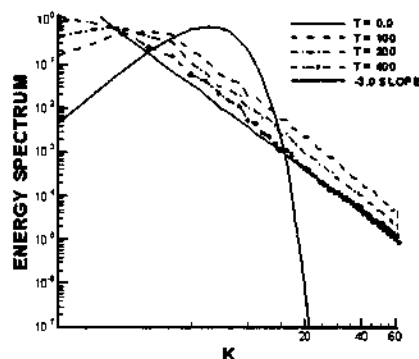


Рис. 5.13в. Спектр в логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 200, 400$. Схема «КАБАРЕ». Переменные «скорость – давление». Сетка 128×128 . Наклон спектральной кривой равен -3

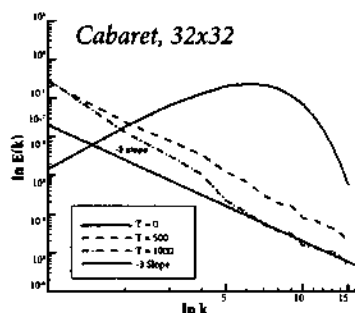


Рис. 5.14а. Спектр плотности кинетической энергии в двойном логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 500, 1000$. Схема «КАБАРЕ», $\xi = 0,20$. Переменные «скорость – завихренность». Сетка 32×32 . Наклон спектральных кривых составляет -3 . CFL = 0,3

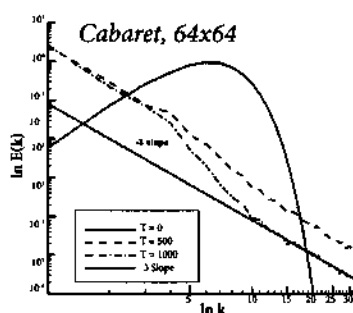


Рис. 5.14б. Спектр плотности кинетической энергии в двойном логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 500, 1000$. Схема «КАБАРЕ», $\xi = 0,20$. Переменные «скорость – завихренность». Сетка 64×64 . Наклон спектральных кривых составляет -3 . CFL = 0,3

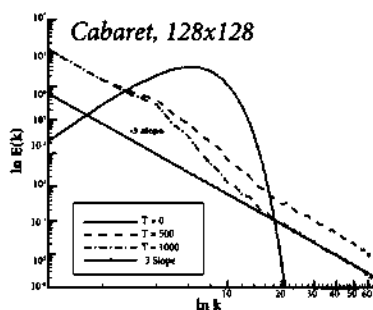


Рис. 5.14в. Спектр плотности кинетической энергии в двойном логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 500, 1000$. Схема «КАБАРЕ», $\xi = 0,20$. Переменные «скорость – завихренность». Сетка 128×128 . Наклон спектральных кривых составляет -3 . CFL = 0,3

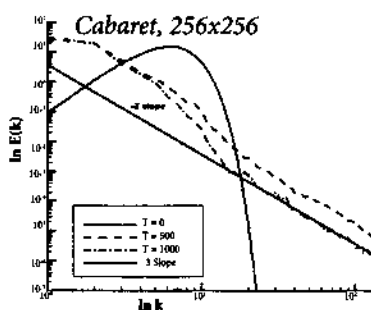


Рис. 5.14г. Спектр плотности кинетической энергии в двойном логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 500, 1000$. Схема «КАБАРЕ», $\xi = 0,20$. Переменные «скорость – завихренность». Сетка 256×256 . Наклон спектральных кривых составляет -3 . CFL = 0,3

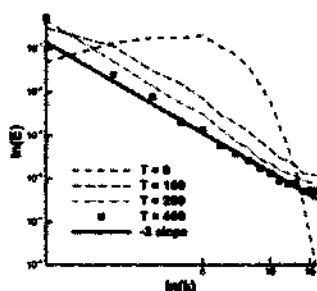


Рис. 5.15а. Спектр плотности кинетической энергии в двойном логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 200, 400$. Схема «КАБАРЕ», $\xi = 0, 20$. Переменные «завихренность – функция тока». Сетка 32×32 . Наклон спектральных кривых составляет $-3,0$. CFL = 0,3

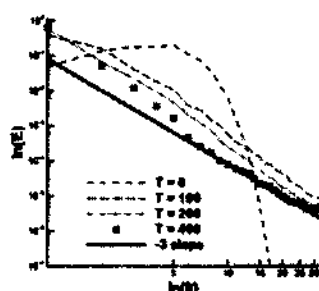


Рис. 5.15б. Спектр плотности кинетической энергии в двойном логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 200, 400$. Схема «КАБАРЕ», $\xi = 0, 20$. Переменные «завихренность – функция тока». Сетка 64×64 . Наклон спектральных кривых составляет -3 . CFL = 0,3

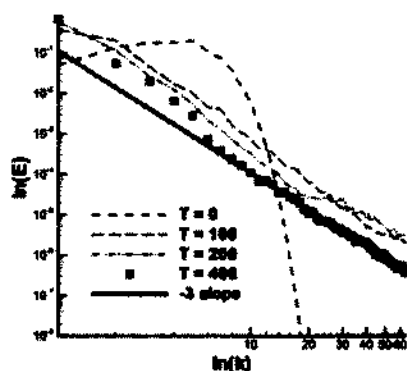


Рис. 5.15в. Спектр плотности кинетической энергии в двойном логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 200, 400$. Схема «КАБАРЕ», $\xi = 0, 20$. Переменные «завихренность – функция тока». Сетка 128×128 . Наклон спектральных кривых составляет -3 . CFL = 0,3

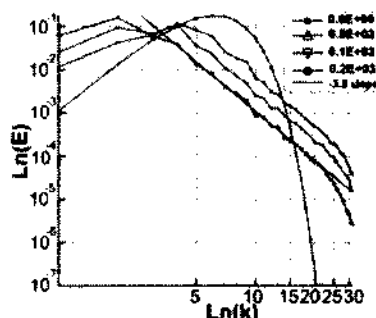


Рис. 5.16а. Спектр в логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 50, 100, 200$. Схема Аракавы. Сетка 64×64 . Наклон спектральной кривой составляет $-3,8$

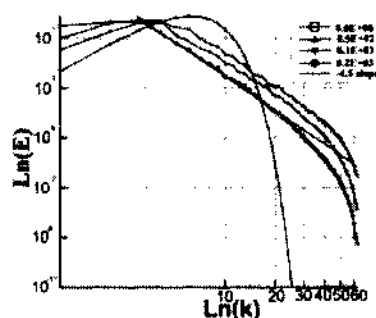


Рис. 5.16б. Спектр в логарифмическом масштабе в моменты времени $T = 0, 50, 100, 200$. Схема Аракавы. Сетка 128×128 . Наклон спектральной кривой составляет $-4,5$

Рисунки 5.12а–г хорошо показывают качественную картину поведения затухающей однородной турбулентности: постепенно кинетическая энергия переходит во все более и более крупномасштабные пространственные структуры, что соответствует характерному для двумерной турбулентности обратному энергетическому каскаду. На рисунках 5.13, 5.14, 5.15 показано, что на всех рассмотренных сетках наклон спектральных кривых рассчитанной турбулентности соответствует закону « -3 » для всех использованных алгоритмов, что, в свою очередь, отвечает требованиям теории Батчелора. Для сравнения на рисунке 5.16 приведены результаты моделирования турбулентности с использованием схемы Аракавы (Agakawa, 1967): хвосты спектральных кривых загибаются вниз из-за искусственной вязкости, введенной в схему для подавления развивающейся в ней нелинейной неустойчивости. Наклоны пологих частей спектра составляют $-3,8$ и $-4,5$ для сеток 64×64 и 128×128 соответственно.

Структурные функции

На рисунках 5.17, 5.18, 5.19 показано, что соответствие закону (5.4) структурных функций порядков $q = 1, 2, 3$ хорошо прослеживается для всех рассмотренных алгоритмов на всех рассмотренных сетках.

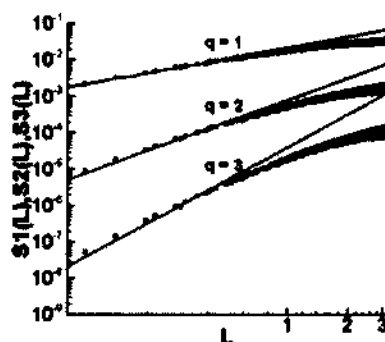


Рис. 5.17а. Структурные функции. Схема «КАБАРЕ» для переменных «скорость – давление». Сетка 64×64 , $T = 400$, $CFL = 0,3$

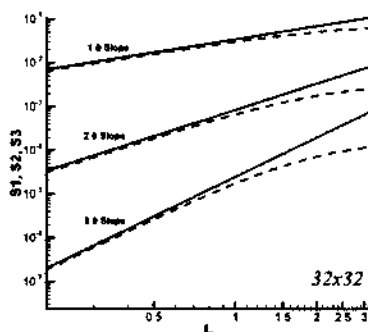


Рис. 5.18а. Структурные функции. Схема «КАБАРЕ» для переменных «завихренность – скорость». Сетки 32×32 , $T = 1000$, $CFL = 0,3$

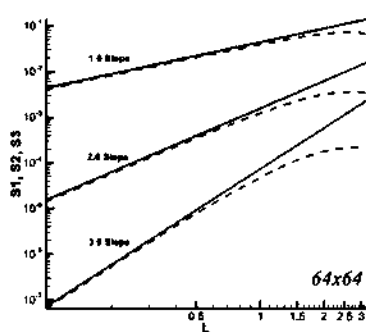


Рис. 5.18б. Структурные функции. Схема «КАБАРЕ» для переменных «завихренность – скорость». Сетка 64×64 , $T = 1000$, $CFL = 0,3$

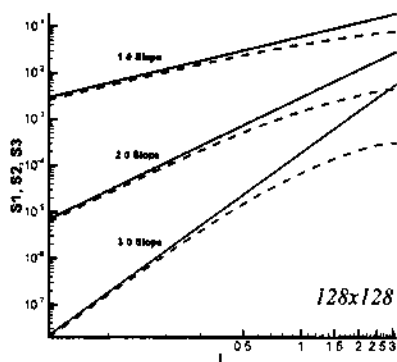


Рис. 5.18в. Структурные функции. Схема «КАБАРЕ» в переменных «завихренность – скорость». Сетка 128×128 , $T = 1000$, $CFL = 0,3$

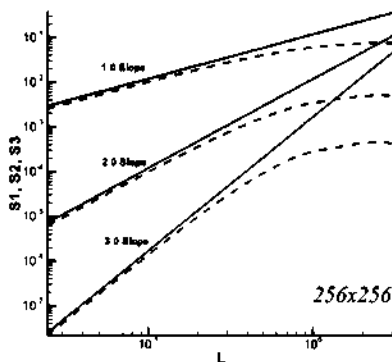


Рис. 5.18г. Структурные функции. Схема «КАБАРЕ» в переменных «завихренность – скорость». Сетка 256×256 , $T = 1000$, $CFL = 0,3$

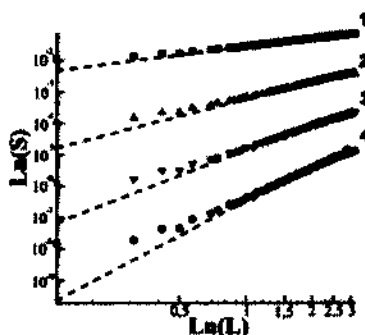


Рис. 5.19а. Структурные функции. Схема «КАБАРЕ» для переменных «завихренность – функция тока». Сетка 32×32 . $T = 400$. $CFL = 0,3$

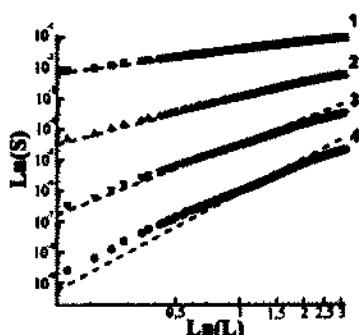


Рис. 5.19б. Структурные функции. Схема «КАБАРЕ» для переменных «завихренность – функция тока». Сетка 64×64 . $T = 400$. $CFL = 0,3$

5.2. Моделирование трехмерных турбулентных течений по схеме «КАБАРЕ»

5.2.1. Постановка задачи

Рассматривается трехмерное течение несжимаемой жидкости в кубе с периодическими граничными условиями. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (5.65)$$

где p – давление, μ – коэффициент кинематической вязкости.

5.2.2. Численный алгоритм

Запишем систему (5.65) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z} = -\nabla p + \mathbf{L}, \quad (5.66)$$

где $\mathbf{L} = \mu \cdot \Delta \mathbf{U}$,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} u^2 \\ uv \\ uw \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} uv \\ v^2 \\ vw \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} uw \\ vw \\ w^2 \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Расчетная область – куб $G = \{(x, y), x \in [0, 2\pi], y \in [0, 2\pi], z \in [0, 2\pi]\}$.

Введем на ней равномерную ортогональную сетку

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j, z_k), i = 1, N_x, j = 1, N_y, k = 1, N_z : x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_{N_x} = 2\pi, y_1 = 0 < y_2 < \dots < y_{N_y} = 2\pi, z_1 = 0 < z_2 < \dots < z_{N_z} = 2\pi\}.$$

В центрах ячеек определим консервативные переменные (и будем нумеровать их полуцелыми индексами), в центрах граней ячеек – потоковые скорости, а в узлах – давление. Консервативные переменные характеризуют реальные физические величины и не подвергаются коррекции по принципу максимума, потоковые же переменные служат только для описания потоков через границы ячеек. В начальный момент времени задается поле консервативных скоростей, по которым согласованным образом (из решения задачи о распаде разрыва) определяются потоковые скорости. Давление определяется силами реакции системы на нарушение условия несжимаемости. Пусть в момент времени t_n известны значения консервативных и потоковых переменных. Аппроксимируем систему уравнений (5.66) неявной консервативной разностной схемой, обладающей вторым порядком аппроксимации на гладких решениях:

$$\frac{\mathbf{U}_c^{n+1} - \mathbf{U}_c^n}{\tau^n} + \frac{\bar{\mathbf{X}}_R - \bar{\mathbf{X}}_L}{h_x} + \frac{\bar{\mathbf{Y}}_T - \bar{\mathbf{Y}}_B}{h_y} + \frac{\bar{\mathbf{Z}}_U - \bar{\mathbf{Z}}_D}{h_z} = -\{\nabla p\}_c^{n+1/2} + \mathbf{L}_c^{n+1/2}, \quad (5.68)$$

где индексами c, R, L, T, B, U, D обозначены точки $(i+1/2, j+1/2, k+1/2)$, $(i+1, j, k)$, (i, j, k) , $(i, j+1, k)$, $(i, j, k+1)$, (i, j, k) , причем пары (R, L) , (T, B) , (U, D) относятся к противоположным граням куба с нормальными вдоль осей x, y и z соответственно. Чертой сверху обозначена полусумма переменных с двух временных слоев $\bar{\eta} = (\eta^{n+1} + \eta^n)/2$. Для вычисления неизвестных потоковых скоростей и давления найдем консервативные скорости на промежуточном слое по времени $t_{n+1/2} = t_n + 0,5 \cdot \tau^n$ по разностной схеме (5.69–5.70):

$$\frac{\tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{U}_c^n}{0,5 \cdot \tau^n} + \frac{\mathbf{X}_R^n - \mathbf{X}_L^n}{h_x} + \frac{\mathbf{Y}_T^n - \mathbf{Y}_B^n}{h_y} + \frac{\mathbf{Z}_U^n - \mathbf{Z}_D^n}{h_z} = \mathbf{L}_c^n. \quad (5.69)$$

Здесь промежуточное значение $\tilde{\mathbf{U}}$ вычисляется без учета давления в правой части:

$$\frac{\mathbf{U}_c^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{U}}}{0,5 \cdot \tau^n} = -\{\nabla p\}_c^{n+1/2}. \quad (5.70)$$

Потребовав обнуление сеточной дивергенции $\text{div}_h U_C^{n+1/2} = 0$, получим уравнение Пуассона для нахождения давления:

$$\Delta_h p^{n+1/2} = \frac{2}{\tau^n} \text{div}_h \tilde{U}, \quad (5.71)$$

которое решается методом БПФ (обозначение Δ_h соответствует косому кресту или 27-точечной аппроксимации лапласиана).

Для нахождения новых потоковых скоростей на $i+1$ -ой грани, перпендикулярной оси x , оценим их значения с одной $\varphi^- = (u^-, v^-, w^-)$ и с другой стороны $\varphi^+ = (u^+, v^+, w^+)$ от данной грани и поставим частичную задачу Римана о распаде разрыва. Так как поток – выпуклая функция Хопфа, то задача Римана допускает простое аналитическое решение – поток Годунова. Для схемы «КАБАРЕ» удобно использовать поток Годунова в несколько модифицированном виде, с привлечением консервативных переменных:

$$\varphi_R^{n+1} = \begin{cases} \varphi^- & \text{если } u_C^{n+1/2} > 0 \text{ и } u_{CR}^{n+1/2} > 0; \\ \varphi^+ & \text{если } u_C^{n+1/2} < 0 \text{ и } u_{CR}^{n+1/2} < 0; \\ (0, v_\varphi^n, w_\varphi^n) & \text{если } u_C^{n+1/2} < 0 \text{ и } u_{CR}^{n+1/2} > 0; \\ \varphi^- & \text{если } u_C^{n+1/2} > 0 \text{ и } u_{CR}^{n+1/2} < 0 \text{ и } |u^-| > |u^+|; \\ \varphi^+ & \text{если } u_C^{n+1/2} < 0 \text{ и } u_{CR}^{n+1/2} < 0 \text{ и } |u^-| < |u^+|, \end{cases} \quad (5.72)$$

где $\varphi = (u_\varphi, v_\varphi, w_\varphi)$ – потоковая скорость на гранях с нормалью вдоль оси x . Индекс CR соответствует точке $(i+3/2, j+1/2, k+1/2)$. Нахождение значений слева и справа от грани производится в 2 этапа: 1 – экстраполяция $\tilde{\varphi}^- = 2U_C^{n+1/2} - \varphi_L^n$, $\tilde{\varphi}^+ = 2U_{CR}^{n+1/2} - \varphi_{RR}^n$; 2 – коррекция по принципу максимума для сохранения свойства монотонности решений. Принцип максимума заключается в том, что при числах Куранта меньше единицы обратная характеристика, выпущенная с нового временного слоя, пересечет область расчетной ячейки в некоторой точке, и переносимое вдоль нее значение должно лежать между минимумом и максимумом соответствующих значений в ячейке на текущем временном слое. Минимумы и максимумы оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{\tilde{U}_i}^- &= \max((\varphi_i)_L^n, (U_i)_C^{n+1/2}, (\varphi_i)_R^n) + \tau^n Q_{U_i}^-, \\ \min_{\tilde{U}_i}^- &= \min((\varphi_i)_L^n, (U_i)_C^{n+1/2}, (\varphi_i)_R^n) + \tau^n Q_{U_i}^-, \\ \max_{\tilde{U}_i}^+ &= \max((\varphi_i)_R^n, (U_i)_{CR}^{n+1/2}, (\varphi_i)_{RR}^n) + \tau^n Q_{U_i}^+, \\ \min_{\tilde{U}_i}^+ &= \min((\varphi_i)_R^n, (U_i)_{CR}^{n+1/2}, (\varphi_i)_{RR}^n) + \tau^n Q_{U_i}^+, \end{aligned} \quad (5.73)$$

где члены $Q_{U_i}^-$, $Q_{U_i}^+$, $Q_{U_i}^-$, $Q_{U_i}^+$ характеризуют конвективный поток в направлении осей y и z за шаг по времени.

$$\begin{aligned}
 Q_{\bar{v}_i} &= \frac{(\mathbf{U}_i)_C^{n+1/2} - (\mathbf{U}_i)_C^n}{\tau^n / 2} + (\bar{\varphi}_1)_L^n \cdot \frac{(\varphi_1)_R^n - (\varphi_1)_L^n}{h_x}, \\
 Q_{\bar{v}_i}^* &= \frac{(\mathbf{U}_i)_{CR}^{n+1/2} - (\mathbf{U}_i)_{CR}^n}{\tau^n / 2} + (\bar{\varphi}_1)_R^n \cdot \frac{(\varphi_1)_{RR}^n - (\varphi_1)_R^n}{h_x}.
 \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\text{Здесь } (\bar{\varphi}_1)_L = \frac{(u_\varphi)_R + (u_\varphi)_L}{2}, \quad (\bar{\varphi}_1)_R = \frac{(u_\varphi)_{RR} + (u_\varphi)_R}{2}.$$

Коррекция производится по формулам:

$$\bar{U}_i^- = \begin{cases} \hat{U}^- & \text{если } \min_{\bar{v}_i} \leq \hat{U}^- \leq \max_{\bar{v}_i}, \\ \min_{\bar{v}_i} & \text{если } \hat{U}^- < \min_{\bar{v}_i}, \\ \max_{\bar{v}_i} & \text{если } \hat{U}^- > \max_{\bar{v}_i}, \end{cases} \quad (5.75)$$

$$\bar{U}_i^+ = \begin{cases} \hat{U}^+ & \text{если } \min_{\bar{v}_i}^+ \leq \hat{U}^+ \leq \max_{\bar{v}_i}^+, \\ \min_{\bar{v}_i}^+ & \text{если } \hat{U}^+ < \min_{\bar{v}_i}^+, \\ \max_{\bar{v}_i}^+ & \text{если } \hat{U}^+ > \max_{\bar{v}_i}^+, \end{cases} \quad (5.76)$$

Процедура вычисления потоковых переменных на остальных гранях (y и z) полностью аналогична описанной выше (для грани x).

5.2.3. Общие замечания по алгоритму

На гладких решениях схема имеет второй порядок аппроксимации как по пространству, так и по времени, в том числе и на неравномерной временной сетке. Схема устойчива при числах Куранта $0 < CFL < 1/3$. Шаг по времени переменный и определяется так:

$$\tau = \min \left(\frac{CFL \cdot h_x}{\max(|u|)}, \frac{CFL \cdot h_y}{\max(|v|)}, \frac{CFL \cdot h_z}{\max(|w|)}, \frac{(h_x h_y h_z)^{2/3}}{2\mu} \right). \quad (5.77)$$

5.2.4. Примеры расчетов

Одиночный вихрь

В качестве начальных условий рассмотрим следующую задачу:

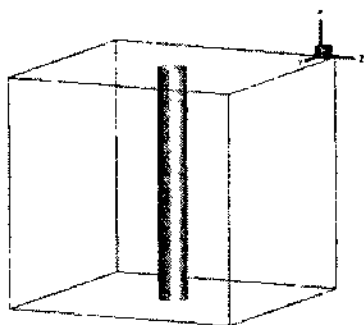
$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_z = 0 \\ u_\varphi = \alpha \cdot f(r_\sigma) \cdot \exp[\beta(1 - r_\sigma^2)] \\ r_\sigma = r / \sigma. \end{cases}, \quad (5.78)$$

Здесь f – полином, α , β , σ – положительные константы. Пусть $f(r_\sigma) = r_\sigma$, $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,3$, $\sigma = 0,5$. Характерное время оборота такого вихря по окружности $\Delta T \approx 7$. Пусть коэффициент вязкости равен 0. Граничные условия периодические.

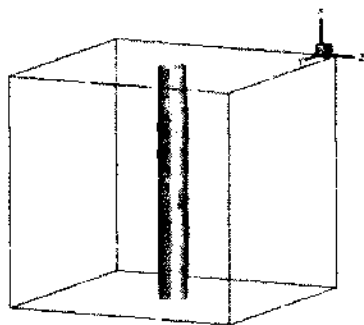
На серии рисунков 5.20 показана эволюция одиночного вихря во времени. Расчетная сетка – $32 \times 32 \times 32$. Число Куранта – 0,3. Расчетное время $T = 150 \approx 21,5 \cdot \Delta T$. Вихрь сохраняет свою форму в течение примерно 15 оборотов вдоль оси x . Затем происходит «турбулизация» течения и развал вихря.

На рисунке 5.21 приведены зависимости интегральных характеристик (энергии и энтропии) от времени. До определенного момента ($T \approx 85$) энергия и энтропия системы изменяются слабо. Затем следует резкий рост энтропии и, как следствие, рост скорости диссипации энергии.

Данные результаты имеют лишь качественное значение, т. к. одиночный вихрь в трехмерном случае неустойчив. В целом можно говорить о том, что наш алгоритм дает малые фазовые ошибки даже на грубых сетках. Диссипативные свойства тоже относительно неплохие.



T = 0



T = 75

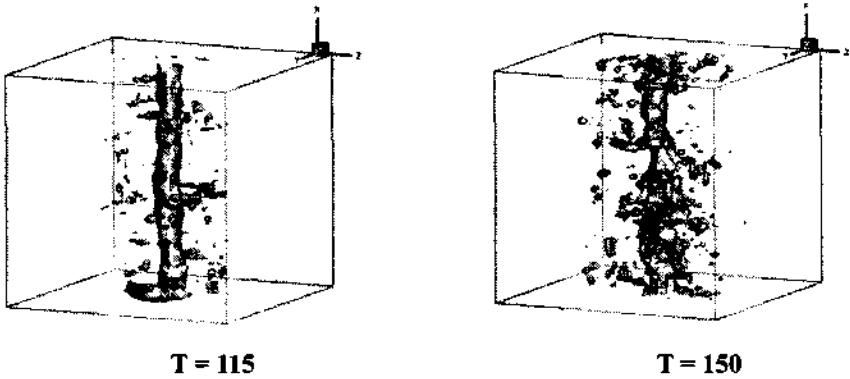


Рис. 5.20. Изоповерхности поля модуля завихренности в задаче об одиночном вихре

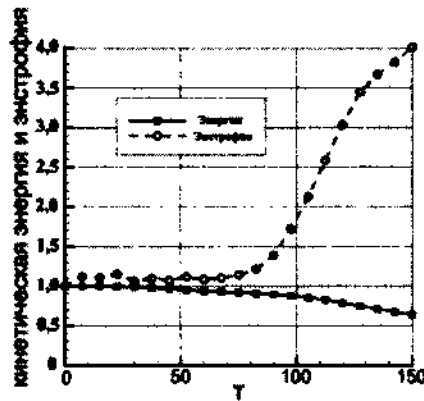


Рис. 5.21. Зависимость энергии и энтропии от времени в задаче об одиночном вихре

Вихрь Хилла

Рассмотрим следующую задачу [36]. Пусть область завихренной жидкости заключена внутри сферы радиуса a , движущейся с постоянной поступательной скоростью U . Вихревые линии являются концентрическими окружностями с общей осью, проходящей через центр сферы, а линии тока лежат в меридиональных плоскостях. Вне сферы движение потенциально.

$$\begin{cases} u_r = \frac{3}{2} U \frac{rz}{a^2}, \\ u_z = \frac{3}{2} U \left(1 - \frac{2r^2 + z^2}{a^2} \right) + U, & r^2 + z^2 < a^2 \\ u_r = \frac{3}{2} U \frac{rz}{a^2} \left(\frac{a^2}{r^2 + z^2} \right)^{5/2} \\ u_z = U \left[\left(\frac{a^2}{r^2 + z^2} \right)^{5/2} \frac{2z^2 - r^2}{2a^2} - 1 \right] + U, & r^2 + z^2 > a^2 \\ u_\phi = 0. \end{cases} \quad (5.79)$$

Пусть $a = \pi/2$, $U = 0,1$, $v = 0$. Время одного «пролета» вихря вдоль оси z $\Delta T \approx 60$. Перейдем в систему координат, связанную с вихрем (в ней движение будет стационарно), и рассмотрим изоповерхности скорости u_z (рис. 5.22). $CFL = 0,3$. Сетка – $32 \times 32 \times 32$.

На рисунках видно, что до момента «турбулизации» вихрь успевает сделать около трех «пролетов» вдоль оси z . На рисунке 5.23 приведены интегральные характеристики течения. Энергия сохраняется с большой точностью (из-за постоянного вклада энергии поступательного движения). Энтропия же, начиная с момента времени $T \approx 50$, резко возрастает. Как и в случае одиночного вихря, можно сделать только качественные выводы о малости фазовых ошибок (центр вихря сохраняет свое положение) и относительно неплохих диссипативных свойствах алгоритма.

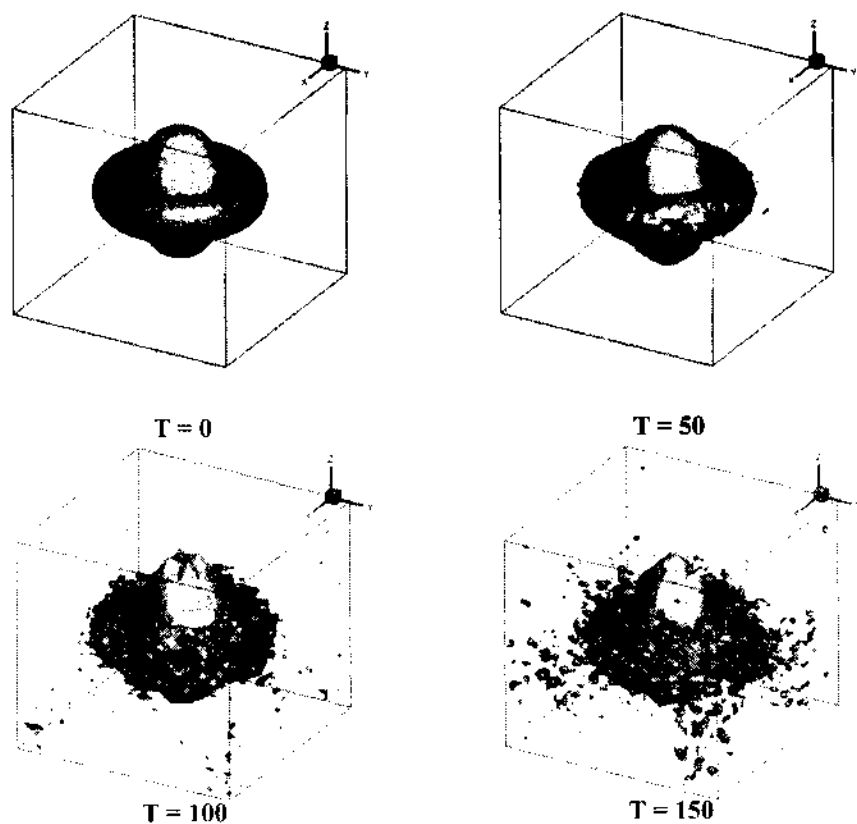


Рис. 5.22. Изоповерхности поля скорости u_z в задаче о вихре Хилла

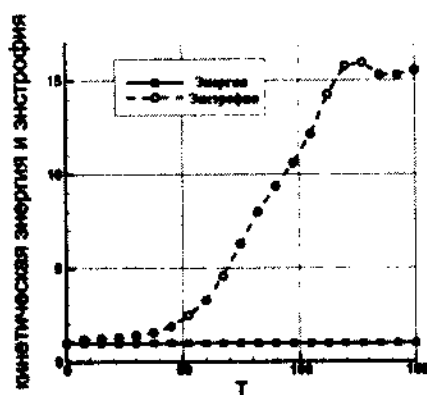


Рис. 5.23. Зависимость энергии и энтропии от времени в задаче о вихре Хилла

Моделирование затухания однородной изотропной турбулентности

Рассмотрим Фурье-образы компонент скоростей в сферической системе координат (5.80). Используя уравнение неразрывности, мы сможем считать радиальную компоненту нулевой ($\hat{u}_r(\mathbf{k}) = 0$).

$$\begin{cases} \hat{u}_r(\mathbf{k}) = 0 \\ \hat{u}_\varphi(\mathbf{k}) = a(k) \cdot \cos(\gamma_1) \\ \hat{u}_\theta(\mathbf{k}) = a(k) \cdot \sin(\gamma_1) \end{cases} \quad (5.80)$$

Здесь γ_1 – случайная равномерно распределённая величина на отрезке $[0, 2\pi]$, $a(k) = \sqrt{\frac{E(k)}{2\pi k^2}}$, где $E(k)$ – начальная спектральная плотность кинетической энергии вида:

$$E(k) = A \cdot k^\alpha \cdot \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{k}{k_{\max}} \right)^2 \right\}. \quad (5.81)$$

Здесь α – крутизна кривой $E(k)$ в области малых волновых чисел, $k_{\max}$ – волновое число, на котором кривая $E(k)$ достигает максимума, A – нормировочный множитель. Условие нормировки имеет вид:

$$\int E(k) dk = E_0, \quad (5.82)$$

где E_0 – начальная кинетическая энергия всей системы:

$$E_0 = \int_V \frac{3u_0^2}{2} dV, \quad (5.83)$$

u_0 – начальная характерная величина проекции скорости на некоторую произвольную ось. Подставив зависимость (5.81) в (5.82) получим

$$A = \frac{2E_0 \cdot \beta^\zeta}{\Gamma(\zeta)}, \quad \beta = \frac{\alpha}{2k_{\max}^2}, \quad \zeta = \frac{\alpha+1}{2}, \quad (5.84)$$

$\Gamma(\zeta)$ – гамма функция. Пусть $\alpha = 2$, $k_{\max} = 3$, $u_0 = 0,04$. Характерное время можно очень грубо оценить как отношение максимального корреляционного масштаба к начальной проекции скорости $\Delta T \sim 80$. Перейдем в прямоугольную декартову систему:

$$\begin{cases} \hat{u}(\mathbf{k}) = -\hat{u}_\varphi(\mathbf{k}) \sin \varphi + \hat{u}_\theta(\mathbf{k}) \cos \theta \cos \varphi \\ \hat{v}(\mathbf{k}) = \hat{u}_\varphi(\mathbf{k}) \cos \varphi + \hat{u}_\theta(\mathbf{k}) \cos \theta \sin \varphi \\ \hat{w}(\mathbf{k}) = -\hat{u}_\theta(\mathbf{k}) \sin \theta \end{cases} \quad (5.85)$$

и воспользуемся обратным преобразованием Фурье для нахождения скоростей в физическом пространстве:

$$\begin{cases} u(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \left[-\hat{u}_\varphi(\mathbf{k}) \sin \varphi \cdot \exp(i\gamma_2) + \hat{u}_\theta(\mathbf{k}) \cos \theta \cos \varphi \cdot \exp(i\gamma_3) \right] \cdot \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \left[\hat{u}_\varphi(\mathbf{k}) \cos \varphi \cdot \exp(i\gamma_2) + \hat{u}_\theta(\mathbf{k}) \cos \theta \sin \varphi \cdot \exp(i\gamma_3) \right] \cdot \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \\ w(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \left[-\hat{u}_\theta(\mathbf{k}) \sin \theta \cdot \exp(i\gamma_3) \right] \cdot \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \end{cases} \quad (5.86)$$

Случайность поля скоростей моделируется за счет введения случайных равномерно распределенных на отрезке $[0, 2\pi]$ фаз γ_2, γ_3 .

На рисунке 5.24 показана эволюция поля завихренности, соответствующего начальному распределению скоростей (5.86), во времени. Граничные условия периодические. Сетка $32 \times 32 \times 32$. Вязкость нулевая. Число Куранта 0,4.

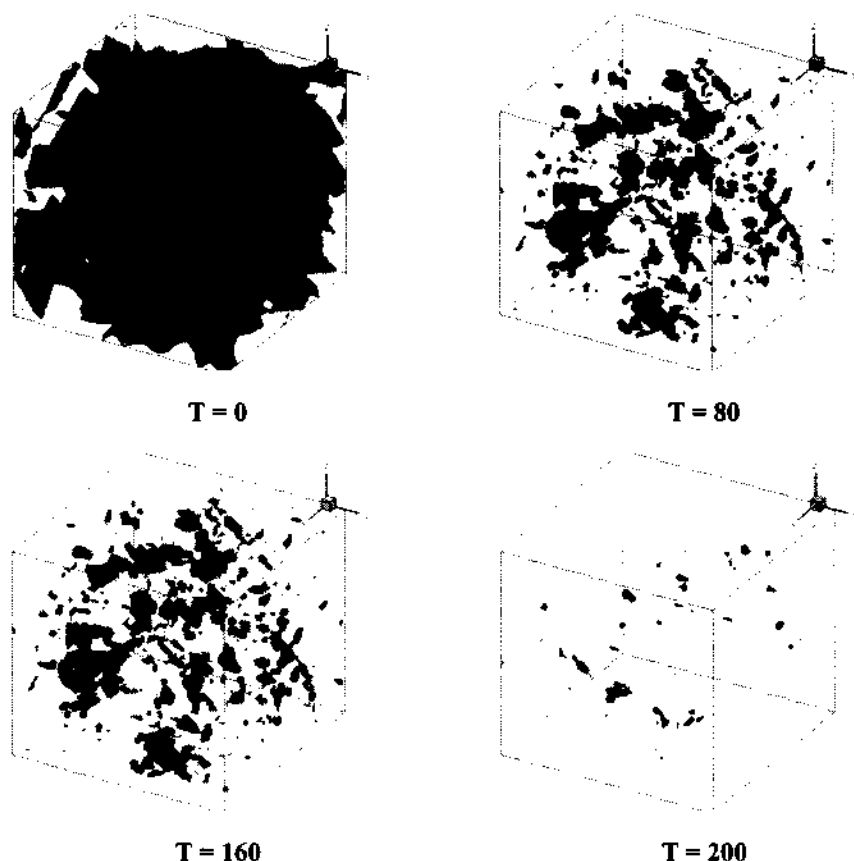


Рис. 5.24. Изоповерхности поля кинетической энергии в задаче со случайным полем скоростей

На рисунке 5.25 дана зависимость интегральных характеристик от времени. Энергия затухает примерно в 2 раза за время $T \sim 2\Delta T$. Отчетливо прослеживается каскадный механизм передачи энергии от крупных структур к более мелким. Данный процесс приводит к росту энтропии и спиральности (точнее модуля спиральности). К моменту времени $T \sim \Delta T$ в системе возбуждаются самые мелкие масштабы, сопоставимые с размером ячеек, и, как следствие, включается диссипативный механизм схемы «КАБАРЕ», уводящий энтрофию и спиральность на подсеточные масштабы.

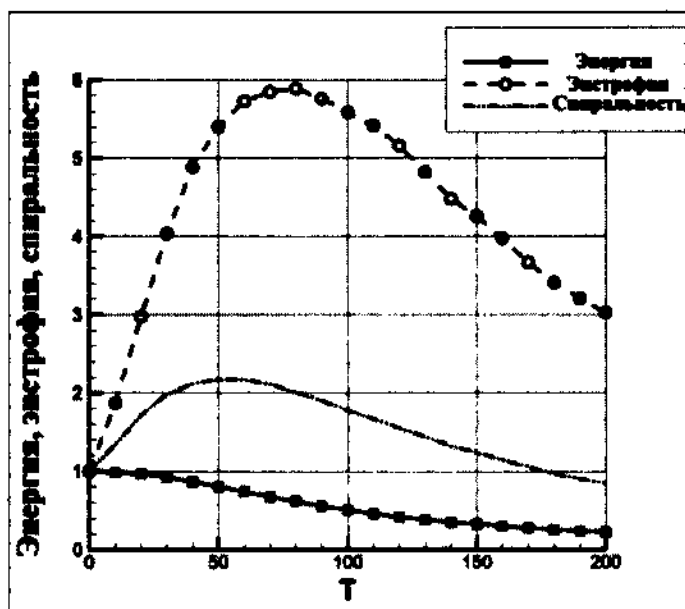


Рис. 5.25. Зависимость энергии, энтропии и спиральности от времени в задаче со случайным полем скоростей

Далее мы проанализируем статистические свойства однородной изотропной турбулентности. Будем осреднять все статистические моменты по набору эквивалентных реализаций случайного поля скоростей (5.86). Эквивалентность означает, что у всех реализаций начальная спектральная плотность кинетической энергии одна и та же (5.81). На рисунках 5.26–5.28 приводятся энергетические спектры кинетической энергии и спиральности в двойном логарифмическом масштабе на сетках $32 \times 32 \times 32$, $64 \times 64 \times 64$ и $128 \times 128 \times 128$ соответственно. Число Куранта – 0,3. $\nu = 0$.

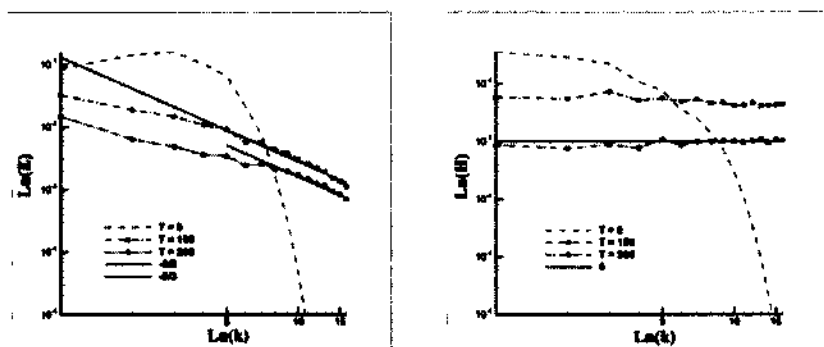


Рис. 5.26. Энергетические спектры энергии $E(k)$ (слева) и спиральности $E_h(k) \cdot k^{-2/3}$ (справа). Сетка $32 \times 32 \times 32$

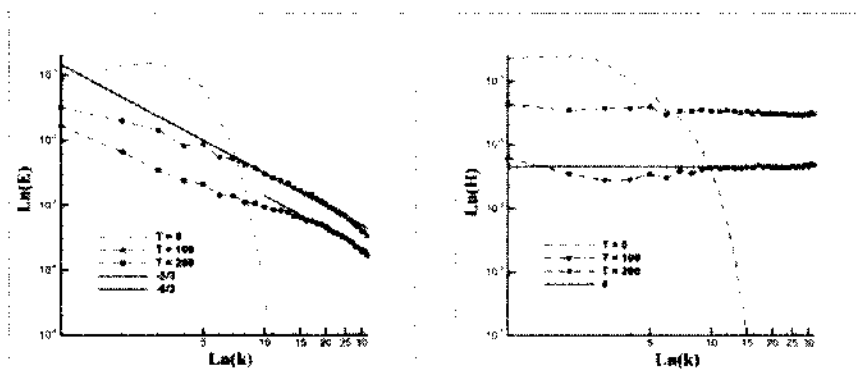


Рис. 5.27 Энергетические спектры энергии $E(k)$ (слева) и спиральности $E_h(k) \cdot k^{-2/3}$ (справа). Сетка $64 \times 64 \times 64$

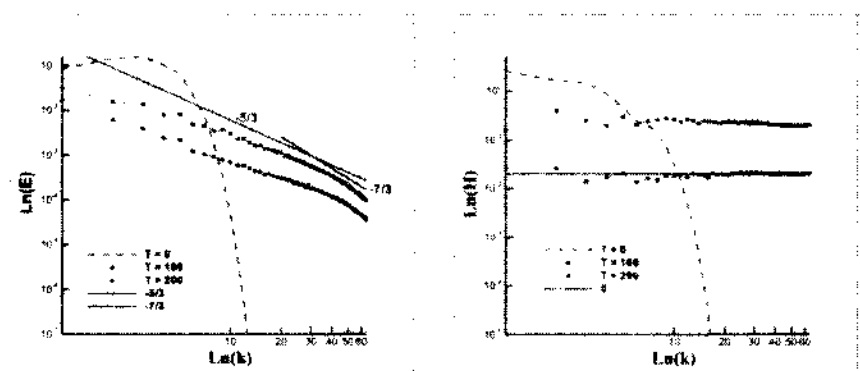


Рис. 5.28 Энергетические спектры энергии $E(k)$ (слева) и спиральности $E_h(k) \cdot k^{-2/3}$ (справа). Сетка $128 \times 128 \times 128$

На рисунках приводится распределение спектров по пространственным частотам в моменты времени $T = 100$ и $T = 200$. Можно считать, что каскадный процесс на этих временах уже установился. На сетке $32 \times 32 \times 32$ последние 10–12 гармоник хорошо ложатся на теоретический наклон $-5/3$ (закон Колмогорова). На сетке $64 \times 64 \times 64$ поведение спектральных характеристик примерно такое же. Однако на более подробных сетках (начиная с сетки $128 \times 128 \times 128$) помимо колмогоровского наклона отчетливо виден наклон близкий к $-7/3$, что соответствует каскаду не энергетического, а спирального инварианта. Что же касается спектра спиральности, то на всех сетках результаты вплоть до самых высоких гармоник совпадают с формулой (5.92), в которую входит только скорость диссипации энергии и не входит скорость диссипации спиральности.

Еще один инвариант – *спиральность* – введен Моффатом в 1969 году:

$$H = \int_V (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV. \quad (5.87)$$

Спиральность характеризует степень связности вихревых линий в потоке [36]. Поле с отличной от нуля спиральностью представляет собой анизотропный континуум, образованный совокупностью произвольно ориентированных мелкомасштабных вихревых структур, в которых правовращательные вихревые структуры, например, более вероятны, чем левовращательные. Уравнение баланса для спиральности по аналогии с уравнениями сохранения энергии и энтропии можно представить в виде

$$d_t H = -\nu \int_V (\omega \cdot \text{rot } \omega) dV \equiv -\mathcal{E}_h. \quad (5.88)$$

По своей природе спиральность H (или *скорость диссипации спиральности* $\mathcal{E}_h$) является псевдоскаляром, т. е. меняет знак при замене правосторонней системы координат на левостороннюю. Это значительно усложняет теоретический анализ турбулентности. Вообще говоря, было бы правильнее называть величину $\mathcal{E}_h$ не скоростью диссипации, а, скорее, скоростью генерации спиральности (т. к. она может принимать как положительные, так и отрицательные значения в разных точках пространства). Можно предположить, что существуют два режима каскадных процессов в системе. В некоторых случаях (по аналогии с двумерной турбулентностью) имеет место каскад сохраняемых величин к противоположным концам инерционного интервала. Однако существует возможность и одновременного прямого каскада обеих величин к малым масштабам. Какой процесс будет иметь место в некоторый данный момент времени, зависит от интегральных свойств рассматриваемой системы, а также от граничных и начальных условий [39]. Из анализа размерности следует, что в областях доминирования спиральных диссипативных потоков распределение энергии по пространственным масштабам примет вид

$$E(k) = C_h \mathcal{E}_h^{2/3} k^{-7/3}. \quad (5.89)$$

Аналогично для структурных функций можно написать:

$$S_q(l) \sim \mathcal{E}_h^{q/3} l^{2q/3}. \quad (5.90)$$

Кроме этого, рассмотрим спектральную плотность спиральности $E_h(\mathbf{k}) = \int_{|\mathbf{k}|} \langle |h(\mathbf{k})|^2 \rangle d\mathbf{k}$, где $h(\mathbf{k})$ — образ Фурье плотности спиральности. Распределение этой статистической величины в обоих инерционных интервалах будет иметь вид

$$E_h(k) = \tilde{C} \mathcal{E}_h^{4/3} k^{2/3} \quad (5.91)$$

и

$$E_h(k) = \tilde{C}_h \mathcal{E}_h^{4/3} k^{-2/3}. \quad (5.92)$$

Для исследования этого свойства проведены расчеты энергетического спектра на более подробных сетках $256 \times 256 \times 256$ и $384 \times 384 \times 384$ (рис. 5.29). Начиная с гармони-

ки $k \sim 45$, наклон спектральной характеристики увеличивается и становится близким к $-7/3$. Для сравнения приведем результаты *DNS*-расчета задачи об однородной изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости, взятые из работы [40]. Данные расчеты проводились в центре информационных технологий университета Нагои в Японии на суперкомпьютере *VPP5000*. Используемые сетки: 256^3 , 512^3 , 1024^3 , 2048^3 , 4096^3 . Вязкость для каждой сетки подбиралась из условия $k_{max} \lambda \sim 2$, где λ – колмогоровский масштаб, k_{max} – самое большое волновое число, разрешаемое сеткой. На рисунке 5.30 наклон в инерциальной области спектра равен $-5/3 - \mu$, где $\mu \sim 0,1$.

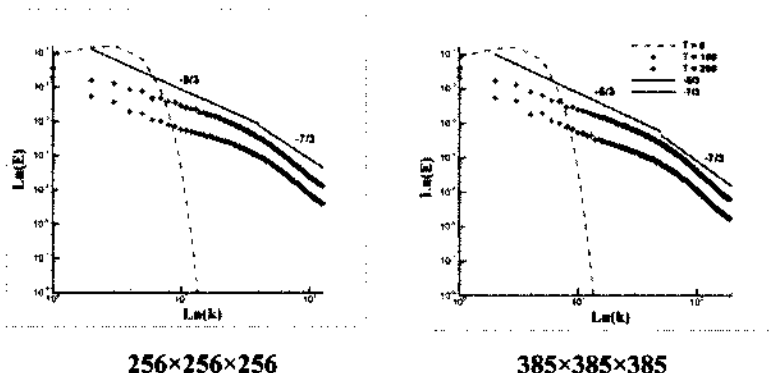


Рис. 5.29. Энергетические спектры $E(k)$ в моменты времени $T = 0, 100, 200$

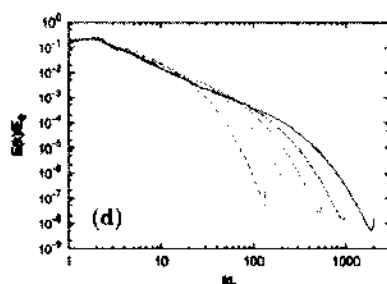


Рис. 5.30. *DNS*-моделирование турбулентности. Сетки 256^3 , 512^3 , 1024^3 , 2048^3 , 4096^3

Рассмотрим поведение структурных функций (первых пяти порядков) (рис. 5.31–5.34). Чем выше порядок структурной функции, тем хуже точки ложатся на теоретическую зависимость. На первых двух сетках наклоны соответствуют закону Колмогорова – Обухова. Однако на более подробных сетках помимо колмогоровского наклона на малых масштабах возникает наклон соответствующий спиральному инварианту (5.90).

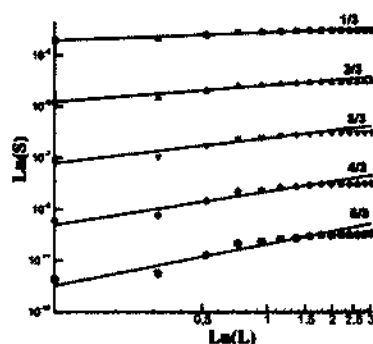


Рис. 5.31. Распределение структурных функций по пространственным масштабам. Сетка $32 \times 32 \times 32$

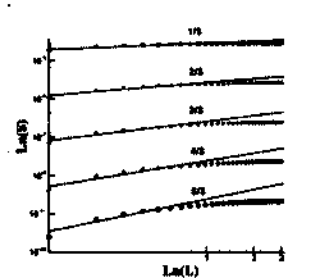


Рис. 5.32. Распределение структурных функций по пространственным масштабам. Сетка $64 \times 64 \times 64$

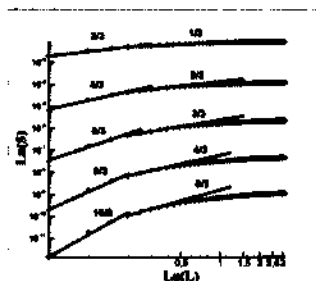


Рис. 5.33. Распределение структурных функций по пространственным масштабам. Сетка $128 \times 128 \times 128$

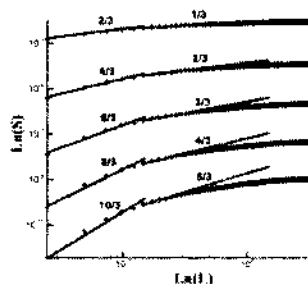


Рис. 5.34. Распределение структурных функций по пространственным масштабам. Сетка $256 \times 256 \times 256$

Заключение к главе 5

В данной главе представлен новый подход к моделированию турбулентных течений, основанный на использовании алгоритма высокой разрешающей способности «КАБАРЕ». Данный алгоритм обладает несколькими ключевыми свойствами: *бездиссипативностью, хорошими дисперсионными свойствами, компактностью шаблона, монотонностью, оптимальной аппроксимацией временных и пространственных производных*. Эти свойства качественно выделяют методику «КАБАРЕ» среди прочих *LES- (ILES-)* алгоритмов, т. к. они обеспечивают наиболее правильное поведение каскадных механизмов передачи энергии внутри инерционных интервалов даже на очень грубых сетках.

Отметим основные положения данной главы:

1. Методика «КАБАРЕ» обобщена на случай двумерной несжимаемой жидкости для трех типов переменных («скорость – давление», «завихренность – функция тока», «завихренность – давление»). Работоспособность предложенных алгоритмов показана на примере тестовых расчетов с одиночными вихревыми структурами и задачи о затухающей однородной турбулентности.
2. Показано, что схема «КАБАРЕ» в двумерном случае обладает свойством бездиссипативности при моделировании одиночных неподвижных вихрей и дает малую диссипацию при моделировании динамики взаимодействия вихрей.
3. Фазовые ошибки, привносимые алгоритмом, малы, что следует из сравнения результатов расчета по схеме «КАБАРЕ» с результатами схемы Аракавы.
4. Наклоны энергетических спектров и структурных функций при моделировании однородной изотропной турбулентности соответствуют теории двумерной турбулентности Бэтчелора. Причем наклоны сохраняют свои значения вплоть до самых высоких гармоник, разрешаемых расчетной сеткой.
5. Проведено обобщение методики «КАБАРЕ» на случай трехмерной несжимаемой жидкости в естественных переменных и показано, что полученный алгоритм качественно правильно моделирует поведение локализованных вихрей с относительно малыми диссипативными и дисперсионными ошибками.
6. На грубых сетках в задаче об однородной изотропной турбулентности наклоны энергетических спектров и структурных функций соответствуют теории Колмо-

горова K41, однако, при более мелком разбиении в области больших волновых чисел появляется влияние спирального инварианта (наклон спектра близок к $-7/3$). Вопрос о том, должно ли это влияние возникать или нет, остается открытым. Возможно, схема «КАБАРЕ» требует более тонкой настройки в плане вычисления потоковых переменных.

Таким образом, показано, что *ILES*-алгоритм на основе схемы «КАБАРЕ» обладает свойствами, близкими к *PLES*- алгоритмам. Кроме того, схема «КАБАРЕ» определена на максимально компактном вычислительном шаблоне, что заметно повышает эффективность ее распараллеливания. Затраты на ее вычислительную реализацию также оказываются заметно ниже, чем затраты на ранее используемые схемы.

Литература к главе 5

1. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.
2. Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – Series A – 1895. – V.186 – P. 123–161.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика: в 2 т. – Т. 1–2. – М.: Наука, 1965–1967.
4. Рейнольдс А. Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. – М.: Энергия, 1979. – 408 с.
5. Peng S.-H., Haase W. Advances in Hybrid RANS-LES modeling. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
6. Kassinos S. C., Langer C. A. Complex Effects in Large Eddy Simulations. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
7. Berselli L. C., Iliescu T., Layton W. J. Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
8. Volker J. Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Flows. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
9. Volker J. Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Flows. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
10. Berselli L. C., Iliescu T., Layton W. J. Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
11. Love M. D. Subgrid modeling studies with Burgers equation. // J. Fluid Mech., 1980). Vol. 100 – Part 1 – P. 87–110.
12. Chollet J. P., Metais O. Predictability of three-dimensional turbulence in large-eddy simulations. // Eur. J. Mech., B/Fluids. – 1989. – 8 – P. 523–548.
13. Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. // J. Comput. Phys. – 1983. – 49 – P. 357–393.
14. Boris J. P., Book D. L., Hain K. Flux-corrected transport: Generalization of the method. // J. Comput. Phys. – 1975. – 31 – P. 335–350.
15. Boris, J. P., Grinstein, F. F., Oran, E. S., & Kolbe, R. L. New insights into large eddy simulation // J. Fluid Dyn. Res. – 1992. – 10 – P. 199–228.

16. Margolin L.G., Rider W.J. A rational for implicit turbulence modeling // International Journal for Numerical Methods in Fluids. – 2002. – 39 – P. 821–841.
17. Fernando F. Grinstein, Len G. Margolin, William J. Rider. Implicit Large Eddy Simulation. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
18. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. Моделирование. – 1998. – 10:1 – P.86–100.
19. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы «КАБАРЕ». – Матем. Моделирование. – 1998. – 10:1 – P.:101–116.
20. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М. Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. – 2003. – Т.15 – № 9 – С. 29–48.
21. Головизнин В.М., Карабасов С.А. Нелинейная коррекция схемы «КАБАРЕ». 1998 – 10:12 – С. 107–123.
22. Саркисов А.А., Филиппов Г.А. Фундаментальные проблемы моделирования турбулентных и двухфазных течений : в 2 т. – Т. 2: Численное моделирование. – Наука, 2010. – 368 с.
23. Kraichnan R.H. Phys. Fluids. – 10. –1417 – 1967.
24. Sommeria J. Experimental study of two-dimensional inverse energy cascade in a square box. // J.Fluid Mech. – 170 – 1986. – P. 139–168.
25. Paret J, Tabeling P. Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade. // Phys. Rev. Lett. – 79 – 1997. – P. 4162–4165.
26. Tabeling P., Hansen A.E., Paret J. Forced and decaying 2D turbulence: experimental study. // Lecture notes in physics.– Volume 511/1998 – 1998 – P. 145–169.
27. Tabeling P. Two-dimensional turbulence: a physicist approach // Physics Reports – Vol. 362 – 2002 – P. 1–62.
28. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. // Докл. АН СССР. – 1941. – Т. 30 – №4 – С. 299–303.
29. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 156–161.
30. Borue V. Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. // Phys.Rev.Lett. – 1994. –Vol. 72. – P. 1475–1478.
31. Chasnov J.R. On the decay of two-dimensional turbulence. // Phys. Fluids. – 1997. – Vol. 9.– №1. – P. 171–180.
32. Kida S., Yamada M., Ohkitani K. The energy spectrum in the universal range of two-dimensional turbulence. // Fluid Dynamics Research. – 4. –1988. – P. 271–301.
33. Batchelor G.K. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. // Phys. Of Fluids. – 1967. – Vol. 12, Suppl. 2. – P. 233–239.
34. Herring J.R., Orszag S.A., Kraichnan R.H., Fox D.J. Decay of two-dimensional turbulence homogeneous turbulence. // J. Fluid Mech. – 1974. – Vol. 66. – P. 417–444.
35. Maltrud M.E., Vallis G.K. Energy spectra and coherent structures in forced two-dimensional and beta-plane turbulence. // J. Fluid Mech. – 228 – 1991 – P. 321–342.
36. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. – 504 с.

37. *Arakawa A.* Computational Design for Long-Term Numerical Integration of the Equations of Fluid Motion: Two-Dimensional Incompressible Flow, Part II. // *Journal of computational physics*. – 1977. – P. 103–114.
38. *Роч П.* Вычислительная гидродинамика. – Город: Издательство, 1980. – С. 160–161.
39. *Колесниченко А.В., Маров М.Я.* О влиянии спиральности на эволюцию турбулентности в солнечном турбулентном облаке. // *Астрономический вестник*. – 2007. – Т. 41. – № 1 – С. 1–20.
40. *Kaneda Y., Ishihara T.* High-resolution direct numerical simulation of turbulence. // *Journal of Turbulence* – 2006. – Vol. 7. – No. 20.

Прямое моделирование термоконвективных течений в замкнутых двумерных и трехмерных областях

Введение

Под термином «естественная (или свободная) конвекция» в общем случае понимают движение жидкости или газа, возникающее за счет сил Архимеда при наличии неоднородности плотности жидкости в поле массовых сил. Мы будем иметь в виду под этим термином термогравитационную конвекцию, то есть случай, когда неоднородности жидкости связаны с ее неравномерным нагревом и в поле силы тяжести возникает течение. При этом будем рассматривать жидкости и газы, плотность которых падает с ростом температуры (например, вода в интервале температур от 0 до 4 °С имеет аномальное поведение).

Задача о естественной конвекции в замкнутых областях при заданных температурах на боковых поверхностях встречается во многих инженерно-технических установках и конструкциях, начиная от обычных стеклопакетов в окнах и заканчивая сложнейшими системами охлаждения и теплосъема в атомных реакторах. Это одна из первых классических задач конвективного теплообмена, которая решалась на основе уравнений Навье – Стокса. Считается, что первым сформулировал и дал приближенные решения данной задачи еще Бэтчелор в 1954 году [1]. Практически сразу последовали первые попытки провести численное моделирование [2,3] и сравниться с известными на тот момент результатами экспериментов. Действительно, в силу простоты постановки, эта задача имеет не только практическое значение, но и является очень удобным и распространенным тестом для разрабатываемых вычислительных методов и моделей турбулентности.

Физической особенностью естественной конвекции в замкнутых областях при боковом подогреве является взаимодействие восходящего и нисходящего конвективных потоков, в результате которого устанавливается выраженная вертикальная стратификация вдоль вертикальной оси и формируется довольно сложная и существенно зависящая от числа Рэлея и геометрии области вихревая структура течения. Все эти особенности сложного течения, включая переход к турбулентному режиму конвекции, удастся с достаточной для практических целей точностью рассчитать на основе численного решения нестационарных уравнений Навье – Стокса.

Получение детальных данных о характере тепломассообмена и его свойствах, очевидно, невозможно без эффективной вычислительной методики, которая

моделировала бы все особенности структуры свободноконвективного течения. Анализ монографии [4] показывает, что режимы течения связаны не только с числом Рэлея и геометрией области, но и со свойствами жидкости (газа). К настоящему моменту разработано множество методов численного моделирования термоконвекции, которые, в принципе, позволяют проводить исследования для различной геометрии области в достаточно широком диапазоне изменения чисел Рэлея и Прандтля, однако методические и технические трудности ограничивают диапазон применения большинства из этих методов в области больших чисел Рэлея [5,6]. Основная часть работ по математическому моделированию связана с решением задач термоконвекции при малых и умеренных числах Рэлея.

Проблема быстрого и точного моделирования свободноконвективного течения при очень больших числах Рэлея (например, больше 10^{11}) актуальна до сих пор. Для решения такого рода задач требуются очень подробные сетки в пристеночной области для разрешения пограничного слоя. Именно в тонком пограничном слое сосредотачивается основной перепад температур и происходит вихревой теплообмен со стенкой, который необходимо разрешать. Толщина этого слоя может быть вычислена по формуле [7]:

$$\delta = \left(\frac{L_y L_x^3}{Gr} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{L_y L_x^3}{Ra} Pr \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (6.1)$$

Здесь Gr , Ra , Pr – основные безразмерные параметры, характеризующие геометрию области, граничные условия и физические свойства теплоносителя. L_x и L_y – геометрические размеры области по горизонтали и вертикали соответственно.

Из данной формулы видно, что уже при числе Рэлея 10^{11} в единичной квадратной области, заполненной воздухом ($Pr = 0,71$), образуется пограничный слой толщиной всего около 1/600 от ширины области. Иными словами, чтобы корректно смоделировать пристеночное течение газа при данном числе Рэлея, потребуются исключительно подробная сетка даже в двумерной постановке. Между тем, на практике в промышленных установках встречаются течения с числом Рэлея гораздо выше 10^{11} , достигая 10^{14} и даже 10^{17} .

Развитие современной вычислительной техники и технологий параллельных вычислений привело к тому, что на сегодняшний день вполне могут быть рассчитаны задачи на сетках, состоящих из миллиарда ячеек. Последние публикации [8], например, показывают, что прямым численным моделированием (*DNS*) на сетке $128 \times 682 \times 1278$ (а это порядка 100 миллионов узлов) решена задача о тепловой конвекции в вертикальном слое при числе Рэлея 10^{11} . Однако даже сегодня такие расчеты являются очень дорогими и длительными, а расчеты при еще больших числах Рэлея обычными прямыми методами становятся пока просто невозможными.

Таким образом, при исследовании свободноконвективных течений при экстремально высоких числах Рэлея особую актуальность приобретают вычислительные методы, не требующие колоссального количества расчетных узлов и остающиеся при

этом достаточно точными для решения практических задач. Один из таких методов – схема «КАБАРЕ», имеющая в своей основе только нестационарную систему уравнений Навье – Стокса, приближение Буссинеска, уравнение теплопроводности и ряд базовых принципов вычислительной математики (таких, как принцип максимума и принцип наименьшего возрастания парциальной локальной вариации [9], [10]).

Схема «КАБАРЕ», являясь консервативной 2-го порядка аппроксимации, позволяет использовать очень грубые сетки, точно передавая при этом все особенности свободноконвективного турбулентного течения, в том числе образование и взаимодействие вихрей, перенос тепла, пульсации температуры. Например, как будет показано ниже, упомянутая здесь задача о тепловой конвекции в вертикальном слое при числе Рэлея 10^{11} может быть успешно решена на сетке всего $8 \times 16 \times 40$ ячеек (при должном сгущении). В кубической области при данном числе Рэлея достаточно сетки $20 \times 20 \times 20$ ячеек. При этом полученные результаты (например, тепловой поток от горячей стенки внутрь области) будут полностью согласованы с результатами *DNS*.

Настоящая глава посвящена описанию схемы «КАБАРЕ» для моделирования тепловой конвекции несжимаемой жидкости и всесторонней верификации данного алгоритма с различными численными методами, экспериментами и эмпирическими соотношениями. Результаты, полученные по двумерной схеме «КАБАРЕ», будут также соотноситься и с результатами трехмерных численных методик и экспериментов в случае, когда течение в трехмерной области оказывается квазидвухмерным или близким к двумерному. Все расчеты при этом выполнены на показательно грубых сетках для наглядной демонстрации высокой эффективности новой схемы и ее потенциала.

6.1. Схема «КАБАРЕ» для моделирования тепловой конвекции несжимаемой жидкости в двумерном случае

6.1.1. Математическая модель

Рассматривается естественная конвекция несжимаемой жидкости (газа) в замкнутой прямоугольной области со сторонами $H \times L$, где H – высота области, L – ее ширина (рис. 6.1). Температуры левой и правой стенок постоянны и равны, соответственно, T_c и T_h , $T_c < T_h$. Верхняя и нижняя стенки теплоизолированы. Вектор силы тяжести $\vec{g}$ направлен вниз вдоль оси y . На всех четырех стенках обе компоненты скорости жидкости обращаются в ноль (условие прилипания).

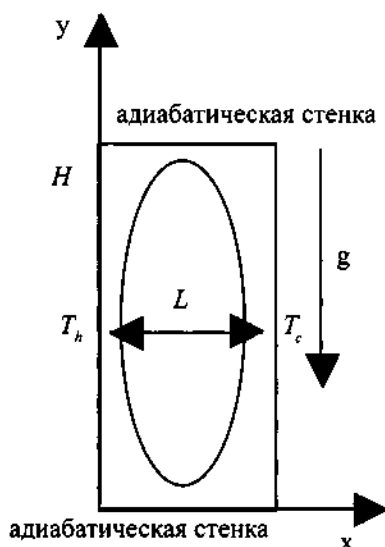


Рис. 6.1. Тепловая конвекция в прямоугольной области

Пусть $T(x, y)$ – температура жидкости внутри области, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – компоненты скорости жидкости, где $x \in [0, L]$, $y \in [0, H]$.

Граничные условия по температуре для вертикальных стенок, таким образом, будут иметь вид:

$$T(x, y)|_{x=0} = T_c; \quad T(x, y)|_{x=L} = T_h. \quad (6.2)$$

Для горизонтальных:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=H} = 0. \quad (6.3)$$

Условие прилипания на стенках области:

$$\begin{aligned} u(x, y)|_{x=0} &= u(x, y)|_{x=L} = u(x, y)|_{y=0} = u(x, y)|_{y=H} = 0; \\ v(x, y)|_{x=0} &= v(x, y)|_{x=L} = v(x, y)|_{y=0} = v(x, y)|_{y=H} = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Исходной для расчета является система нестационарных уравнений тепловой конвекции несжимаемой «жидкости Буссинеска» в двумерном случае:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u + \beta g_x (T - T_0), \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v + \beta g_y (T - T_0), \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} = \alpha \Delta T. \quad (6.8)$$

Здесь ν – кинематическая вязкость ($\nu = \mu/\rho$, где μ и ρ , соответственно, динамическая вязкость и плотность); α – коэффициент температуропроводности

($\alpha = \frac{\kappa}{c_p \rho}$, где κ и c_p – коэффициент теплопроводности и теплоемкость жидкости); β – коэффициент объемного теплового расширения жидкости; g_x и g_y – компоненты ускорения свободного падения; T_0 – равновесная температура; $P(x, y)$ – давление; Δ – оператор Лапласа.

Физические и геометрические параметры задачи описываются, главным образом, двумя основными безразмерными параметрами. Это число Рэлея

$$Ra = \frac{\beta g (T_h - T_c) L^3}{\alpha \nu} \quad (6.9)$$

и Прандтля

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}. \quad (6.10)$$

Кроме этих двух параметров важную роль играет такой геометрический параметр, как аспектное соотношение сторон расчетной области $A = H/L$ – отношение высоты области к ее ширине.

Возникающий между изотермическими стенками теплообмен характеризуется еще одним безразмерным параметром – числом Нуссельта. Среднее число Нуссельта, например, левой стенки можно записать следующим образом:

$$Nu_{wall} = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle_{x=0} \frac{L}{T_h - T_c}. \quad (6.11)$$

Число Нуссельта показывает отношение среднего потока тепла при наличии конвекции к потоку тепла, переносимому путем теплопроводности.

6.1.2. Дискретизация задачи

На рассматриваемую область $H \times L$ наложим прямоугольную расчетную сетку с N_x узлами по вертикали и N_y узлами по горизонтали (рис. 6.2). Занумеруем узлы по горизонтальной оси от 1 до N_x , а по вертикальной – от 1 до N_y . Таким образом, получим прямоугольную сетку, содержащую $N_x \cdot N_y$ узлов или $(N_x - 1) \cdot (N_y - 1)$ ячеек. Граничные узлы при этом ложатся на границу области.

Схема «КАБАРЕ» оперирует двумя типами переменных: консервативными, относящимися к центрам ячеек, и потоковыми, которые относятся к центрам граней ячеек. Консервативные переменные будут иметь дробную нумерацию, потоковые – смешанную (рис. 6.2). При численном решении уравнений Навье – Стокса потребуется решать уравнение для давления. Давление, как и дивергенция скорости, рассчитанная по консервативным переменным, будет относиться непосредственно к узлам расчетной сетки и иметь целую нумерацию.

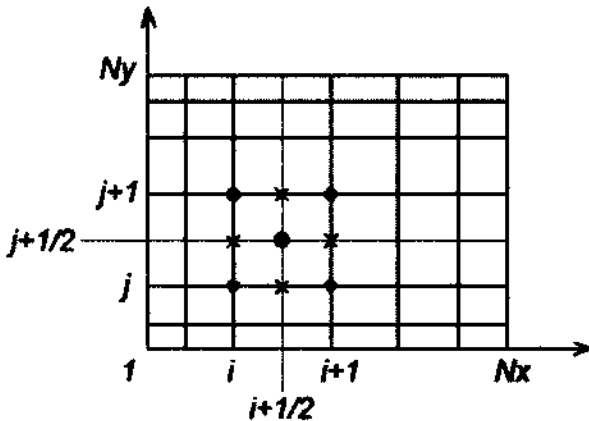


Рис. 6.2. Наложение на расчетную область регулярной прямоугольной сетки

Пусть у каждой переменной верхний индекс обозначает номер слоя по времени, нижний – пространственное положение переменной на расчетной сетке, для этого введем локальные обозначения, как показано на рис. 6.3.

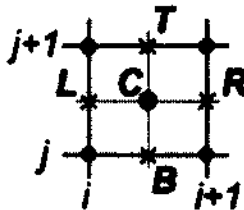


Рис. 6.3. Локальные обозначения переменных

Обозначим консервативные переменные (компоненты скорости и температуру) соответствующими прописными буквами (U, V, T), потоковые – строчными (u, v, θ). Горизонтальный шаг сетки (расстояние между узлами) – h_x , вертикальный – h_y . Шаг по времени – τ .

В дискретном виде алгоритм решения системы уравнений – представляет собой последовательность трех стандартных этапов (фаз) с некоторыми дополнениями.

В фазе 1 вычисляются промежуточные значения консервативных переменных на половинном временном слое:

$$\frac{\tilde{U}_C^{n+1/2} - U_C^n}{\tau/2} + \frac{(u_R^n)^2 - (u_L^n)^2}{h_x} + \frac{u_T^n v_T^n - u_B^n v_B^n}{h_y} = \nu \Delta_h U_C^n + \beta g_x (T_C^n - T_0), \quad (6.12)$$

$$\frac{\tilde{V}_C^{n+1/2} - V_C^n}{\tau/2} + \frac{u_R^n v_R^n - u_L^n v_L^n}{h_x} + \frac{(v_T^n)^2 - (v_B^n)^2}{h_y} = \nu \Delta_h V_C^n + \beta g_y (T_C^n - T_0), \quad (6.13)$$

$$\frac{T_C^{n+1/2} - T_C^n}{\tau/2} + \frac{u_R^n \theta_R^n - u_L^n \theta_L^n}{h_x} + \frac{v_T^n \theta_T^n - v_B^n \theta_B^n}{h_y} = \alpha \Delta_h T_C^n. \quad (6.14)$$

Здесь Δ_h – численный лапласиан.

Из последних трех уравнений при заданных граничных условиях могут быть найдены предварительные значения консервативных компонент скоростей $\tilde{U}_C^{n+1/2}$ и $\tilde{V}_C^{n+1/2}$, а также консервативные значения температуры $T_C^{n+1/2}$ на половинном временном слое. Для нахождения окончательных значений консервативных скоростей на половинном слое воспользуемся фазой 1а, в которой учтено давление:

$$\frac{U_C^{n+1/2} - \tilde{U}_C^{n+1/2}}{\tau/2} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_h p^{n+1/2}, \quad (6.15)$$

$$\frac{V_C^{n+1/2} - \tilde{V}_C^{n+1/2}}{\tau/2} = - \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_h p^{n+1/2}. \quad (6.16)$$

Если расписать численные операторы дифференцирования в последних двух выражениях, получим

$$\frac{U_C^{n+1/2} - \tilde{U}_C^{n+1/2}}{\tau/2} = - \frac{(P_{RT}^{n+1/2} + P_{RB}^{n+1/2}) - (P_{LT}^{n+1/2} + P_{LB}^{n+1/2})}{2h_x}, \quad (6.17)$$

$$\frac{V_C^{n+1/2} - \tilde{V}_C^{n+1/2}}{\tau/2} = - \frac{(P_{RT}^{n+1/2} + P_{LT}^{n+1/2}) - (P_{RB}^{n+1/2} + P_{LB}^{n+1/2})}{2h_y}. \quad (6.18)$$

Двойные нижние индексы давления обозначают узел, которому принадлежит данное давление (рис. 6.4).

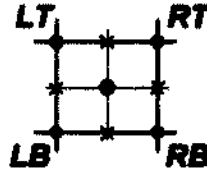


Рис. 6.4. Локальные обозначения переменных, принадлежащих узлам сетки

Взяв производную по оси x от обеих частей уравнения (6.15), производную по оси y от обеих частей уравнения (6.16), и сложив полученные выражения, придем к уравнению:

$$\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_h U_C^{n+1/2} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_h V_C^{n+1/2} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_h \tilde{U}_C^{n+1/2} - \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_h \tilde{V}_C^{n+1/2} \right\} \frac{2}{\tau} = \quad (6.19)$$

$$= - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]_h p^{n+1/2} - \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]_h p^{n+1/2}$$

или

$$\left(\operatorname{div}_h \mathbf{V}_C^{n+1/2} - \operatorname{div}_h \tilde{\mathbf{V}}_C^{n+1/2} \right) \frac{2}{\tau} = -\Delta_h p^{n+1/2}. \quad (6.20)$$

Из уравнения (6.5) следует, что $\operatorname{div}_h \mathbf{V}_C^{n+1/2} = 0$. Таким образом, получаем уравнение Пуассона для давления:

$$\Delta_h p^{n+1/2} = \frac{2}{\tau} \operatorname{div}_h \tilde{\mathbf{V}}_C^{n+1/2}. \quad (6.21)$$

Из последнего уравнения итерационными методами можно найти величины $p^{n+1/2}$ для подстановки в уравнения (6.15)–(6.16).

В фазе 2 рассчитываются потоковые величины на новом временном слое по следующему алгоритму:

1. Если $U_{CL} > 0$ и $U_{CR} > 0$ (рис. 6.5), то

$$u_i^{n+1} = 2U_{CL} - u_{i-1}^n; \quad v_i^{n+1} = 2V_{CL} - v_{i-1}^n; \quad \theta_i^{n+1} = 2T_{CL} - \theta_{i-1}^n. \quad (6.22)$$

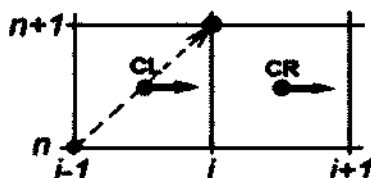


Рис. 6.5. Вычисление потоковых переменных на новом временном слое, течение направлено вправо

2. Если $U_{CL} < 0$ и $U_{CR} < 0$ (рис. 6.6), то

$$u_i^{n+1} = 2U_{CR} - u_{i+1}^n; \quad v_i^{n+1} = 2V_{CR} - v_{i+1}^n; \quad \theta_i^{n+1} = 2T_{CR} - \theta_{i+1}^n. \quad (6.23)$$

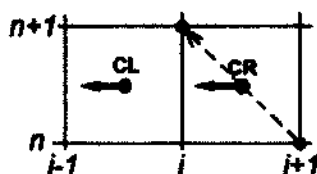


Рис. 6.6. Вычисление потоковых переменных на новом временном слое, течение направлено влево

3. Если $U_{CL} < 0$ и $U_{CR} > 0$ (рис. 6.7), то

$$u_i^{n+1} = 0; \quad v_i^{n+1} = v_{i-1}^n; \quad \theta_i^{n+1} = \theta_{i-1}^n. \quad (6.24)$$

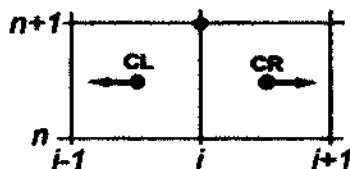


Рис. 6.7. Конфликт потоков (течение в соседних ячейках разнонаправлено)

4. Если $U_{CL} \geq 0$ и $U_{CR} \leq 0$ (рис. 6.8), то в каждой точке вычисляем два варианта потоковой переменной u_i^{n+1} : по формуле (6.22) и по формуле (6.23). Из них, согласно принципу минимума парциальной локальной вариации [10], выбираем ту переменную, значение которой по модулю больше:

$$u_i^{n+1} = \max \left\{ \left| 2U_{CL} - u_{i-1}^n \right|, \left| 2U_{CR} - u_{i+1}^n \right| \right\}. \quad (6.25)$$

Если $|2U_{CL} - u_{i-1}^n| > |2U_{CR} - u_{i+1}^n|$, то переменные v_i^{n+1} и θ_i^{n+1} вычисляются по формулам (6.22). В противном случае – по формулам (6.23).

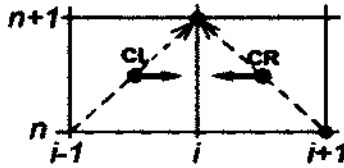


Рис. 6.8. Конфликт потоков (течение в соседних ячейках сонаправлено)

Аналогично производится расчет новых потоковых переменных по другому пространственному направлению.

Полученные значения потоковых переменных на новом временном слое неокончательные. Они должны быть скорректированы в соответствии с принципом максимума следующим образом. Пусть какая-либо из потоковых переменных, например θ , была вычислена исходя из данных в ячейке C (рис. 6.3). И пусть

$$\theta_{\max} = \max \{ \theta_L^n, \theta_R^n, \theta_T^n, \theta_B^n, T_C^{n+1/2} \} + \tau Q_{\partial C}, \quad (6.26)$$

$$\theta_{\min} = \min \{ \theta_L^n, \theta_R^n, \theta_T^n, \theta_B^n, T_C^{n+1/2} \} + \tau Q_{\partial C}. \quad (6.27)$$

В последних двух уравнениях $Q_{\partial C}$ получается из характеристической формы исходной системы уравнений (6.5)–(6.8). Например, для потоковой переменной температуры на вертикальной грани $\theta_{i,j+1/2}$:

$$Q_{\partial C} = \frac{T_C^{n+1/2} - T_C^n}{\tau/2} + \frac{u_L^n + u_R^n}{2} \frac{\theta_R^n - \theta_L^n}{h_x}. \quad (6.28)$$

Тогда значение корректируемой потоковой переменной модифицируется:

$$\theta^{n+1} = \begin{cases} \theta^{n+1}, & \text{if } \theta_{\min} \leq \theta^{n+1} \leq \theta_{\max} \\ \theta_{\min}, & \text{if } \theta^{n+1} < \theta_{\min} \\ \theta_{\max}, & \text{if } \theta^{n+1} > \theta_{\max} \end{cases}. \quad (6.29)$$

Следующим шагом будет приведение скорректированных потоковых переменных скорости к дивергентному виду. Для этого потребуются разрешить уравнение Пуассона для давления для потоковых переменных аналогично тому, как это было сделано в

фазе 1а. Основное отличие будет заключаться в том, что для потоковых переменных давление будет относиться не к узлам, а к центрам ячеек.

Таким образом, будут найдены все потоковые переменные на новом временном слое $n+1$, и их дивергенция в каждой точке будет равна нулю.

В фазе 3 вычисляются окончательные значения консервативных скоростей и температур на новом временном слое. При этом, в отличие от фазы 1, шаг по времени берется целый:

$$\frac{T_c^{n+1} - T_c^n}{\tau} + \frac{1}{2} \{ \mathbf{L}T_h(u^n, v^n, \theta^n) + \mathbf{L}T_h(u^{n+1}, v^{n+1}, \theta^{n+1}) \} = \alpha \Delta_h T_c^n, \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_c^{n+1} - U_c^n}{\tau} + \frac{1}{2} \{ \mathbf{L}U_h(u^n, v^n) + \mathbf{L}U_h(u^{n+1}, v^{n+1}) \} = \\ = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_h p^{n+1/2} + \nu \Delta_h U_c^n + \beta g_x \left(\frac{1}{2} (T_c^{n+1} + T_c^n) - T_0 \right), \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_c^{n+1} - V_c^n}{\tau} + \frac{1}{2} \{ \mathbf{L}V_h(u^n, v^n) + \mathbf{L}V_h(u^{n+1}, v^{n+1}) \} = \\ = - \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_h p^{n+1/2} + \nu \Delta_h V_c^n + \beta g_y \left(\frac{1}{2} (T_c^{n+1} + T_c^n) - T_0 \right), \end{aligned} \quad (6.32)$$

где

$$\mathbf{L}U_h(u^n, v^n) = \frac{(u_R^n)^2 - (u_L^n)^2}{h_x} + \frac{u_T^n v_T^n - u_B^n v_B^n}{h_y}, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{L}V_h(u^n, v^n) = \frac{u_R^n v_R^n - u_L^n v_L^n}{h_x} + \frac{(v_T^n)^2 - (v_B^n)^2}{h_y}, \quad (6.34)$$

$$\mathbf{L}T_h(u^n, v^n, \theta^n) = \frac{u_R^n \theta_R^n - u_L^n \theta_L^n}{h_x} + \frac{v_T^n \theta_T^n - v_B^n \theta_B^n}{h_y}. \quad (6.35)$$

Таким образом, при заданных граничных условиях (см. ниже) по известным значениям консервативных и потоковых переменных на временном слое n однозначно определяются значения консервативных и потоковых переменных на слое $n+1$. После чего цикл, состоящий из трех описанных фаз, повторяется.

6.1.3. Граничные условия

В приведенном выше алгоритме граничные условия следует учитывать при вычислении потоковых переменных, лежащих на границе расчетной области, при вычислении численного лапласиана на прилегающих к границе ячейках и при решении уравнения Пуассона для давления.

Потоковые переменные на границе области задаются в соответствии с граничными условиями (6.2)–(6.4):

$$\theta_{0,j+1/2} = T_c; \quad \theta_{N_x,j+1/2} = T_h; \quad \theta_{i+1/2,0} = T_{i+1/2,1/2}; \quad \theta_{i+1/2,N_y} = T_{i+1/2,N_y-1/2}; \quad (6.36)$$

$$u_{0,j+1/2} = u_{N_x,j+1/2} = u_{i+1/2,0} = u_{i+1/2,N_y} = 0; \quad (6.37)$$

$$v_{0,j+1/2} = v_{N_x,j+1/2} = v_{i+1/2,0} = v_{i+1/2,N_y} = 0. \quad (6.38)$$

При вычислении лапласиана скорости или температуры на прилегающих к границам ячейках можно воспользоваться различными способами аппроксимации потоков на стенках. Одним из наиболее простых и достаточно точных способов является квадратичная аппроксимация по ближайшим к границе консервативным и потоковым переменным. Рассмотрим, например, несколько прилежащих к стенке ячеек, как показано на рис. 6.9.

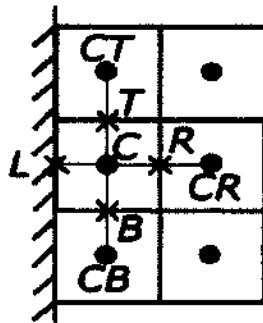


Рис. 6.9. Численный лапласиан на границе расчетной области

Численный лапласиан некоторой переменной F_C в ячейке C может быть записан в следующем виде:

$$\Delta_h F_C = \text{div}_h (\text{grad}_h F_C) = \frac{f_R - f_L}{h_x} - \frac{f_T - f_B}{h_y}, \quad (6.39)$$

где f – потоки через соответствующие грани ячейки C :

$$f_R = \frac{F_{CR} - F_C}{h_x}, \quad f_T = \frac{F_{CT} - F_C}{h_y}, \quad f_B = \frac{F_C - F_{CB}}{h_y}. \quad (6.40)$$

Для простоты, чтобы не перегружать описание переменными, в данном случае будем считать расчетную сетку равномерной.

Поток через левую (лежащую на стенке) грань будет зависеть от граничного условия. Если задано граничное условие второго рода, то поток на стенке f_L можно легко определить. Например, если речь идет о температуре и об условии полной теплоизоляции на стенке, то $f_L = 0$.

Если задано граничное условие первого рода (то есть значение переменной на стенке F_L), то поток f_L необходимо аппроксимировать по известному значению переменной на границе. Аппроксимация с первым порядком задействует только одну ближайшую к стенке консервативную переменную:

$$f_L = \frac{F_C - F_L}{h_x/2}. \quad (6.41)$$

При квадратичной аппроксимации в формулу для потока на стенке включается ближайшая потоковая переменная F_R :

$$f_L = \frac{4F_C - 3F_L - F_R}{h_x}. \quad (6.42)$$

Последнее выражение для потока на стенке может также использоваться и при вычислении локального числа Нуссельта в каждой пристеночной ячейке области.

Аппроксимация граничных условий для уравнения Пуассона зависит от используемого решателя и выходит за рамки настоящей работы.

6.2. Верификация двумерной схемы «КАБАРЕ» при различных числах Рэлея

6.2.1. Задача Дэвиса. Течение в квадратной области

Рассмотрим двумерное течение газа в квадрате со сторонами 1×1 . Ускорение силы тяжести направлено вниз и равно 1. Число $Pr = 0,71$. Обе компоненты скорости на всех границах расчетной области равны нулю (условие прилипания). Помимо этого,

на горизонтальных стенках адиабатические граничные условия, вертикальные стенки имеют постоянную температуру $T_h = 1$ и $T_c = 0$ (рис. 6.10).

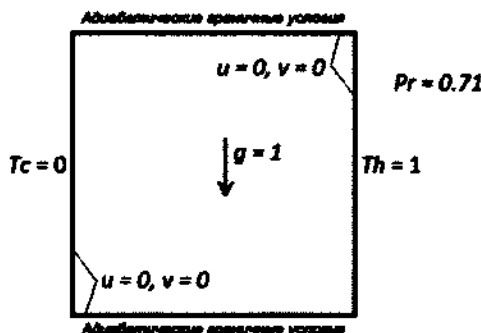


Рис. 6.10. Постановка задачи Дэвиса

Данная задача подробно рассмотрена и численно решена Дэвисом [11] в 1983 году с помощью тщательно верифицированного разностного метода второго порядка при следующих числах Рэлея: 10^3 , 10^4 , 10^5 и 10^6 . Для решения этой задачи автором использовались сгущающиеся сетки 10×10 , 20×20 , 40×40 , 62×62 и 80×80 ячеек. Получены максимальные значения компонент скоростей, средние и максимальные тепловые потоки (числа Нуссельта). Заявлено, что представленные Дэвисом результаты, экстраполированные при сгущении сетки, совпадают с экспериментальными данными в пределах 1 % для сравнительно больших чисел Рэлея (порядка 10^6), и в пределах 0,1 % – для малых (порядка 10^3), что подтверждают более поздние расчеты и эксперименты. Эти результаты являются эталонными для многих исследователей до сих пор [12].

Таким образом, задачу Дэвиса и полученные им результаты можно взять за основу при тестировании схемы «КАБАРЕ» в ламинарном случае. В турбулентном случае, при $Ra > 10^6$, задача Дэвиса также решена другими авторами, например [12,13]. Несмотря на некоторые расхождения в их результатах, проведем сравнение и с ними, доведя число Рэлея до 10^{11} . Дальнейшее увеличение числа Рэлея в данном тесте нецелесообразно, так как нет достоверных данных, с которыми можно было бы провести сравнение. Тесты при больших Ra проведены при других соотношениях сторон расчетной области (см. ниже).

Кроме численных результатов других авторов для верификации можно принять во внимание эмпирический закон [14,15], согласно которому среднее число Нуссельта в турбулентном режиме зависит от числа Рэлея следующим образом:

$$Nu = 0,182 Ra^{0,275}. \quad (6.43)$$

В первой серии расчетов по схеме «КАБАРЕ» выберем равномерную квадратную сетку 50×50 ячеек. Ширина ячейки при этом составит 0,02, что, согласно формуле (6.1), соответствует ширине пограничного слоя при $Ra \approx 4 \cdot 10^6$. Таким образом, следует ожидать, что на данной сетке тест Дэвиса пройдет успешно вплоть до чисел Рэлея порядка 10^6 .

В таблице 6.1 представлены результаты численных экспериментов Дэвиса (экстраполированные при сгущении сетки), современные данные Диксита [12] (полученные на сетках вплоть до 512×512) и результаты, полученные по схеме «КАБАРЕ» на равномерной сетке 50×50 ячеек. Здесь максимальные значения скоростей вычислялись на линиях, проведенных перпендикулярно сторонам через центр области. Ниже в скобках приведены x - и y - координаты найденных максимумов. Также представлены найденные значения средних чисел Нуссельта и соответствующие отклонения в процентах от эталонных результатов, полученных Дэвисом и Дикситом.

Таблица 6.1. Верификационная таблица к задаче Дэвиса, равномерная сетка 50×50 ячеек

Ra	Дэвис [11], экстраполяция			«КАБАРЕ», 50×50 ячеек		
	U _{max} (y)	V _{max} (x)	Nu	U _{max} (y)	V _{max} (x)	Nu (откл.)
10^3	3,489 (0,813)	3,697 (0,178)	1,117	3,605 (0,81)	3,645 (0,17)	1,112 (0,4 %)
10^4	16,178 (0,823)	19,617 (0,119)	2,238	16,038 (0,83)	19,521 (0,13)	2,221 (0,8 %)
10^5	34,730 (0,855)	68,590 (0,066)	4,509	34,870 (0,85)	68,403 (0,07)	4,526 (0,4 %)
10^6	64,630 (0,850)	219,36 (0,0379)	8,817	63,0 (0,85)	212,56 (0,03)	8,868 (0,6 %)
Ra	Диксит [12]			«КАБАРЕ», 50×50 ячеек		
	U _{max} (y)	V _{max} (x)	Nu	U _{max} (y)	V _{max} (x)	Nu (откл.)
10^7	164,236 (0,851)	701,922 (0,02)	16,79	137,4 (0,91)	569,9 (0,03)	17,179 (2,3 %)
10^8	389,877 (0,937)	2241,37 (0,0112)	30,506	535 (0,93)	1920 (0,01)	34,73 (14 %)
10^9	503,24 (0,966)	6820,1 (0,0064)	57,350	1640 (0,93)	5200 (0,01)	54,9 (4,3 %)
10^{10}	2323	21463	103,663	5900	10800	64,5

Как и было предсказано выше, на данной сетке схема «КАБАРЕ» демонстрирует прекрасную согласованность результатов с данными Дэвиса до чисел Рэлея порядка 10^6 . Для более высоких чисел Рэлея недостаточно хорошо разрешается пристеночный градиент температуры и области с максимальной скоростью теплоносителя. Это не является недостатком используемой разностной схемы. Ниже будет показано, что сгущение сетки вблизи стенок без увеличения общего числа ячеек позволит решить эту проблему. Более того, мы даже уменьшим общее число расчетных ячеек.

На примере задачи Дэвиса с числом Рэлея 10^6 исследуем сходимость результатов, полученных по схеме «КАБАРЕ», на последовательности сгущающихся сеток от 10×10 до 400×400 . В таблице 6.2 представлены результаты расчетов по схеме «КАБАРЕ» на различных сетках при $Ra = 10^6$.

Таблица 6.2. Сходимость результатов на последовательности сгущающихся сеток

Расчетная сетка	h_x	$U_{\max}$ (y)	$V_{\max}$ (x)	Nu	Отклонение от результатов Дэвиса
10×10	0,1	51,6 (0,85)	187,8 (0,05)	9,191	5 %
20×20	0,05	56,3 (0,925)	197,4 (0,025)	9,670	10 %
30×30	0,0333	59,18 (0,883)	192,4 (0,05)	9,040	2,5 %
40×40	0,025	62,3 (0,862)	212,7 (0,037)	8,889	0,8 %
50×50	0,02	63,0 (0,85)	212,6 (0,03)	8,868	0,6 %
70×70	0,0143	63,15 (0,85)	218,9 (0,036)	8,848	0,35 %
100×100	0,01	64,14 (0,855)	220,14 (0,035)	8,840	0,26 %
200×200	0,005	64,74 (0,8525)	221,15 (0,0375)	8,837	0,23 %
400×400	0,0025	64,79 (0,8513)	220,81 (0,0388)	8,821	0,05 %
Результаты Дэвиса	—	64,83 (0,850)	219,36 (0,0379)	8,817	—

Как видно из таблицы 6.2, максимальные скорости, их координаты и средние числа Нуссельта при измельчении сетки приближаются к эталонным данным Дэвиса. На самой подробной сетке расхождение данных не превышает 0,1 %, что значительно меньше, чем достоверность результатов Дэвиса. На рисунке 6.11 представлена зависимость среднего числа Нуссельта, полученного по схеме «КАБАРЕ», в зависимости от числа узлов N_x по одному из направлений при $Re = 10^6$. Четко прослеживается сходимость результатов при сгущении сетки.

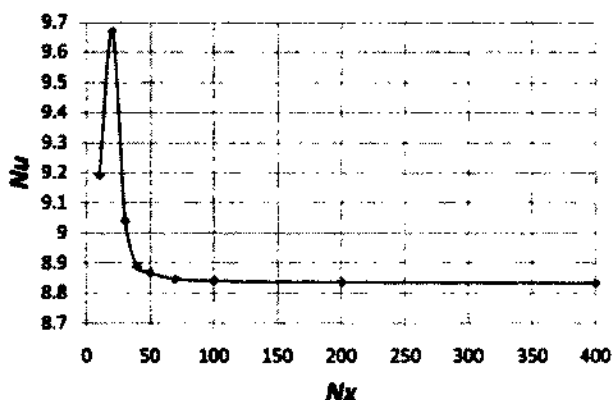


Рис. 6.11. Зависимость среднего числа Нуссельта от числа узлов вдоль одного из направлений при $Ra = 10^6$

Рассмотрим результаты работы схемы «КАБАРЕ» на сгущенной к стенкам, но при этом достаточно грубой сетке – 20×20 ячеек (рис. 6.12). Видно, что внутри области ячейки очень грубые, а на границах – очень вытянутые. Соотношение сторон ячеек вблизи стенки достигает 1:72, что не мешает предложенному алгоритму успешно воспроизводить основные характеристики течения.

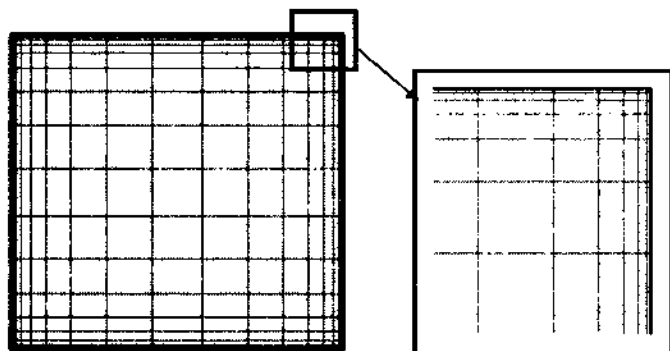


Рис. 6.12. Пример сгущающейся расчетной сетки 20×20 ячеек для задачи Дэвиса

В таблице 6.3 представлены минимальные шаги расчетной сетки (вблизи стенок), максимальные компоненты скорости с их координатами, средние числа Нуссельта и получившиеся отклонения от результатов Дэвиса (при $Ra \leq 10^6$) и Диксита (при $Ra > 10^6$). Следует отметить, что Дэвис и Диксит считали на гораздо более подробных сгущающихся сетках. При $Ra \geq 10^9$ сетка у Диксита достигала 512 узлов по каждому из направлений, то есть общее число узлов более чем в 600 раз больше, чем в демонстрационных расчетах по схеме «КАБАРЕ».

Таблица 6.3. Результаты расчетов по схеме КАБАРЕ на сгущающейся сетке 20×20 ячеек

Ra	hmin	Umax (y)	Vmax (x)	Nu	Отклонение
10^3	0,0297	3,596 (0,829)	3,677 (0,171)	1,117	0 %
10^4	0,0297	15,927 (0,829)	19,516 (0,125)	2,236	0,09 %
10^5	0,00893	38,542 (0,872)	67,265 (0,0531)	4,516	0,16 %
10^6	0,00203	74,125 (0,893)	219,941 (0,0333)	8,822	0,06 %
10^7	0,00203	167 (0,893)	701 (0,0175)	16,63	1,0 %
10^8	0,00203	482 (0,939)	2100 (0,0086)	30,3	0,7 %
10^9	0,00203	1020 (0,9667)	6700 (0,0086)	55,6	3,1 %
10^{10}	0,00203	2100	22000	100,3	3,2 %
10^{11}	0,00203	6300	50500	174	1,8 % [16] 5,4 % [13]

На следующем рисунке (рис. 6.13) представлено распределение температуры при числе Рэлея 10^{10} в один из моментов времени, когда течение в области установилось (в том смысле, что средние по времени характеристики течения больше не меняются, но течение при этом имеет турбулентный нестационарный характер).

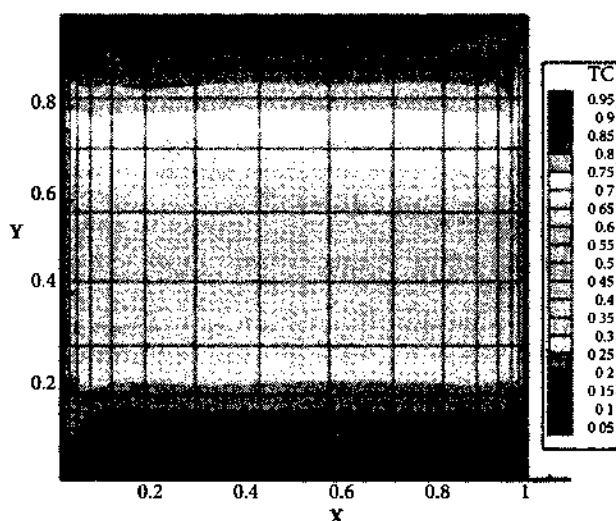


Рис. 6.13. Распределение температуры на сетке 20×20 ячеек при $Ra = 10^{10}$
(см. цветную вклейку)

Наблюдается четко выраженная стратификация по температуре. Среднее число Нуссельта при данном Рэлее – порядка 100,3 (табл. 6.3), максимальная скорость достигает 22000, что с хорошей точностью совпадает с данными Диксита (табл. 6.1).

При высоких числах Рэлея в установившемся режиме течение теплоносителя происходит в основном непосредственно вблизи стенок. Иными словами, кинетическая энергия газа сосредоточена в тонком пристеночном слое. Предложенная методика уверенно разрешает этот пристеночный слой до тех пор, пока его толщина не меньше тонкой ячейки вблизи стенки. Из формулы (6.1) и данных о минимальной ширине пристеночной ячейки (табл. 6.3) можно сделать вывод, что «переломный момент» для данной сетки наступит при числах Рэлея порядка 10^{10} – 10^{11} . Действительно, даже при $Ra = 10^{11}$ результаты работы схемы хорошо согласуются с данными [13] и [16].

На рисунке 6.14 сведены известные численные эмпирические данные по средним числам Нуссельта и результаты, полученные по схеме «КАБАРЕ» на равномерной сетке 50×50 ячеек без сгущения и на грубой сетке 20×20 ячеек со сгущением.

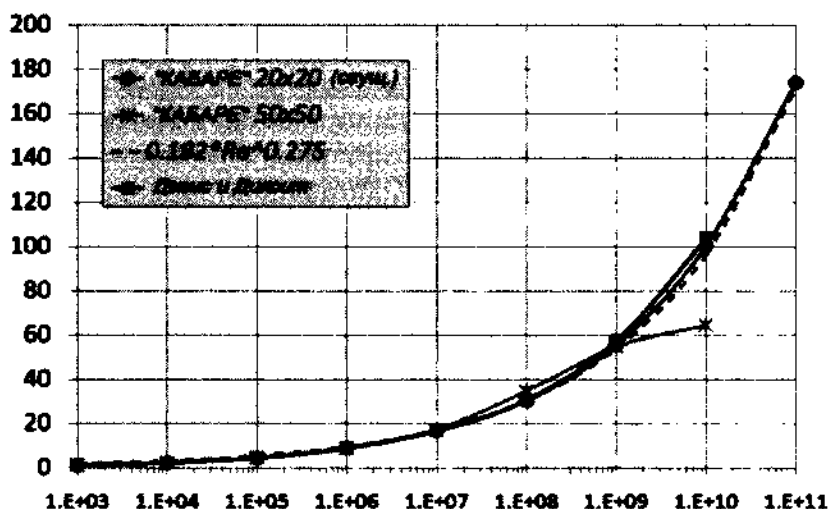


Рис. 6.14. Зависимость среднего числа Нуссельта от Рэлея, полученная по схеме «КАБАРЕ» на сетке 20×20 со сгущением, на сетке 50×50 без сгущения, по эмпирической формуле и Дэвисом

Эти же данные представлены в виде сводной таблицы (табл. 6.4). Видно, что вплоть до чисел Рэлея 10^{11} описанная методика на сгущающихся сетках демонстрирует совпадение результатов и с эмпирической формулой.

Таблица 6.4. Средние числа Нуссельта в зависимости от числа Рэлея, полученные различными авторами, по эмпирической формуле и по схеме «КАБАРЕ» на сетке 50×50 без сгущения и на сетке 20×20 со сгущением

Ra	Дэвис, Диксит	$0,182 \cdot \text{Ra}^{0.275}$	«КАБАРЕ», 50×50	«КАБАРЕ», 20×20 со сгущением
10^3	1,117	1,216	1,112	1,117
10^4	2,238	2,291	2,221	2,236
10^5	4,509	4,316	4,526	4,516
10^6	8,817	8,130	8,868	8,822
10^7	16,79	15,31	17,179	16,63
10^8	30,506	28,85	34,73	30,3
10^9	57,35	54,33	54,9	55,6
10^{10}	103,66	102,3	64,5	100,3
10^{11}	171,0 [16] 165,1 [13]	192,8	–	174

Таким образом, данный общепринятый классический тест показал, что схема «КАБАРЕ» в двумерном случае уверенно воспроизводит такие базовые характеристики термоконвективного течения, как, например, средний тепловой поток и распределение пиковых значений скоростей даже на исключительно грубых сетках с сильно вытянутыми ячейками.

6.2.2. Ламинарный двумерный тест ERCOFTAC

Данный тест практически полностью повторяет предыдущий, отличия есть только в числовых параметрах задачи. На рисунке 6.15 представлена рассматриваемая расчетная область – квадрат со стороной L . Температура правой стенки – T_c , левой – T_h . Верхняя и нижняя стенки адиабатически изолированы. На всех границах области – условие прилипания по скорости.

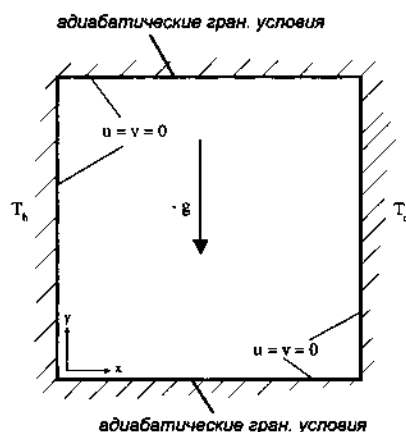


Рис. 6.15. Расчетная область и граничные условия

Параметры среды заданы явно через константы. Плотность $\rho = 1,19$ кг/м³; динамическая вязкость $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$ кг/м·с; коэффициент термического расширения $\beta = 0,00341$ 1/K; число Прандтля $Pr = 0,71$; ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с²; температура горячей стенки $T_h = 12$ К, холодной – $T_c = 2$ К.

Данная задача решена численно на достаточно подробных сетках (вплоть до 320×320) с использованием современных вычислительных методов [17]. Для чисел Рэлея 10^4 , 10^5 и 10^6 получены установившиеся распределения скоростей и температур в расчетной области, а также средние и максимальные числа Нуссельта, характеризующие теплообмен.

В таблице 6.5 приведены результаты численных экспериментов, описание которых размещено в базе знаний *ERCOTAC* [18] и в работе [17]. Также приведены результаты, полученные по схеме «КАБАРЕ» на равномерной сетке 50×50 ячеек.

Таблица 6.5. Верификационная таблица к ламинарной задаче *ERCOTAC*

Ra	L	Nu	Nu _{max}	Nu («КАБАРЕ»)	Отклонение
10^4	0,021277	2,24475	3,53087	2,245	0,01 %
10^5	0,045841	4,52164	7,72013	4,523	0,03 %
10^6	0,098761	8,82513	17,536	8,783	0,5 %

Из табл. 6.5 видно, что для чисел Рэлея 10^4 и 10^5 результаты, полученные по схеме «КАБАРЕ» и из [17], [18], практически полностью совпадают (в пределах 0,03 %). Для числа Рэлея 10^6 результат также хорошо соотносится с эталонным (в пределах

0,5 %), причем при измельчении сетки отклонение от эталонного значения числа Nu продолжает падать.

На рисунках 6.16–6.18 представлены распределения полей скоростей и температур в установившемся режиме течения для различных чисел Рэлея, полученные по схеме «КАБАРЕ». Данные распределения полностью соответствуют результатам, представленным в базе знаний *ERCOFTAC*.

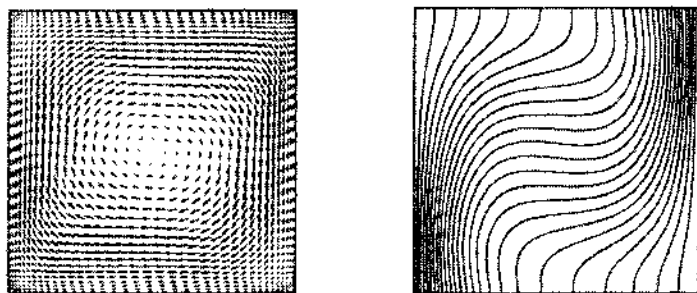


Рис. 6.16. Векторы скорости (слева) и изолинии температур (справа) при ламинарном течении в квадратной области при $Ra = 10^4$

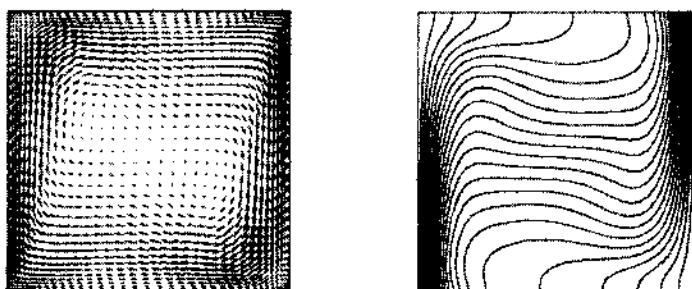


Рис. 6.17. Векторы скорости (слева) и изолинии температур (справа) при ламинарном течении в квадратной области при $Ra = 10^5$

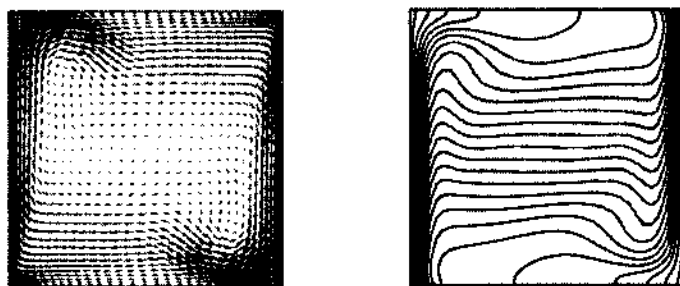


Рис. 6.18. Векторы скорости (слева) и изолинии температур (справа) при ламинарном течении в квадратной области при $Ra = 10^6$

6.2.3. Вертикальный слой в турбулентном режиме

Рассматривается теплообмен в воздушном зазоре между двумя вертикальными плоскими пластинами с разной температурой. Высота зазора – 0,25 м, ширина – 0,025 м. Температура горячей поверхности – 150 °С, холодной – 50 °С. В качестве рабочей среды выбран газ со следующими характеристиками:

Кинематическая вязкость $\nu = 2,313 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$;

Число Прандтля $Pr = 0,69$;

Теплопроводность $\lambda = 0,00032 \text{ Вт/м} \cdot \text{°С}$;

Коэффициент объемного расширения $\beta = \frac{1}{373} \approx 0,00268 \text{ 1/К}$.

Таким образом,

$$Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot \delta^3 \cdot \Delta T}{\nu^2} = 7,68 \cdot 10^8,$$

$$Ra = Gr \cdot Pr = 5,3 \cdot 10^8.$$

Согласно экспериментальным данным Дропкина и Сомерскейлза [19, с. 242], средний тепловой поток через горячую и холодную стенки в данной постановке задачи составляет 47,13 Вт/м² (среднее число Нуссельта – 36,82).

В общем случае для области параметров $0,02 < Pr < 11560$, $5 < H/L < 18$, $10^4 < Ra < 7 \cdot 10^8$ (H/L – соотношение высоты и ширины области) средние числа Нуссельта могут быть описаны следующей формулой [19]:

$$Nu = 0,05 \cdot Ra^{0,33} \cdot Pr^{0,074}. \quad (6.44)$$

В монографии [4] обобщены результаты семи различных экспериментов, по которым выписана аналогичная формула. Однако показатели степени при числах Рэлея и Прандтля колеблются в пределах 20 %. Разброс достаточно велик, что говорит о сложности данного вида течений и неоднозначности последней формулы. Совпадение численных оценок с данной формулой в пределах 10–20 % будет удовлетворительным результатом.

По схеме «КАБАРЕ» на равномерных сетках для числа Рэлея $5,3 \cdot 10^8$ получены следующие результаты:

сетка 30×300: $Nu = 28,6$ (отклонение 22 %);

сетка 50×500: $Nu = 35,9$ (отклонение 2,5 %);

сетка 100×1000: $Nu = 36,7$ (отклонение менее 1 %).

На рисунке 6.19 представлен пример распределения температуры в вертикальном слое при $Ra = 5,3 \cdot 10^8$. Это расчет по схеме «КАБАРЕ» на равномерной сетке 50×500 ячеек. Движение воздуха еще не установилось, отчетливо видны вихревые структуры различных масштабов. Вихревое течение будет наблюдаться и в установившемся

режиме, только вихри будут сосредоточены в основном вблизи стенок области. Внутри области будет температурная стратификация.

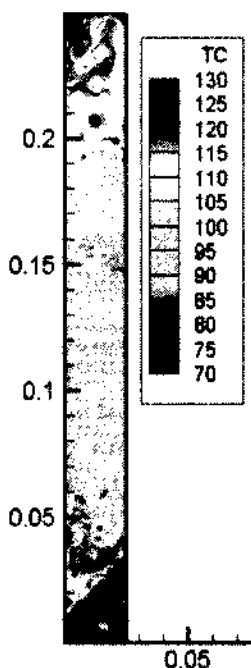


Рис. 6.19. Распределение температуры в один из моментов времени (см. цветную вклейку)

Использование сгущающихся сеток позволяет сократить число ячеек по горизонтальному направлению от холодной стенки к горячей до 20. Расчеты показали, что на сетке 40×80 ячеек при числе Рэлея вблизи потолка области применимости эмпирической формулы удастся добиться совпадения в пределах 5 %.

6.2.4. Горизонтальный слой в турбулентном режиме

Постановка данной задачи повторяет предыдущую, меняется только направление силы тяжести. Рассматривается теплообмен между двумя горизонтальными пластинами с заданной температурой. Холодная пластина находится сверху, горячая - внизу. Вектор силы тяжести направлен вертикально вниз.

Для области параметров $0,02 < Pr < 11560$, $5 < H/L < 18$, $10^4 < Ra < 7 \cdot 10^8$ (H/L - соотношение высоты и ширины области) средние числа Нуссельта можно описать формулой [19]:

$$Nu = 0,07 \cdot Ra^{0,33} \cdot Pr^{0,074} . \quad (6.45)$$

Отличие от соотношения заключается в величине коэффициента пропорциональности. Тепловой поток при горизонтальном положении слоя должен быть выше в 1,4 раз.

Для числа Рэлея $5,3 \cdot 10^8$ по формуле среднее число Нуссельта должно быть порядка 51,55. По схеме «КАБАРЕ» на равномерной сетке 50×500 результат согласуется с эмпирическим в пределах 8 %: $Nu \approx 47,2$. Характер течения при этом существенно отличается от случая, когда слой расположен вертикально. При подогреве снизу образуются восходящие и нисходящие струи, которые формируют 10 крупных вихрей, как показано на рисунке 6.20.



Рис. 6.20. Демонстрация вихревой структуры течения с помощью осредненного по времени распределения кинетической энергии

Положение и количество данных вихрей устойчиво во времени. Вследствие этого вблизи горизонтальных границ образуются устойчивые локальные температурные «всплески» и «провалы» (рис. 6.21). Успешное моделирование подобных температурных возмущений на стенках может быть интересно с инженерной точки зрения для оценки ресурсов каналов, труб.

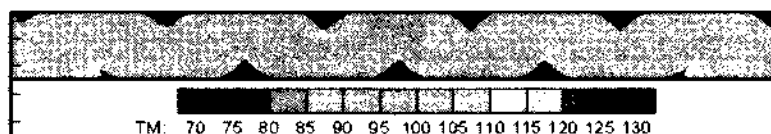


Рис. 6.21. Распределение средней по времени температуры (см. цветную вклейку)

6.3. Схема «КАБАРЕ» для моделирования тепловой конвекции несжимаемой жидкости в трехмерном случае

6.3.1. Математическая модель

Рассматривается естественная конвекция в трехмерной области в форме параллелепипеда со сторонами $H \times L \times D$, где H – высота области, L – ее ширина, D – глубина (рис. 6.22). Температуры левой и правой вертикальных стенок постоянны и равны, соответственно T_c и T_h , $T_c < T_h$. Верхняя, нижняя, передняя и задняя стенки теплоизолированы. Сила тяжести направлена вертикально вниз вдоль оси x . На левой, правой, верхней и нижней стенках все три компоненты скорости жидкости (газа) обращаются в ноль (условие прилипания). На передней и задней стенках — условие проскальзывания. Это условие необходимо для моделирования двумерных задач в трехмерной постановке.

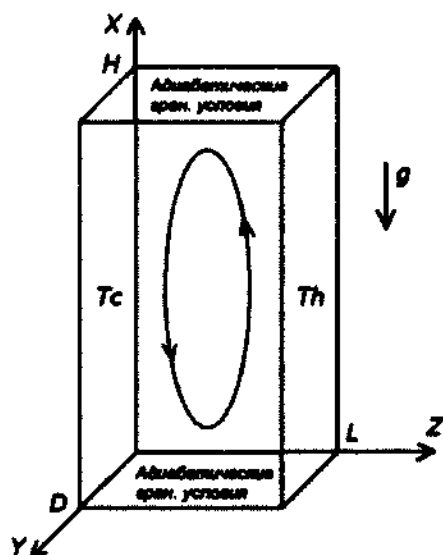


Рис. 6.22. Тепловая конвекция в трехмерной области

Пусть $T(x, y, z)$ – температура жидкости внутри области, $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ – компоненты скорости жидкости по каждому из направлений соответственно, $P(x, y, z)$ – давление, причем $x \in [0, L]$, $y \in [0, H]$, $z \in [0, D]$.

Граничные условия по температуре для вертикальных изотермических стенок, таким образом, будут иметь вид:

$$T(x, y, z)|_{x=0} = T_c; \quad T(x, y, z)|_{x=L} = T_h.$$

Для вертикальных адиабатических и горизонтальных стенок:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=D} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

Граничные условия по давлению задаются условием непротекания жидкости:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} \right|_{\delta} = 0,$$

где $\vec{n}$ – нормаль к границе δ расчетной области.

Условие прилипания на стенках области:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z)|_{z=0} &= u(x, y, z)|_{z=L} = u(x, y, z)|_{x=0} = u(x, y, z)|_{x=H} = 0; \\
 v(x, y, z)|_{z=0} &= v(x, y, z)|_{z=L} = v(x, y, z)|_{x=0} = v(x, y, z)|_{x=H} = 0; \\
 w(x, y, z)|_{z=0} &= w(x, y, z)|_{z=L} = w(x, y, z)|_{x=0} = w(x, y, z)|_{x=H} = 0.
 \end{aligned}$$

Условие проскальзывания:

$$\begin{aligned}
 v(x, y, z)|_{y=0} &= v(x, y, z)|_{y=D} = 0; \\
 \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} &= \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=D} = \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_{y=D} = 0.
 \end{aligned}$$

Исходной для расчета является система нестационарных уравнений тепловой конвекции несжимаемой «жидкости Буссинеска» в трехмерном случае:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u + \beta g_x (T - T_0), \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v + \beta g_y (T - T_0), \quad (6.48)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta w + \beta g_z (T - T_0), \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} + \frac{\partial wT}{\partial z} = \alpha \Delta T. \quad (6.50)$$

Здесь ν – кинематическая вязкость ($\nu = \mu/\rho$, где μ и ρ соответственно динамическая вязкость и плотность); α – коэффициент температуропроводности ($\alpha = \frac{\kappa}{c_p \rho}$, где κ и c_p – коэффициент теплопроводности и теплоемкость жидкости); β – коэффициент объемного теплового расширения жидкости; g_x , g_y и g_z – компоненты ускорения свободного падения; T_0 – равновесная температура; Δ – оператор Лапласа.

Физические и геометрические параметры задачи описываются, как и в двумерном случае, двумя основными безразмерными параметрами:

числом Рэлея

$$Ra = \frac{\beta g (T_h - T_c) L^3}{\alpha \nu} \quad (6.51)$$

и числом Прандтля

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}. \quad (6.52)$$

Также важную роль играет аспектное соотношение сторон расчетной области $A = H/L$ – отношение высоты области к ее ширине.

Возникающий между изотермическими стенками теплообмен характеризуется средним числом Нуссельта. Среднее число Нуссельта, например, левой стенки можно записать следующим образом:

$$Nu_{wall} = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \right\rangle \frac{L}{T_h - T_c}. \quad (6.53)$$

6.3.2. Дискретизация задачи

На рассматриваемую область $H \times D \times L$ наложим прямоугольную расчетную сетку с $N_x \times N_y \times N_z$ узлами. Занумеруем узлы по оси x от 1 до N_x , по оси y – от 1 до N_y , по оси z – от 1 до N_z . Таким образом, получим прямоугольную неравномерную сетку, содержащую $N_x \cdot N_y \cdot N_z$ узлов или $(N_x - 1) \cdot (N_y - 1) \cdot (N_z - 1)$ ячеек. Граничные узлы ложатся на границу области. На рисунке 6.23 для наглядности представлено сечение расчетной сетки, лежащее в плоскости Oxy .

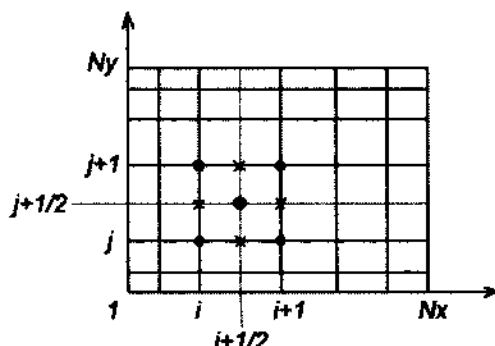


Рис. 6.23. Наложение на расчетную область регулярной прямоугольной сетки

Схема «КАБАРЕ» в трехмерном случае оперирует с двумя типами переменных: консервативными, относящимися к центрам ячеек, и потоковыми, которые относятся к центрам граней ячеек. Консервативные переменные будут иметь дробную нумерацию, потоковые – смешанную (рис. 6.23). При численном решении уравнений Навье – Стокса потребуется решать трехмерное эллиптическое уравнение для давления. Давление, как и дивергенция скорости, рассчитанная по консервативным переменным, будет относиться непосредственно к узлам расчетной сетки и иметь целую нумерацию.

Пусть у каждой переменной верхний индекс обозначает номер слоя по времени, нижний – пространственное положение переменной на расчетной сетке, для чего введем локальные обозначения, как показано на рисунке 6.24.

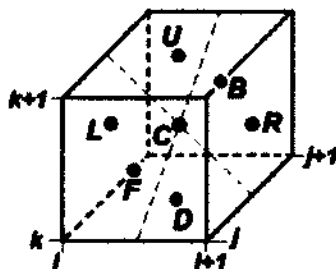


Рис. 6.24. Локальные обозначения переменных

Здесь консервативная переменная C относится к центру ячейки, потоковые переменные Up, Down, Right, Left, Front, Back – к центрам граней ячейки.

Обозначим консервативные переменные (компоненты скорости и температуру) соответствующими прописными буквами (U, V, T), потоковые – строчными (u, v, θ). Шаги сетки (расстояние между узлами) по каждому из пространственных направлений – h_x, h_y, h_z . Шаг по времени – τ .

В дискретном виде алгоритм решения системы уравнений – представляет собой последовательность трех стандартных этапов (фаз), совершенно аналогичных описанным выше для двумерного случая.

В фазе 1 вычисляются промежуточные значения консервативных переменных на половинном временном слое:

$$\frac{T_C^{n+1/2} - T_C^n}{\tau/2} + \frac{u_R^n \theta_R^n - u_L^n \theta_L^n}{h_x} + \frac{v_F^n \theta_F^n - v_B^n \theta_B^n}{h_y} + \frac{w_U^n \theta_U^n - w_D^n \theta_D^n}{h_z} = \alpha \Delta_x T_C^n, \quad (6.54)$$

$$\frac{\bar{U}_C^{n+1/2} - U_C^n}{\tau/2} + \frac{(u_R^n)^2 - (u_L^n)^2}{h_x} + \frac{u_F^n v_F^n - u_B^n v_B^n}{h_y} + \frac{u_U^n w_U^n - u_D^n w_D^n}{h_z} = \nu \Delta_x U_C^n + \beta g_x (T_C^{n+1/2} - T_0), \quad (6.55)$$

$$\frac{\tilde{V}_c^{n+1/2} - V_c^n}{\tau/2} + \frac{u_R^n v_R^n - u_L^n v_L^n}{h_x} + \frac{(v_F^n)^2 - (v_B^n)^2}{h_y} + \frac{w_U^n v_U^n - w_D^n v_D^n}{h_z} = \nu \Delta_h V_c^n + \beta g_y (T_c^{n+1/2} - T_0), \quad (6.56)$$

$$\frac{\tilde{W}_c^{n+1/2} - W_c^n}{\tau/2} + \frac{u_R^n w_R^n - u_L^n w_L^n}{h_x} + \frac{v_F^n w_F^n - v_B^n w_B^n}{h_y} + \frac{(w_U^n)^2 - (w_D^n)^2}{h_z} = \nu \Delta_h W_c^n + \beta g_z (T_c^n - T_0). \quad (6.57)$$

Здесь Δ_h — численный трехмерный лапласиан.

Из последних четырех уравнений при заданных граничных условиях могут быть найдены предварительные значения консервативных компонент скоростей $\tilde{U}_c^{n+1/2}$, $\tilde{V}_c^{n+1/2}$ и $\tilde{W}_c^{n+1/2}$, а также консервативные значения температуры $T_c^{n+1/2}$ на половинном временном слое. Для нахождения окончательных значений консервативных скоростей на половинном слое воспользуемся фазой 1а, в которой учтено давление:

$$\frac{U_c^{n+1/2} - \tilde{U}_c^{n+1/2}}{\tau/2} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_h p^{n+1/2}, \quad (6.58)$$

$$\frac{V_c^{n+1/2} - \tilde{V}_c^{n+1/2}}{\tau/2} = - \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_h p^{n+1/2}, \quad (6.59)$$

$$\frac{W_c^{n+1/2} - \tilde{W}_c^{n+1/2}}{\tau/2} = - \left[\frac{\partial}{\partial z} \right]_h p^{n+1/2}. \quad (6.60)$$

Если расписать численные операторы дифференцирования в последних двух выражениях, получим:

$$\frac{U_c^{n+1/2} - \tilde{U}_c^{n+1/2}}{\tau/2} = - \frac{(p_3^{n+1/2} + p_6^{n+1/2} + p_7^{n+1/2} + p_8^{n+1/2}) - (p_1^{n+1/2} + p_2^{n+1/2} + p_5^{n+1/2} + p_4^{n+1/2})}{4h_x}, \quad (6.61)$$

$$\frac{V_c^{n+1/2} - \tilde{V}_c^{n+1/2}}{\tau/2} = - \frac{(p_2^{n+1/2} + p_3^{n+1/2} + p_6^{n+1/2} + p_7^{n+1/2}) - (p_1^{n+1/2} + p_4^{n+1/2} + p_5^{n+1/2} + p_8^{n+1/2})}{4h_y}, \quad (6.62)$$

$$\frac{W_c^{n+1/2} - \tilde{W}_c^{n+1/2}}{\tau/2} = - \frac{(p_5^{n+1/2} + p_6^{n+1/2} + p_7^{n+1/2} + p_8^{n+1/2}) - (p_1^{n+1/2} + p_2^{n+1/2} + p_3^{n+1/2} + p_4^{n+1/2})}{4h_z}. \quad (6.63)$$

Цифровые нижние индексы давления обозначают узел, которому принадлежит данное давление (рис. 6.25).

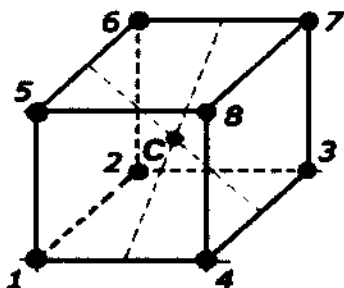


Рис. 6.25. Локальные обозначения переменных, принадлежащих к узлам сетки

Взяв производную по x от обеих частей уравнения (6.61), производную по y от обеих частей уравнения (6.62), затем производную по z от обеих частей уравнения (6.63) и сложив полученные выражения, придем к уравнению:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_h U_C^{n+1/2} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_h V_C^{n+1/2} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \right]_h W_C^{n+1/2} - \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_h \tilde{U}_C^{n+1/2} - \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_h \tilde{V}_C^{n+1/2} - \left[\frac{\partial}{\partial z} \right]_h \tilde{W}_C^{n+1/2} \right\} \frac{2}{\tau} = \\ & \quad = - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]_h p^{n+1/2} - \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]_h p^{n+1/2} - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]_h p^{n+1/2} \end{aligned} \quad (6.64)$$

или

$$\left(\operatorname{div}_h V_C^{n+1/2} - \operatorname{div}_h \tilde{V}_C^{n+1/2} \right) \frac{2}{\tau} = -\Delta_h p^{n+1/2}, \quad (6.65)$$

где

$$V = (U, V, W). \quad (6.66)$$

Из уравнения (6.46) следует, что $\operatorname{div}_h V_C^{n+1/2} = 0$. Таким образом, получаем уравнение Пуассона для давления:

$$\Delta_h p^{n+1/2} = \frac{2}{\tau} \operatorname{div}_h \tilde{V}_C^{n+1/2}. \quad (6.67)$$

Из последнего уравнения можно найти величины $p^{n+1/2}$ для подстановки в уравнения (6.61)–(6.63).

В фазе 2 рассчитываются потоковые величины на новом временном слое.

Расчет производится совершенно аналогично двумерному случаю: линейной экстраполяцией новых потоковых переменных по известным промежуточным консервативным и старым потоковым переменным (рис. 6.26) с учетом принципа максимума и принципа наименьшей парциальной локальной вариации. Добавляется только третье пространственное измерение.

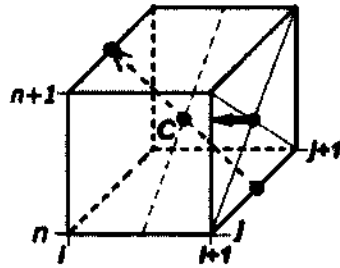


Рис. 6.26. Вычисление потоковых величин на новом временном слое

В фазе 3 вычисляются окончательные значения консервативных скоростей и температур на новом временном слое. При этом, как и в двумерном случае, шаг по времени берется целый:

$$\frac{T_C^{n+1} - T_C^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left\{ \text{LT}_h(u^n, v^n, w^n, \theta^n) + \text{LT}_h(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}, \theta^{n+1}) \right\} = \alpha \Delta_h T_C^{n+1}, \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_C^{n+1} - U_C^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left\{ \text{LU}_h(u^n, v^n, w^n) + \text{LU}_h(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}) \right\} =, \\ = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_h p^{n+1/2} + \nu \Delta_h U_C^n + \beta g_x (T_C^{n+1/2} - T_0), \end{aligned} \quad (6.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_C^{n+1} - V_C^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left\{ \text{LV}_h(u^n, v^n, w^n) + \text{LV}_h(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}) \right\} =, \\ = - \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_h p^{n+1/2} + \nu \Delta_h V_C^n + \beta g_y (T_C^{n+1/2} - T_0), \end{aligned} \quad (6.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{W_C^{n+1} - W_C^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left\{ \text{LW}_h(u^n, v^n, w^n) + \text{LW}_h(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}) \right\} = \\ = - \left[\frac{\partial}{\partial z} \right]_h p^{n+1/2} + \nu \Delta_h W_C^n + \beta g_z (T_C^{n+1/2} - T_0), \end{aligned} \quad (6.71)$$

где

$$\text{LT}_h(u^n, v^n, w^n, \theta^n) = \frac{u_R^n \theta_R^n - u_L^n \theta_L^n}{h_x} + \frac{v_F^n \theta_F^n - v_B^n \theta_B^n}{h_y} + \frac{w_G^n \theta_G^n - w_D^n \theta_D^n}{h_z}. \quad (6.72)$$

$$\text{LU}_h(u^n, v^n, w^n) = \frac{(u_R^n)^2 - (u_L^n)^2}{h_x} + \frac{u_F^n v_F^n - u_B^n v_B^n}{h_y} + \frac{u_G^n w_G^n - u_D^n w_D^n}{h_z}, \quad (6.73)$$

$$LV_k(u^n, v^n, w^n) = \frac{u_R^n v_R^n - u_L^n v_L^n}{h_x} + \frac{(v_F^n)^2 - (v_B^n)^2}{h_y} + \frac{w_U^n v_U^n - w_D^n v_D^n}{h_z}, \quad (6.74)$$

$$LW_k(u^n, v^n, w^n) = \frac{u_R^n w_R^n - u_L^n w_L^n}{h_x} + \frac{v_F^n w_F^n - v_B^n w_B^n}{h_y} + \frac{(w_U^n)^2 - (w_D^n)^2}{h_z}. \quad (6.75)$$

Таким образом, при заданных граничных условиях по известным значениям консервативных переменных на временном слое n однозначно определяются значения всех консервативных переменных на слое $n+1$. После чего цикл, состоящий из трех описанных фаз, повторяется.

6.4. Верификация трехмерной схемы «КАБАРЕ» при различных числах Рэлея

6.4.1. Задача Дэвиса. Течение в кубической области

Постановка задачи Дэвиса в двумерном случае подробно изложена в главе 6.2. Это классический двумерный тест, который легко может быть обобщен на трехмерный случай. Достаточно задать «лишнее» третье измерение единичной длины и условия проскальзывания (или периодичности) на стенках, перпендикулярных новой третьей оси.

Таким образом, рассмотрим трехмерное течение газа в кубе со сторонами $1 \times 1 \times 1$. Ускорение силы тяжести направлено вниз и равно 1. Число $Pr = 0,71$. Вертикальные стенки (левая и правая) имеют постоянную температуру $T_h = 1$ и $T_c = 0$, остальные – адиабатически изолированы. Проведем сравнение результатов двумерных расчетов Дэвиса [11] и Диксита [12] с результатами работы предложенного трехмерного алгоритма «КАБАРЕ» на сгущающейся расчетной сетке $20 \times 20 \times 20$ ячеек (рис. 6.27).

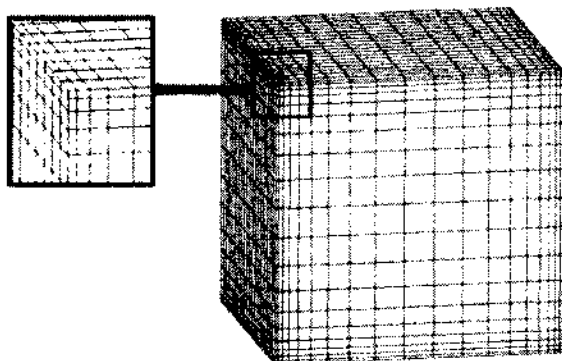


Рис. 6.27. Сгущающаяся расчетная сетка $20 \times 20 \times 20$ ячеек

В таблице 6.6 представлены результаты численных экспериментов Дэвиса (экстраполированные при сгущении сетки), современные данные Диксита (полученные на сетках вплоть до 512×512), оценки по эмпирической формуле и результаты, полученные по схеме «КАБАРЕ» на сгущающейся сетке $20 \times 20 \times 20$ ячеек. Приведены средние числа Нуссельта и соответствующие отклонения в процентах от эталонных результатов обоих авторов.

Таблица 6.6. Средние числа Нуссельта в зависимости от числа Рэлея, полученные различными авторами, по формуле и по схеме «КАБАРЕ» на сетке $20 \times 20 \times 20$ со сгущением

Ra	Дэвис, Диксит	$0,182 \cdot Ra^{0,276}$	«КАБАРЕ», $20 \times 20 \times 20$ со сгущением (отклонение)
10^3	1,117	1,216	1,115 (0,2 %)
10^4	2,238	2,291	2,234 (0,2 %)
10^5	4,509	4,316	4,529 (0,4 %)
10^6	8,817	8,130	8,893 (0,9 %)
10^7	16,79	15,31	17,26 (2,8 %)
10^8	30,506	28,85	31,55 (3,4 %)
10^9	57,35	54,33	60,9 (6,2 %)
10^{10}	103,66	102,3	108,1 (4,3 %)

На рисунке 6.28 полученные данные представлены на одном графике.

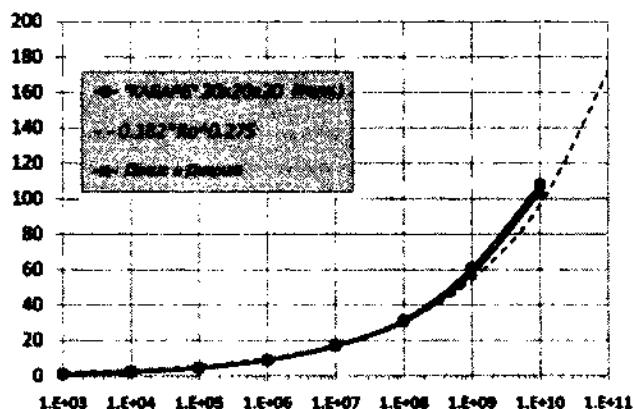


Рис. 6.28. Зависимость среднего числа Нуссельта от Рэлея, полученная по схеме «КАБАРЕ» на сетке $20 \times 20 \times 20$ со сгущением, по эмпирической формуле, Дэвисом и другими авторами

Трехмерный алгоритм «КАБАРЕ» демонстрирует хорошую согласованность с данными Дэвиса и Диксита. Причем, начиная с чисел Рэлея порядка 10^6 - 10^7 , наблюдаются слегка завышенные оценки средних чисел Нуссельта. Это связано с тем, что при $Ra > 10^6$ течение переходит в турбулентный режим и становится полностью трехмерным. Вихревое течение проявляется не только по вертикальному и горизонтальному направлениям, но и в глубину расчетной области, что не могло не повлиять на теплообмен с изотермическими стенками. Теплопередача, вызванная конвекцией по всем трем пространственным направлениям, возросла по сравнению с чисто двумерным случаем, и, следовательно, стали выше средние числа Нуссельта.

6.4.2. Трехмерный турбулентный тест ERCOFTAC

Для исследования естественной конвекции воздуха в вытянутой прямоугольной области был проведен следующий эксперимент [20], [21]. Область в форме параллелепипеда со сторонами $H = 2,18$ м, $W = 0,076$ м и $D = 0,52$ м заполнена воздухом при нормальном давлении (рис. 6.29). Разность температур между левой и правой вертикальными стенками остается неизменной и составляет $19,6^\circ\text{C}$ и $39,9^\circ\text{C}$ (два варианта). Остальные стенки адиабатически изолированы.

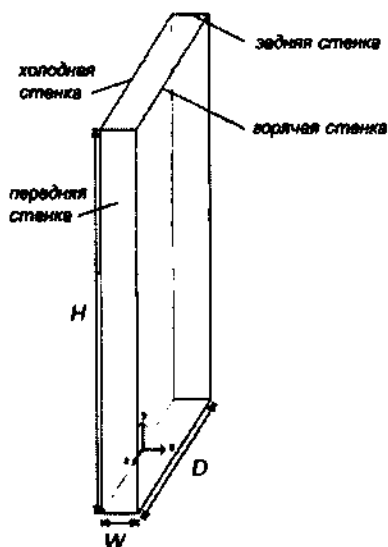


Рис. 6.29. Расчетная область к турбулентному тесту ERCOFTAC

Стенки параллелепипеда непроницаемы, скорость теплоносителя на границах области равна нулю (условие прилипания).

В расчетах приняты следующие параметры:

Кинематическая вязкость	$0,151 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$
Число Pr	0,71
Теплопроводность	$0,2127 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/м}^2/\text{с}$
Коэффициент температурного линейного расширения	$0,3272 \cdot 10^{-2} \text{ 1/K}$
Ускорение свободного падения	$9,81 \text{ м/с}^2$

Таким образом, эксперимент проведен при двух различных числах Рэлея: $0,86 \cdot 10^6$ и $1,43 \cdot 10^6$ (число Рэлея рассчитано по ширине области).

Помимо средних характеристик теплоотдачи в эксперименте были измерены пульсации температуры в трех контрольных точках. Места, в которых размещены датчики, измеряющие пульсации температуры, находятся на середине высоты области, между адиабатическими вертикальными стенками, на расстоянии 0,005, 0,0381 и 0,0712 м от холодной стенки (рис. 6.30). Значения температур с датчиков считывались с временным интервалом 0,015674 с.

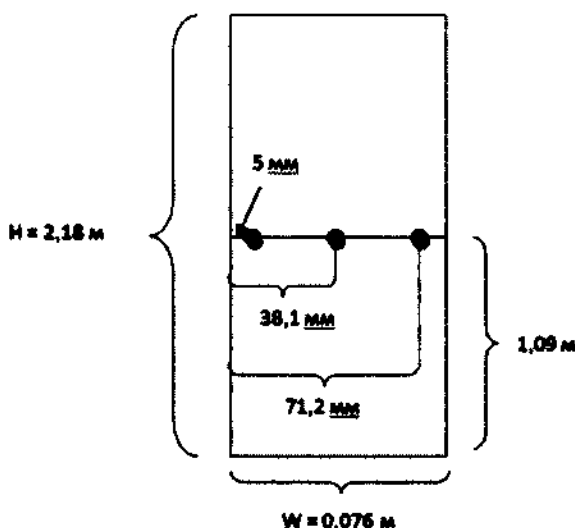


Рис. 6.30. Расположение датчиков, измеряющих пульсации температур в расчетной области (соотношение сторон на схеме не сохранено)

При данных параметрах в эксперименте течение газа между пластинами было полностью турбулентным. Экспериментально получены следующие средние числа Нуссельта: 5,85 – для течения с $Ra = 0,86 \cdot 10^6$, 7,57 – для течения с $Ra = 1,43 \cdot 10^6$.

Данная тестовая задача была также решена численно как с помощью стандартной $k - \epsilon$ модели, так и с помощью ее модификаций в работе [22]. Кроме того, имеются результаты более ранних экспериментов в очень похожей экспериментальной установке [23].

При расчетах по схеме «КАБАРЕ» использовался параллельный алгоритм на сетке $800 \times 100 \times 100$ ячеек. При этом расчетная область разбивалась на 8 подобластей, $100 \times 100 \times 100$ ячеек каждая (рис. 6.31). Расчет производился в каждой из подобластей отдельным процессором независимо, граничные условия при этом выбирались исходя из условий сшивки. Через каждый шаг по времени между процессорами по необходимости выполнялся обмен данными на границах подобластей.

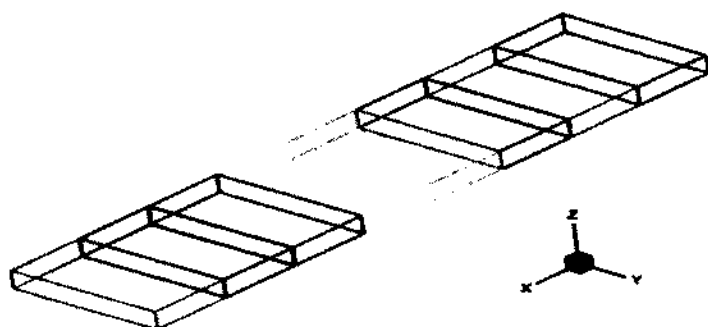


Рис. 6.31. Распределение расчетной области по процессорам

Все полученные и найденные в упомянутых выше работах средние числа Нуссельта сведены в таблице 6.7.

Таблица 6.7. Средние числа Нуссельта, полученные с помощью различных экспериментальных и вычислительных методик

Ra	Эксперимент [20], [21]	Эксперимент [23]	k-i модель	k-i модель + Yarp correction	k-i модель + Yarp + GGDH	«КАБАРЕ», сетка $800 \times 100 \times 100$ (отклонение)
$0,86 \cdot 10^6$	5,85	4,9	6,53	4,66	4,74	5,75 (2 %)
$1,43 \cdot 10^6$	7,57	—	—	—	—	6,9 (9 %)

Следует отметить, что исследуемая область является очень сильно вытянутой. Аспектное соотношение продольной и поперечной сторон составляет примерно 1:28,7. Если число Рэлея вычислять по длинной стороне, то оно возрастет примерно в $2 \cdot 10^4$ раз и составит порядка 10^{10} . Это соответствует ярко выраженному турбулентному режиму течения, и не каждый вычислительный метод, как видно из последней таблицы, способен с достаточной точностью предсказать даже такую осредненную характеристику теплопередачи, как среднее число Нуссельта. Более того, заметно заниженный результат получился в более ранних экспериментах [23].

Как видно из графика зависимости числа Нуссельта от времени (рис. 6.32) для $Ra = 0,86 \cdot 10^6$, течение в расчетной области имеет выраженный нестационарный

характер. Интенсивность теплообмена со стенками постоянно флуктуирует и колеблется от 5,5 до примерно 6,0.

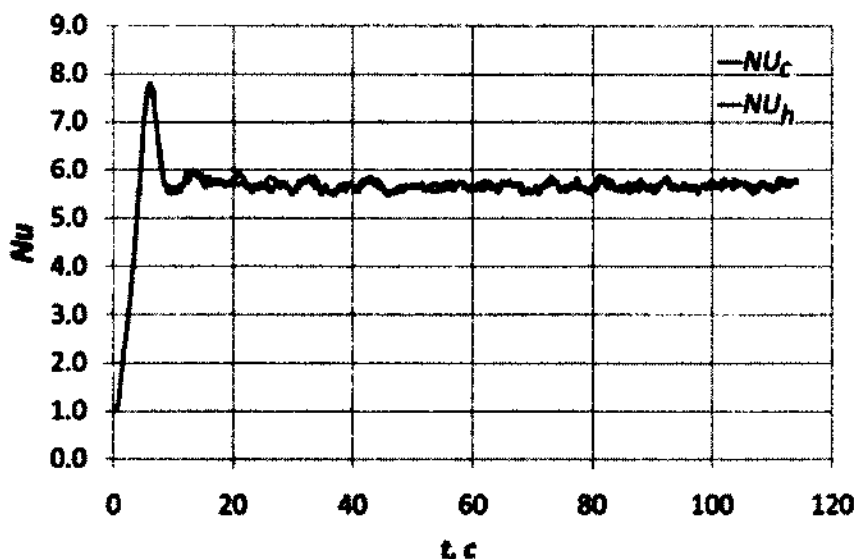


Рис. 6.32. Зависимость среднего числа Нуссельта для горячей и холодной стенок от времени

В среднем результат, полученный по схеме «КАБАРЕ», очень хорошо согласуется с данными последнего эксперимента (в пределах 2%, табл. 6.7). Среднее число Нуссельта, полученное при большем числе Рэлея ($1,43 \cdot 10^6$), согласуется с экспериментом в пределах 9%. Но исследованиями других авторов этот экспериментальный результат не подтвержден.

Нестационарность, сложность течения в таких вытянутых областях хорошо прослеживается на рисунках 6.33 и 6.34 (для наглядности расчетные области растянуты по ширине в 2 раза). На рисунке 6.33 слева представлено распределение температуры в сечении расчетной области в один из моментов времени. Отчетливо видны возникающие и отрывающиеся от стенок тепловые струи, завихрения. При этом, если осреднить полученное распределение температуры по времени, получим ровную стратифицированную картину, как показано на рисунке 6.33 справа.

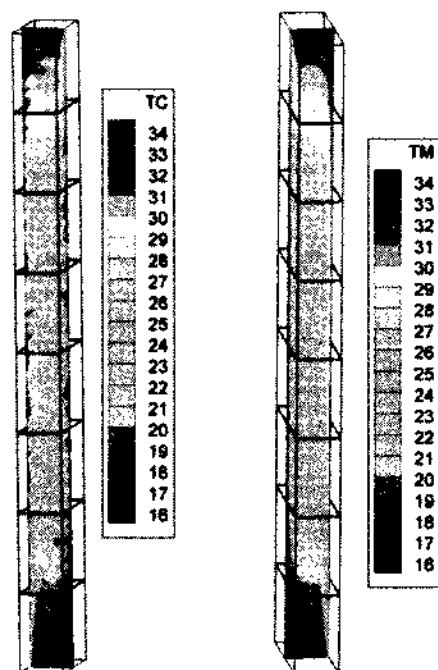


Рис. 6.33. Слева – распределение температуры в сечении расчетной области; справа – осредненное по времени распределение температуры (см. цветную вклейку)

Хаотический, вихревой характер течения ярко демонстрирует рисунок 6.34, где представлены мгновенные распределения отдельных компонент скоростей: u , v и w . Видно, что течение в области полностью трехмерное. Максимальные скорости по вертикальному направлению достигают 35 см/с, по двум горизонтальным – 25 см/с.

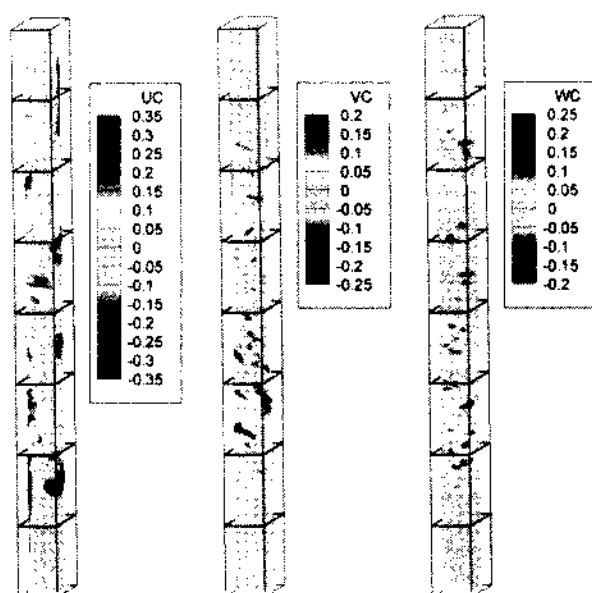


Рис. 6.34. Распределения компонент скоростей u , v , w в сечении расчетной области в один из моментов времени (см. цветную вклейку)

Образование вихрей, струй приводит к тому, что температура в заданной точке расчетной области может сильно флуктуировать. Эти флуктуации в трех точках были измерены экспериментально при двух данных числах Рэлея (рисунок 6.35).

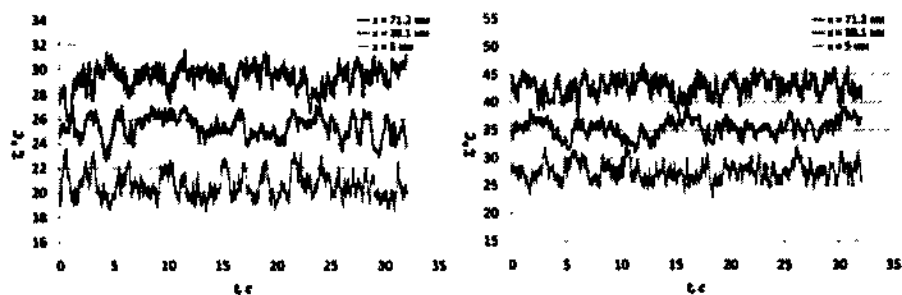


Рис. 6.35. Флуктуации температуры на различных расстояниях от холодной стенки. Данные эксперимента. Слева – при $Ra = 0,86 \cdot 10^6$; справа – при $Ra = 1,43 \cdot 10^6$

Из данных эксперимента следует, что при меньших числах Ra пульсации температуры достигают примерно 6°C – это при перепаде температур между пластинами в $19,6^\circ\text{C}$. При почти вдвое большем перепаде, $39,9^\circ\text{C}$, амплитуда пульсаций достигает порядка 10°C . Это существенный разброс, который с инженерной точки зрения может представлять большой интерес. Ни одна методика, базирующаяся на осреднении базовых характеристик течения (например, модели k -epsilon), не способна воспроизвести данные флуктуации в принципе. Методы *DNS* потребуют для таких чисел Рэлея исключительно подробные расчетные сетки.

Как показано на рисунке 6.36, метод «КАБАРЕ» на сетке $800 \times 100 \times 100$ ячеек успешно разрешил возникающие флуктуации. Амплитуды расчетных пульсаций для двух рассматриваемых чисел Рэлея достигают соответственно 10 и 20°C . Это почти вдвое больше, чем в эксперименте, что может быть связано с теплоемкостью датчиков, их инерционностью и влиянием на движение газа.

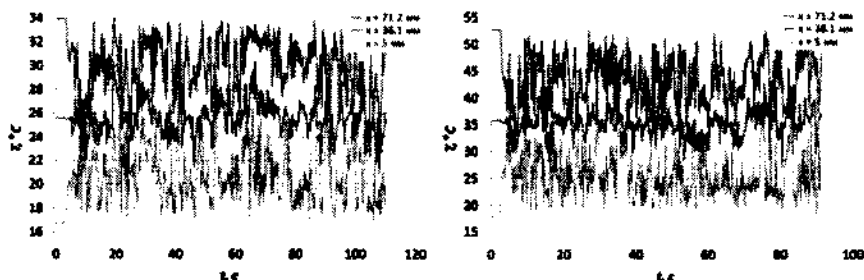


Рис. 6.36. Флуктуации температуры на различных расстояниях от холодной стенки, полученные по схеме «КАБАРЕ». Слева – при $Ra = 0,86 \cdot 10^6$; справа – при $Ra = 1,43 \cdot 10^6$

В связи с этим целесообразно сравнить спектральные характеристики полученных пульсаций. На рисунке 6.37 в двойном логарифмическом масштабе представлены спектры флуктуаций температуры около холодной стенки для числа $Ra = 0,86 \cdot 10^6$, полученные экспериментально и по схеме «КАБАРЕ». Видно, что предложенная вычислительная методика уверенно описывает температурные пульсации практически во всем диапазоне волновых чисел.

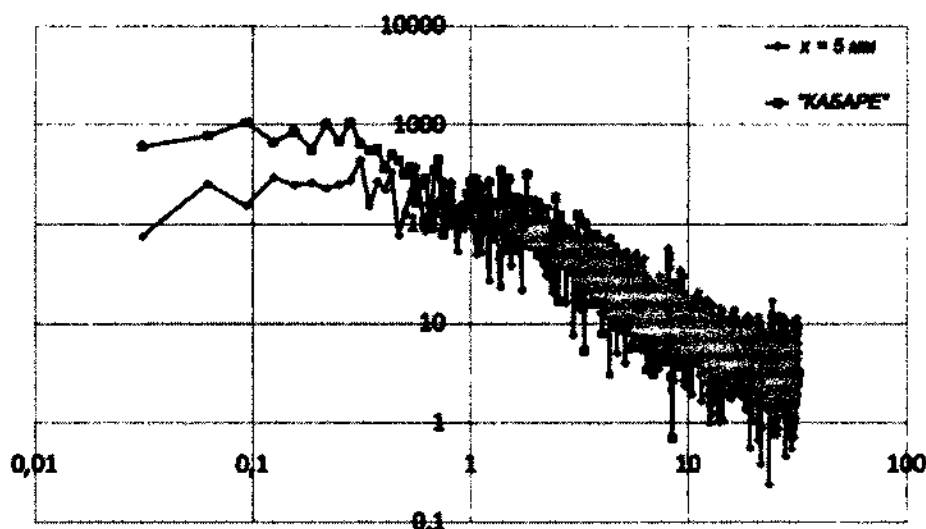


Рис. 6.37. Спектры пульсаций температуры вблизи холодной стенки для $Ra = 0,86 \cdot 10^6$ полученные экспериментально и по схеме «КАБАРЕ»

Спектры в других точках области выглядят аналогично представленному примеру.

Таким образом, в сравнении с результатами реального эксперимента было показано, что трехмерная схема «КАБАРЕ» способна не только надежно предсказывать средние характеристики трехмерного термоконвективного течения, но и успешно моделировать основные особенности развитого турбулентного движения, образование вихрей, возникновение температурных пульсаций.

6.4.3. Тепловая конвекция в замкнутой области в форме параллелепипеда с соотношением сторон 1:4

Естественная конвекция в замкнутой области в форме параллелепипеда с соотношением сторон ($L:H$) 1:4 (рисунок 6.38) подробно рассмотрена в серии работ [8,14,15]. Как и в предыдущих тестах, противоположные вертикальные стенки имеют постоянную температуру, остальные стенки теплоизолированы. Ускорение силы тяжести направлено вертикально вниз.

Данная задача решена авторами при нескольких числах Рэлея с использованием метода *DNS*, а также различными инновационными методиками, которые, как и схема «КАБАРЕ», позволяют получить удовлетворительный результат на грубых сетках.

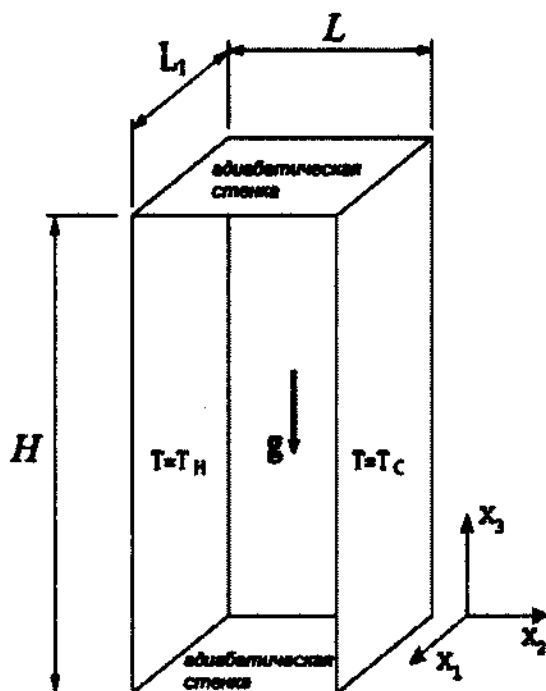


Рис. 6.38. Расчетная область (пропорции не соблюдены)

Сравним результаты работы новых и, как заявляют авторы, беспараметрических методик, описанных в [8,14,15], с результатами расчетов по трехмерной схеме «КАБАРЕ», которая также является беспараметрическим методом. Зададим достаточно высокое число Рэлея: 10^{10} (это максимальный Рэлей, при котором проведен расчет *DNS*). Расчетную сетку выберем самую грубую из тех, которые использовали авторы в своих публикациях – $40 \times 8 \times 16$ ячеек со сгущением (рис. 6.39).

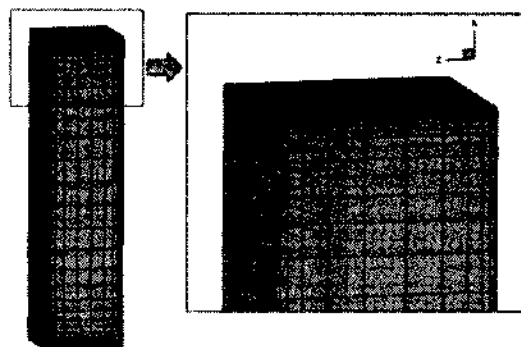


Рис. 6.39. Расчетная сетка $40 \times 8 \times 16$ ячеек и ее фрагмент

Для данного Рэля построены примеры изоповерхностей температуры в некоторый момент времени, полученные методом *DNS* и по схеме «КАБАРЕ» (рисунок 6.40). По рисунку 6.40 видно, что характер течения существенно турбулентный и трехмерный. Образуются вихри различных масштабов. Общая картина течения, полученная методами *DNS* и «КАБАРЕ» очень похожа, при этом *DNS*-расчет выполнялся на сетке $128 \times 190 \times 462$ узлов.



Рис. 6.40. Изоповерхности температуры, полученные методом *DNS* (слева, черно-белое изображение) и изоповерхности температуры, полученные методом «КАБАРЕ» (справа, цветное изображение)

Установившееся течение в расчетной области выглядит так, как показано на рисунке 6.41, где представлены изоповерхности температуры. Наблюдается полная температурная стратификация по всей высоте параллелепипеда. При этом вблизи границ течение остается вихревым.

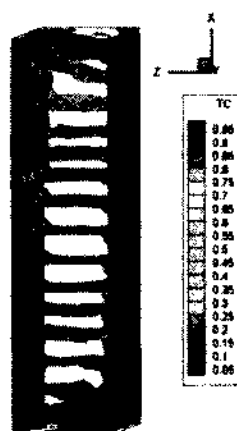


Рис. 6.41. Изоповерхности температуры в установившемся режиме течения, полученные методом «КАБАРЕ» (см. цветную вклейку)

Среднее число Нуссельта на стенках с течением времени сходится к величине 101,0 (рисунок 6.42).

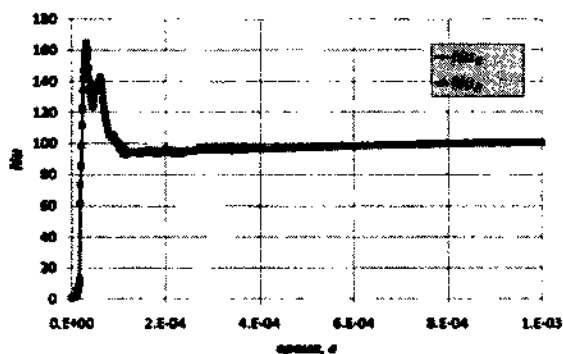


Рис. 6.42. Зависимость среднего числа Нуссельта от времени

Этот результат очень хорошо согласуется как с результатами расчета методом *DNS*, так и с данными беспараметрических методик *RM1* и *RM2* из [8,14,15] на грубых сетках, а также с эмпирической формулой (табл. 6.8).

Таблица 6.8. Сравнение средних чисел Нуссельта, полученных различными методиками

Методы	Ф. Триш и др. [8,14,15]			$0,182 \cdot Ra^{0,275}$	«КАБАРЕ»
	DNS	RM1	RM2		
Сетка	128×190×462	16×34×80	8×17×40		8×16×40
Nu	101,9	100,8	102,2	102,35	101,0

Как видно из таблицы, метод «КАБАРЕ» показал аналогичную точность, что и новейший метод *RM2* на такой же сетке. Метод *RM1* требует более подробных сеток. Вычислительная эффективность схемы «КАБАРЕ» превосходит *DNS*-метод более чем в 2000 раз за счет возможности использования гораздо более грубой сетки.

Таким образом, описанная в настоящей работе вычислительная методика расчета термоконвективных течений в замкнутых трехмерных областях, как минимум, не хуже лучших известных методик. А тот факт, что метод «КАБАРЕ» обладает минимальным сеточным шаблоном, легко обобщается на случай косоугольных неструктурированных расчетных сеток и эффективно может быть распараллелен для запуска на современных суперкомпьютерах, делает этот метод одной из передовых технологий для моделирования турбулентных течений и естественной конвекции.

Заключение к главе 6

Использование прямого численного моделирования (*DNS*) в чистом виде для реальных инженерно-технических задач в геометрически сложных областях сопряжено со значительными вычислительными трудностями. При высоких числах Рэлея метод *DNS* становится слишком ресурсоемким и практически неприменимым даже для современных кластерных суперкомпьютеров из-за необходимости на сеточном уровне разрешать сверхмалые колмогоровские масштабы. С другой стороны, точность и физическая адекватность результатов, полученных прямыми методами, достаточно высока по сравнению, например, с моделями, в основе которых лежит осреднение основных переменных, введение дополнительных эмпирических параметров или прочие допущения и ограничения. В связи с этим в настоящее время особенно актуальными и, безусловно, перспективными являются численные методики, объединяющие в себе все преимущества прямых методов, оставаясь при этом гораздо менее ресурсоемкими. Семейство таких методик, которые при огрублении сетки не теряют большинство характеристик течения (коротковолновые гармоники энергетических спектров, например), известно как «методы *Perfect LES*». Один из подходов, претендующий на то, чтобы называться *Perfect LES*-методом, получил

название метода «КАБАРЕ» и последнее десятилетие активно развивается в ИБРАЭ РАН как универсальный высокоэффективный алгоритм численного решения систем гиперболических уравнений. В частности, данный метод успешно применен для моделирования тепловой конвекции несжимаемой жидкости в замкнутых двумерных и трехмерных областях. Как показано в настоящей работе, схема «КАБАРЕ» не содержит никаких настроечных коэффициентов, искусственных параметров и вспомогательных моделей. Эта схема, по сути, является лишь способом непосредственной дискретизации нестационарных уравнений Навье – Стокса и теплопроводности, записанных в консервативной форме с учетом приближения Буссинеска. Этого, как показано на примерах различных тестовых задач, вполне достаточно, поскольку все основные свойства свободноконвективного течения, включая его турбулизацию при высоких числах Рэлея, пульсации скорости и температуры, образование вихрей, уже заложены в исходную математическую модель – систему уравнений Навье – Стокса. Более того, схема «КАБАРЕ» позволяет точно промоделировать важнейшие характеристики турбулентной термоконвекции даже на достаточно грубых сетках (иначе это был бы простой *DNS*), что наглядно продемонстрировано в данной работе на разнообразных верификационных тестах.

Литература к главе 6

1. Batchelor G.K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures // Q. Appl. Math. – 1954. – 12 – P. 209–233.
2. Poots, G. Heat transfer by laminar free convection in enclosed plane gas layers // Q. Appl. Math. – 1958. – 11 – P. 257–273.
3. Hellums J.D., Churchill S.W. Transient and steady state free and natural convection, numerical solutions // AIChE J. – 1962. – 8 – P. 690–695.
4. Полежаев В.И. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунз, Н.А. Вереzub. – М.: Наука, 1987.
5. Ньюэл М., Шмидт Ф. Теплоотдача при ламинарной естественной конвекции в прямоугольной замкнутой области // Теплопередача, – 1970. – 92(1) – С. 106–117.
6. Elder J.W. Numerical experiments with free convection in a vertical slot. // Ibid. – 1966. – 24(4) – P. 823–843.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – Т. VI. – М.: Наука, 1986.
8. Trias, F.X. Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to 10^{11} // International Journal of Heat and Mass Transfer – Part I: Numerical methods and time-averaged flow. – 2010. – 53(4) – P. 665–673.
9. Головизнин В.М. Аномальная диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях / под ред. Л.А. Большова. – М.: Наука, 2010.
10. Головизнин В.М., Канаев А.А. Принцип минимума парциальных локальных вариаций для определения конвективных потоков при численном решении одномерных нелинейных скалярных гиперболических уравнений // ЖВМиМФ. – 2011. – 51(5) – P. 1–17.
11. Vahl Davis G.D. Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution // International Journal for Numerical Methods in Fluids. – 1983. – 3 – P. 249–264.

12. *Dixit H., Babu V.* Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2006. – 49 – P. 727–739.
13. *Barakos G., Mitsoulis E., Assimacopoulos D.* Natural Convection Flow in a Square Cavity Revisited: Laminar and Turbulent Models with Wall Functions // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 1994. – 18 – P. 695–719.
14. *Trias F.X.* Parameter-free symmetry-preserving regularization modeling of a turbulent differentially heated cavity // *Computers & Fluids*. – 2010. – 39(10) – P. 1815–1831.
15. *Trias F.X.* Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to 10^{11} // *International Journal of Heat and Mass Transfer – Part II: Heat transfer and flow dynamics*. – 2010. – 53 – P. 674–683.
16. *Henkes R.A.W.M., F.F. van der Vlugt, Hoogendoorn C.J.* Natural convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models // *International Journal of Heat and Mass Transfer* – 1991. – 34 – P. 1543–1557.
17. *Hortmann M., Perić M.* Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: benchmark solutions // *International Journal for Numerical Methods in Fluids* – 1990. – 11 – P. 189–207.
18. ERCOFTAC QNET Knowledge Base Wiki. URL: http://uri.ah.dedi.melbourne.co.uk/w/index.php/Main_Page.
19. *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. – М: Атомиздат, 1979.
20. *Betts P.L., Bokhari I.H.* Experiments on turbulent natural convection in an enclosed tall cavity // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. – 2000. – 21. – P. 675–683.
21. *Bokhari I.H.* Turbulent Natural Convection in a Tall Cavity. – University of Manchester Institute of Science and Technology, 1996.
22. *Ince N.Z., Launder B.E.* On the computation of buoyancy-driven turbulent flows in rectangular enclosures // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. – 1989. – 10:2 – P. 110–117.
23. *Betts P.L., Dafa'Alla A.A.* Turbulent buoyant air flow in a tall rectangular cavity // *ASME Annual Winter Meeting*. – 1986.

Схема «КАБАРЕ» для уравнений газовой динамики на четырехугольных криволинейных расчетных сетках в случае двух пространственных измерений

Введение

При расчетах газодинамических течений в областях сложной геометрической формы во многих случаях необходимо использовать расчетные сетки, адаптированные к границам области. Построение таких сеток часто представляет собой достаточно сложную самостоятельную научно-техническую задачу. К настоящему времени возник и бурно развивается перспективный сектор предпринимательской деятельности в сфере высоких технологий, связанный с построением расчетных сеток для инженерных компаний, работающих в области индустриальной математики. Появился специальный термин «сеточная модель». Требования к сеточным моделям со стороны заказчиков существенно зависят от решаемой задачи. Всегда крайне желательно, чтобы форма расчетных ячеек сеточной модели была как можно ближе к прямоугольной, однако, этого почти никогда невозможно добиться. Ячейки расчетной сетки получают, как правило, косоугольными, и на таких сетках нужно уметь строить эффективные вычислительные алгоритмы.

Настоящая глава посвящена обобщению схемы «КАБАРЕ» на косоугольные двумерные расчетные сетки.

Обобщение проведем для уравнений газовой динамики с учетом сил вязкости и процесса теплопроводности в двумерном случае. Дивергентная форма соответствующих уравнений в декартовых координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho Eu}{\partial x} + \frac{\partial \rho Ev}{\partial y} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \\ E &= e + \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad p = (\gamma - 1) \rho e, \quad e = c_v \cdot T, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где Re – безразмерное число Рейнольдса, Pe – число Пекле.

Аппроксимацию этой системы будем проводить в два этапа: на первом этапе в качестве базовых рассмотрим уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho Eu}{\partial x} + \frac{\partial \rho Ev}{\partial y} + \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} &= 0, \\ E &= e + \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad p = (\gamma - 1) \rho e,\end{aligned}\quad (7.2)$$

в которых отсутствуют диссипативные процессы; на втором этапе – аппроксимацию диссипативных членов и их включение в базовый алгоритм. Следует отметить, что такая последовательность действий вовсе не свидетельствует об использовании принципа «расщепления по физическим процессам», просто она позволяет упростить изложение и сделать его более компактным.

7.1. Уравнения Эйлера в криволинейных координатах

Рассмотрим четырехугольную расчетную ячейку (рис. 7.1) на плоскости декартовых переменных (x, y) и предположим, что в некоторой ее окрестности существует достаточно гладкое взаимно-однозначное отображение $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$, переводящее эту ячейку в прямоугольник со сторонами h_α, h_β в плоскости опорных переменных (α, β) .

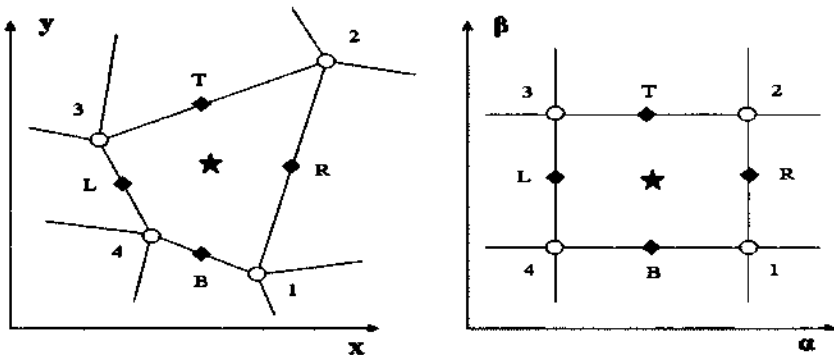


Рис. 7.1. Слева – произвольная четырехугольная ячейка; справа – прямоугольная ячейка, полученная преобразованием четырехугольной ячейки

Пусть J – якобиан этого отображения:

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Запишем систему уравнений Эйлера в криволинейных координатах (α, β) .
Учитывая следующее свойство якобианов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{D(\varphi, y)}{D(x, y)} = \frac{D(\varphi, y)}{D(\alpha, \beta)} \cdot \frac{D(\alpha, \beta)}{D(x, y)} = \frac{1}{J} \cdot \frac{D(\varphi, y)}{D(\alpha, \beta)}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{D(x, \varphi)}{D(x, y)} = \frac{D(x, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} \cdot \frac{D(\alpha, \beta)}{D(x, y)} = \frac{1}{J} \cdot \frac{D(x, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{D(\varphi, x)}{D(\alpha, \beta)}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

представим систему (7.2) в виде

$$\begin{aligned} J \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{D(\rho u, y)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, \rho v)}{D(\alpha, \beta)} &= 0, \\ J \cdot \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{D(\rho u^2, y)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, \rho uv)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(p, y)}{D(\alpha, \beta)} &= 0, \\ J \cdot \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{D(\rho uv, y)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, \rho v^2)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, p)}{D(\alpha, \beta)} &= 0, \\ J \cdot \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{D(\rho Eu, y)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, \rho Ev)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(pu, y)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, pv)}{D(\alpha, \beta)} &= 0, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$E = e + \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad p = (\gamma - 1) \rho e.$$

Для приведения этих уравнений к дивергентному виду используем дивергентную форму представления якобианов:

$$\begin{aligned} \frac{D(\varphi, y)}{D(\alpha, \beta)} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right), \\ \frac{D(x, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} &= -\frac{D(\varphi, x)}{D(\alpha, \beta)} = - \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\varphi \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\varphi \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 J \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho w^\beta}{\partial \beta} &= 0, \\
 J \cdot \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho u w^\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(p \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(p \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) &= 0, \\
 J \cdot \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v w^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho v w^\beta}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(p \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(p \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) &= 0, \\
 J \cdot \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E w^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho E w^\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial \rho w^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho w^\beta}{\partial \beta} &= 0, \\
 E = e + \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad p = (\gamma - 1) \rho e,
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

где

$$w^\alpha = u \frac{\partial y}{\partial \beta} - v \frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad w^\beta = -u \frac{\partial y}{\partial \alpha} + v \frac{\partial x}{\partial \alpha}. \tag{7.7}$$

Отметим, что в уравнениях (7.6) компоненты импульса выражены через декартовы компоненты скорости $\vec{w} = (u, v)$. Это обстоятельство является ключевым для сохранения консервативности (дивергентности) соответствующих уравнений.

Как и в одномерном случае, разностная схема «КАБАРЕ» будет базироваться не только на дивергентной форме уравнений (7.6), представляющей собой законы сохранения массы, импульса и полной энергии, но также и на их характеристическом виде

$$J \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \beta} = \vec{F}, \tag{7.8}$$

где $\vec{\psi} = (\rho, w^\alpha, w^\beta, p)^T$.

Получим выражения для матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Уравнения Эйлера можно представить в так называемой простой форме:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

С учетом свойств якобианов (7.3) эта система преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 J \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \frac{D(\rho, y)}{D(\alpha, \beta)} + v \cdot \frac{D(x, \rho)}{D(\alpha, \beta)} + \rho \cdot \frac{D(u, y)}{D(\alpha, \beta)} + \rho \cdot \frac{D(x, v)}{D(\alpha, \beta)} &= 0, \\
 J \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{D(u, y)}{D(\alpha, \beta)} + v \cdot \frac{D(x, u)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{D(\rho, y)}{D(\alpha, \beta)} &= 0, \\
 J \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{D(v, y)}{D(\alpha, \beta)} + v \cdot \frac{D(x, v)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{D(x, \rho)}{D(\alpha, \beta)} &= 0, \\
 J \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \frac{D(p, y)}{D(\alpha, \beta)} + v \cdot \frac{D(x, p)}{D(\alpha, \beta)} + \rho c^2 \left(\frac{D(u, y)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, v)}{D(\alpha, \beta)} \right) &= 0.
 \end{aligned} \quad (7.10)$$

Далее нам придется отказаться от декартовых проекций вектора скорости и произвести его разложение по локальному криволинейному базису.

Единичные векторы ковариантного базиса:

$$\begin{aligned}
 \vec{n}_\alpha &= \frac{1}{l_\alpha} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right), \quad \vec{n}_\beta = \frac{1}{l_\beta} \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial y}{\partial \beta} \right), \\
 l_\alpha &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2}, \quad l_\beta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2}.
 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Единичные векторы контравариантного базиса:

$$\vec{n}^\alpha = \frac{1}{l_\beta} \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}, -\frac{\partial x}{\partial \beta} \right), \quad \vec{n}^\beta = \frac{1}{l_\alpha} \left(-\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right). \quad (7.12)$$

где $\vec{w} = (u, v)$.

Введем обозначения

$$\vec{n}^\alpha \cdot l_\beta \cdot \vec{w} = w^\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \cdot u - \frac{\partial x}{\partial \beta} \cdot v \right), \quad \vec{n}^\beta \cdot l_\alpha \cdot \vec{w} = w^\beta = \left(-\frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot u + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot v \right), \quad (7.13)$$

где $u = \vec{w} \cdot \vec{n}_\alpha$, $v = \vec{w} \cdot \vec{n}_\beta$.

Из (7.13) следует, что

$$u = \frac{1}{J}(x_\alpha \cdot w^\alpha + x_\beta \cdot w^\beta), \quad v = \frac{1}{J}(y_\alpha \cdot w^\alpha + y_\beta \cdot w^\beta), \quad J = x_\alpha \cdot y_\beta - x_\beta \cdot y_\alpha. \quad (7.14)$$

Здесь и далее будем считать, что

$$x_\alpha \equiv \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad y_\alpha \equiv \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad x_\beta \equiv \frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad y_\beta \equiv \frac{\partial y}{\partial \beta}.$$

Подставляя выражения (7.14) в систему уравнений (7.10), после некоторых преобразований получаем:

$$A = \begin{pmatrix} w^\alpha & \rho & 0 & 0 \\ 0 & w^\alpha & 0 & l_\beta^2/\rho \\ 0 & 0 & w^\alpha & -\bar{l}_\alpha \cdot \bar{l}_\beta/\rho \\ 0 & \rho c^2 & 0 & w^\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} w^\beta & 0 & \rho & 0 \\ 0 & w^\beta & 0 & -\bar{l}_\alpha \cdot \bar{l}_\beta/\rho \\ 0 & 0 & w^\beta & l_\alpha^2/\rho \\ 0 & 0 & \rho c^2 & w^\beta \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ F_\alpha \\ F_\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

где $F_\alpha = F_\alpha(w^\alpha, w^\beta)$, $F_\beta = F_\beta(w^\alpha, w^\beta)$.

Следует отметить, что конкретный вид правых частей (7.8) нам не понадобится.

7.2. Разностная аппроксимация законов сохранения

На расчетной ячейке (рис. 7.1) зададим следующую локализацию переменных: к условному центру ячейки переменных (x, y) , обозначенному пятиконечной звездочкой, будем относить так называемые консервативные переменные: u_c, v_c, ρ_c, E_c , где u_c, v_c — декартовы компоненты скорости, ρ_c — плотность, $E_c = 0,5[(u_c)^2 + (v_c)^2] + e_c$ — полная энергия, e_c — удельная внутренняя энергия. К серединам граней расчетной ячейки, отмеченными ромбиками, отнесем так называемые потоковые переменные: u, v, ρ, p , где u, v — так же декартовы компоненты скорости, ρ — плотность, p — давление. Звездочка здесь заменяет литеры R, L, T, B , обозначающие стороны косоугольного четырехугольника на плоскости (x, y) и прямоугольника на плоскости (α, β) . К узлам расчетной ячейки относятся их декартовы координаты $x_k, y_k, k = 1, 2, 3, 4$.

Здесь и далее по тексту будет использоваться локальная индексация сеточных переменных, привязанная к различным шаблонам, приведенным на рисунках. Локальная индексация позволяет не только заметно облегчить зрительное восприятие формул, но и существенно облегчает переход к неструктурированным расчетным сеткам.

Осуществим переход от системы дифференциальных уравнений (7.6) к разностным в два этапа. На первом этапе проведем дискретизацию только пространственных операторов, оставляя нетронутыми производные по времени. Это приведет к системе дифференциальных по времени и разностных по пространству уравнений. На втором

этапе производные по времени будут также заменены конечными разностями, а пространственные операторы будут разнесены по соседним временным слоям.

Аппроксимируем компоненты скорости w^α, w^β , относящиеся к серединам граней:

$$\begin{aligned} w_R^\alpha &= u_R \cdot \frac{y_2 - y_1}{h_\beta} - v_R \cdot \frac{x_2 - x_1}{h_\beta}, & w_L^\alpha &= u_L \cdot \frac{y_3 - y_4}{h_\beta} - v_L \cdot \frac{x_3 - x_4}{h_\beta}, \\ w_B^\beta &= -u_B \cdot \frac{y_3 - y_4}{h_\alpha} + v_B \cdot \frac{x_3 - x_4}{h_\alpha}, & w_T^\beta &= -u_T \cdot \frac{y_2 - y_3}{h_\alpha} + v_T \cdot \frac{x_2 - x_3}{h_\alpha}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Формальная аппроксимация якобиана J дает

$$\begin{aligned} \langle J \rangle_c &= \left\{ \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle_c \cdot \left\langle \frac{\partial y}{\partial \beta} \right\rangle_c - \left\langle \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right\rangle_c \cdot \left\langle \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\rangle_c \right\} = \frac{S_c}{h_\alpha \cdot h_\beta}, \\ S_c &= \frac{1}{2} [(x_1 - x_3) \cdot (y_2 - y_4) - (y_1 - y_3) \cdot (x_2 - x_4)]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Заменяя в уравнении неразрывности производные по опорным переменным α, β центральными разностями, получаем

$$\frac{S_c}{h_\alpha \cdot h_\beta} \cdot \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{(\rho w^\alpha)_R - (\rho w^\alpha)_L}{h_\alpha} + \frac{(\rho w^\beta)_T - (\rho w^\beta)_B}{h_\beta} = 0,$$

что эквивалентно

$$S_c \cdot \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + h_\beta [(\rho w^\alpha)_R - (\rho w^\alpha)_L] + h_\alpha [(\rho w^\beta)_T - (\rho w^\beta)_B] = 0.$$

Учитывая (7.16), приходим к сеточному уравнению:

$$\begin{aligned} S_c \cdot \frac{\partial \rho_c}{\partial t} &+ \rho_R \cdot [u_R \cdot (y_2 - y_1) - v_R \cdot (x_2 - x_1)] - \rho_L \cdot [u_L \cdot (y_3 - y_4) - v_L \cdot (x_3 - x_4)] + \\ &+ \rho_T \cdot [-u_T \cdot (y_2 - y_3) + v_T \cdot (x_2 - x_3)] - \rho_B \cdot [-u_B \cdot (y_1 - y_4) + v_B \cdot (x_1 - x_4)]. \end{aligned}$$

Поступая аналогичным образом с другими уравнениями системы (7.6), получаем систему дифференциально-разностных (дифференциальных по времени и разностных по пространству) уравнений.

Закон сохранения массы:

$$\begin{aligned}
 & S_C \cdot \frac{\partial \rho_C}{\partial t} + \rho_R \cdot [u_R \cdot (y_2 - y_1) - v_R \cdot (x_2 - x_1)] - \\
 & - \rho_L \cdot [u_L \cdot (y_3 - y_4) - v_L \cdot (x_r - x_4)] + \\
 & + \rho_T \cdot [-u_T \cdot (y_2 - y_3) + v_T \cdot (x_2 - x_3)] - \\
 & - \rho_B \cdot [-u_B \cdot (y_1 - y_4) + v_B \cdot (x_1 - x_4)] = 0.
 \end{aligned} \quad (7.18)$$

Закон сохранения проекции импульса на декартову ось x :

$$\begin{aligned}
 & S_C \cdot \frac{\partial \rho_C \cdot u_C}{\partial t} + \rho_R \cdot u_R \cdot [u_R \cdot (y_2 - y_1) - v_R \cdot (x_2 - x_1)] - \\
 & - \rho_L \cdot u_L \cdot [u_L \cdot (y_3 - y_4) - v_L \cdot (x_r - x_4)] + \\
 & + \rho_T \cdot u_T \cdot [-u_T \cdot (y_2 - y_3) + v_T \cdot (x_2 - x_3)] - \\
 & - \rho_B \cdot u_B \cdot [-u_B \cdot (y_1 - y_4) + v_B \cdot (x_1 - x_4)] + \\
 & + p_R \cdot (y_2 - y_1) - p_L \cdot (y_3 - y_4) - p_T \cdot (y_2 - y_3) + p_B \cdot (y_1 - y_4) = 0.
 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Закон сохранения проекции импульса на декартову ось y :

$$\begin{aligned}
 & S_C \cdot \frac{\partial \rho_C \cdot v_C}{\partial t} + \rho_R \cdot v_R \cdot [u_R \cdot (y_2 - y_1) - v_R \cdot (x_2 - x_1)] - \\
 & - \rho_L \cdot v_L \cdot [u_L \cdot (y_3 - y_4) - v_L \cdot (x_r - x_4)] + \\
 & + \rho_T \cdot v_T \cdot [-u_T \cdot (y_2 - y_3) + v_T \cdot (x_2 - x_3)] - \\
 & - \rho_B \cdot v_B \cdot [-u_B \cdot (y_1 - y_4) + v_B \cdot (x_1 - x_4)] - \\
 & + p_R \cdot (x_2 - x_1) + p_L \cdot (x_3 - x_4) + p_T \cdot (x_2 - x_3) - p_B \cdot (x_1 - x_4) = 0.
 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Закон сохранения полной энергии:

$$\begin{aligned}
 & S_C \cdot \frac{\partial E_C \rho_C}{\partial t} + (\rho_R \cdot E_R + p_R) [u_R \cdot (y_2 - y_1) - v_R \cdot (x_2 - x_1)] - \\
 & - (\rho_L \cdot E_L + p_L) [u_L \cdot (y_3 - y_4) - v_L \cdot (x_r - x_4)] + \\
 & + (\rho_T \cdot E_T + p_T) [-u_T \cdot (y_2 - y_3) + v_T \cdot (x_2 - x_3)] - \\
 & - (\rho_B \cdot E_B + p_B) [-u_B \cdot (y_1 - y_4) + v_B \cdot (x_1 - x_4)] = 0.
 \end{aligned} \quad (7.21)$$

Для аппроксимации временной производной запишем эти уравнения в компактной символической форме:

$$S_C \cdot \frac{d\Theta_k}{dt} = L_k(a_1, a_2, a_3, a_4), \quad k=1,2,3,4, \quad (7.22)$$

где

$$\Theta_1 = \rho_C, \quad \Theta_2 = \rho_C \cdot u_C, \quad \Theta_3 = \rho_C \cdot v_C, \quad \Theta_4 = \rho_C \cdot E_C,$$

а параметры a_k обозначают потоковые переменные в центрах граней расчетной ячейки.

В выражении (7.22) произошла замена частной производной по времени на полную, поскольку для дискретных переменных они эквивалентны.

Для численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7.22) будем использовать схему «предиктор – корректор». Сначала по явной формуле Эйлера (предиктор) вычисляются промежуточные по времени значения консервативных переменных:

$$S_C \cdot \frac{\Theta_k^{n+1/2} - \Theta_k^n}{\tau/2} = L_k(a_1^n, a_2^n, a_3^n, a_4^n), \quad k=1,2,3,4. \quad (7.23)$$

Затем по неявной формуле Эйлера (корректор)

$$S_C \cdot \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^{n+1/2}}{\tau/2} = L_k(a_1^{n+1}, a_2^{n+1}, a_3^{n+1}, a_4^{n+1}), \quad k=1,2,3,4 \quad (7.24)$$

находятся консервативные переменные на новом временном слое.

Каждый из этих этапов аппроксимирует систему (7.22) с первым порядком по времени, однако, если (7.23) и (7.24) сложить, то в итоге получается «формула трапеций», обладающая вторым порядком аппроксимации:

$$S_C \cdot \frac{\Theta_k^{n+1} - \Theta_k^n}{\tau} = \frac{L_k(a_1^{n+1}, a_2^{n+1}, a_3^{n+1}, a_4^{n+1}) + L_k(a_1^n, a_2^n, a_3^n, a_4^n)}{2}, \quad k=1,2,3,4. \quad (7.25)$$

Промежуточные значения консервативных величин $\Theta_k^{n+1/2}$ потребуются для вычисления неизвестных потоковых переменных a_k^{n+1} , входящих в (7.24), по формулам линейной экстраполяции особых комбинаций этих переменных с использованием ограничителей, базирующихся на принципе максимума.

Таким образом, разностные схемы этапа «предиктор» имеют следующий вид.

Уравнение неразрывности:

$$\begin{aligned}
 S_C \cdot \frac{\rho_C^{n+1/2} - \rho_C^n}{\tau/2} + \rho_R^n \cdot [u_R^n \cdot (y_2 - y_1) - v_R^n \cdot (x_2 - x_1)] - \\
 - \rho_L^n \cdot [u_L^n \cdot (y_3 - y_4) - v_L^n \cdot (x_r - x_4)] + \\
 + \rho_T^n \cdot [-u_T^n \cdot (y_2 - y_3) + v_T^n \cdot (x_2 - x_3)] - \\
 - \rho_B^n \cdot [-u_B^n \cdot (y_1 - y_4) + v_B^n \cdot (x_1 - x_4)] = 0.
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Уравнение сохранения «иксовой» составляющей импульса:

$$\begin{aligned}
 S_C \cdot \frac{\rho_C^{n+1/2} \cdot u_C^{n+1/2} - \rho_C^n \cdot u_C^n}{\tau/2} + \\
 + \rho_R^n \cdot u_R^n \cdot [u_R^n \cdot (y_2 - y_1) - v_R^n \cdot (x_2 - x_1)] - \\
 - \rho_L^n \cdot u_L^n \cdot [u_L^n \cdot (y_3 - y_4) - v_L^n \cdot (x_r - x_4)] + \\
 + \rho_T^n \cdot u_T^n \cdot [-u_T^n \cdot (y_2 - y_3) + v_T^n \cdot (x_2 - x_3)] - \\
 - \rho_B^n \cdot u_B^n \cdot [-u_B^n \cdot (y_1 - y_4) + v_B^n \cdot (x_1 - x_4)] + \\
 + p_R^n \cdot (y_2 - y_1) - p_L^n \cdot (y_3 - y_4) - p_T^n \cdot (y_2 - y_3) + p_B^n \cdot (y_1 - y_4) = 0.
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

Уравнение сохранения «игрековой» составляющей импульса:

$$\begin{aligned}
 S_C \cdot \frac{\rho_C^{n+1/2} \cdot v_C^{n+1/2} - \rho_C^n \cdot v_C^n}{\tau/2} + \\
 + \rho_R^n \cdot v_R^n \cdot [u_R^n \cdot (y_2 - y_1) - v_R^n \cdot (x_2 - x_1)] - \\
 - \rho_L^n \cdot v_L^n \cdot [u_L^n \cdot (y_3 - y_4) - v_L^n \cdot (x_r - x_4)] + \\
 + \rho_T^n \cdot v_T^n \cdot [-u_T^n \cdot (y_2 - y_3) + v_T^n \cdot (x_2 - x_3)] - \\
 - \rho_B^n \cdot v_B^n \cdot [-u_B^n \cdot (y_1 - y_4) + v_B^n \cdot (x_1 - x_4)] - \\
 + p_R^n \cdot (x_2 - x_1) + p_L^n \cdot (x_3 - x_4) + p_T^n \cdot (x_2 - x_3) - p_B^n \cdot (x_1 - x_4) = 0.
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

Уравнение сохранения полной энергии:

$$\begin{aligned}
 S_C \cdot \frac{E_C^{n+1/2} \rho_C^{n+1/2} - E_C^n \rho_C^n}{\tau/2} + \\
 + (\rho_R^n \cdot E_R^n + p_R^n) [u_R^n \cdot (y_2 - y_1) - v_R^n \cdot (x_2 - x_1)] - \\
 - (\rho_L^n \cdot E_L^n + p_L^n) [u_L^n \cdot (y_3 - y_4) - v_L^n \cdot (x_r - x_4)] + \\
 + (\rho_T^n \cdot E_T^n + p_T^n) [-u_T^n \cdot (y_2 - y_3) + v_T^n \cdot (x_2 - x_3)] - \\
 - (\rho_B^n \cdot E_B^n + p_B^n) [-u_B^n \cdot (y_1 - y_4) + v_B^n \cdot (x_1 - x_4)] = 0.
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

Разностные уравнения этапа «корректор» выглядят аналогично.

Уравнение неразрывности:

$$\begin{aligned} S_C \cdot \frac{\rho_C^{n+1} - \rho_C^{n+1/2}}{\tau/2} + \rho_R^{n+1} \cdot [u_R^{n+1} \cdot (y_2 - y_1) - v_R^{n+1} \cdot (x_2 - x_1)] - \\ - \rho_L^{n+1} \cdot [u_L^{n+1} \cdot (y_3 - y_4) - v_L^{n+1} \cdot (x_r - x_4)] + \\ + \rho_T^{n+1} \cdot [-u_T^{n+1} \cdot (y_2 - y_3) + v_T^{n+1} \cdot (x_2 - x_3)] - \\ - \rho_B^{n+1} \cdot [-u_B^{n+1} \cdot (y_1 - y_4) + v_B^{n+1} \cdot (x_1 - x_4)] = 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Уравнение сохранения «иксовой» составляющей импульса:

$$\begin{aligned} S_C \cdot \frac{\rho_C^{n+1} \cdot u_C^{n+1} - \rho_C^{n+1/2} \cdot u_C^{n+1/2}}{\tau/2} + \\ + \rho_R^{n+1} \cdot u_R^{n+1} \cdot [u_R^{n+1} \cdot (y_2 - y_1) - v_R^{n+1} \cdot (x_2 - x_1)] - \\ - \rho_L^{n+1} \cdot u_L^{n+1} \cdot [u_L^{n+1} \cdot (y_3 - y_4) - v_L^{n+1} \cdot (x_r - x_4)] + \\ + \rho_T^{n+1} \cdot u_T^{n+1} \cdot [-u_T^{n+1} \cdot (y_2 - y_3) + v_T^{n+1} \cdot (x_2 - x_3)] - \\ - \rho_B^{n+1} \cdot u_B^{n+1} \cdot [-u_B^{n+1} \cdot (y_1 - y_4) + v_B^{n+1} \cdot (x_1 - x_4)] + \\ + p_R^{n+1} \cdot (y_2 - y_1) - p_L^{n+1} \cdot (y_3 - y_4) - p_T^{n+1} \cdot (y_2 - y_3) + p_B^{n+1} \cdot (y_1 - y_4) = 0. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Уравнение сохранения «изрековой» составляющей импульса:

$$\begin{aligned} S_C \cdot \frac{\rho_C^{n+1} \cdot v_C^{n+1} - \rho_C^{n+1/2} \cdot v_C^{n+1/2}}{\tau/2} + \\ + \rho_R^{n+1} \cdot v_R^{n+1} \cdot [u_R^{n+1} \cdot (y_2 - y_1) - v_R^{n+1} \cdot (x_2 - x_1)] - \\ - \rho_L^{n+1} \cdot v_L^{n+1} \cdot [u_L^{n+1} \cdot (y_3 - y_4) - v_L^{n+1} \cdot (x_r - x_4)] + \\ + \rho_T^{n+1} \cdot v_T^{n+1} \cdot [-u_T^{n+1} \cdot (y_2 - y_3) + v_T^{n+1} \cdot (x_2 - x_3)] - \\ - \rho_B^{n+1} \cdot v_B^{n+1} \cdot [-u_B^{n+1} \cdot (y_1 - y_4) + v_B^{n+1} \cdot (x_1 - x_4)] - \\ + p_R^{n+1} \cdot (x_2 - x_1) + p_L^{n+1} \cdot (x_3 - x_4) + p_T^{n+1} \cdot (x_2 - x_3) - p_B^{n+1} \cdot (x_1 - x_4) = 0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Уравнение сохранения полной энергии:

$$\begin{aligned}
 S_c \cdot \frac{E_c^{n+1} \rho_c^{n+1} - E_c^{n+1/2} \rho_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \\
 + (\rho_R^{n+1} \cdot E_R^{n+1} + p_R^{n+1}) [u_R^{n+1} \cdot (y_2 - y_1) - v_R^{n+1} \cdot (x_2 - x_1)] - \\
 - (\rho_L^{n+1} \cdot E_L^{n+1} + p_L^{n+1}) [u_L^{n+1} \cdot (y_3 - y_4) - v_L^{n+1} \cdot (x_3 - x_4)] + \\
 + (\rho_T^{n+1} \cdot E_T^{n+1} + p_T^{n+1}) [-u_T^{n+1} \cdot (y_2 - y_3) + v_T^{n+1} \cdot (x_2 - x_3)] - \\
 - (\rho_T^{n+1} \cdot E_T^{n+1} + p_T^{n+1}) [-u_T^{n+1} \cdot (y_1 - y_4) + v_T^{n+1} \cdot (x_1 - x_4)] = 0.
 \end{aligned} \quad (7.33)$$

Следует отметить, что в окончательный результат – разностные уравнения – (7.26)–(7.33) величины h_α, h_β не вошли, хотя аппроксимации подвергались уравнения (7.6), записанные в криволинейных координатах (α, β) .

7.3. Вычисление потоковых переменных на новом временном слое

Основная особенность схемы «КАБАРЕ» заключается в алгоритме вычисления неизвестных значений потоковых переменных на новом временном слое. Новые потоковые переменные вычисляются посредством линейной экстраполяции с нижнего слоя через промежуточные консервативные переменные на полуцелом временном слое (рис. 7.2), при этом экстраполяции подвергаются не отдельные потоковые переменные, а некоторые их комбинации $\mathcal{F}_k(\rho, u, v, p), k=1, 2, 3, 4$, для которых в каждом из двух направлений (вдоль изменения опорной координаты α и вдоль координаты β) выполняется уравнение переноса. Для нахождения таких комбинаций и используется характеристическая форма уравнений газовой динамики, записанная в криволинейных координатах (7.8).

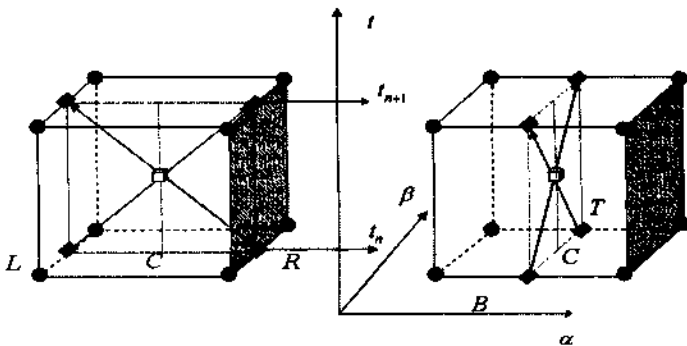


Рис. 7.2. Расчет потоковых переменных на новом временном слое

Определим вид функций $\mathcal{F}_k(\rho, u, v, p)$, $k=1,2,3,4$ для направления переноса вдоль α ($\beta = \text{const}$).

Характеристическое представление уравнений газовой динамики в этом направлении имеет вид:

$$\begin{aligned} J \cdot \left(\frac{\partial w^\alpha}{\partial t} + \frac{l_\beta}{\rho c} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + (w^\alpha + c \cdot l_\beta) \left(\frac{\partial w^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{l_\beta}{\rho c} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) &= G_1^\alpha, \\ J \cdot \left(\frac{\partial w^\alpha}{\partial t} - \frac{l_\beta}{\rho c} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + (w^\alpha - c \cdot l_\beta) \left(\frac{\partial w^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{l_\beta}{\rho c} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) &= G_2^\alpha, \\ J \cdot \left(\frac{\partial w^\beta}{\partial t} + \frac{\bar{l}_\alpha \cdot \bar{l}_\beta}{l_\beta^2} \cdot \frac{\partial w^\alpha}{\partial t} \right) + w^\alpha \cdot \left(\frac{\partial w^\beta}{\partial \alpha} + \frac{\bar{l}_\alpha \cdot \bar{l}_\beta}{l_\beta^2} \cdot \frac{\partial w^\alpha}{\partial \alpha} \right) &= G_3^\alpha, \\ J \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + w^\alpha \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \right) &= G_4^\alpha. \end{aligned} \quad (7.34)$$

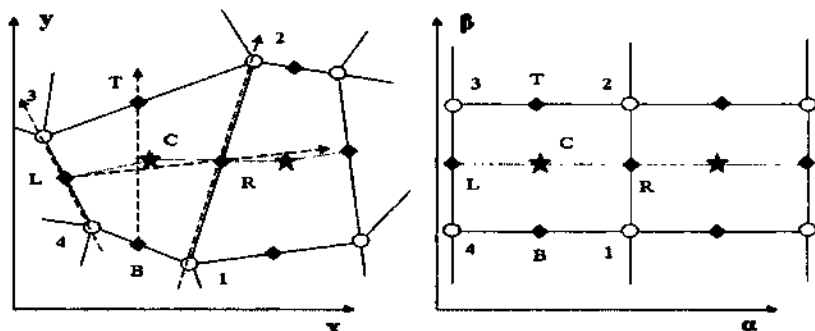


Рис. 7.3. Переход от произвольных четырехугольных ячеек к прямоугольным при линейной экстраполяции потоковых переменных на новый временной слой

Поскольку глобальные римановы инварианты существуют не для всех течений, будем искать так называемые локальные римановы инварианты, существующие в пределах одной расчетной ячейки. Будем считать, что энтропия, вычисленная по консервативным переменным, полученным на промежуточном временном слое на этапе «предиктор», остается постоянной во всей пространственно-временной области, занимаемой ячейкой. Локальные римановы инварианты для первых двух уравнений системы в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} R &= w^\alpha + \langle l_\beta \rangle_c \cdot G_C^{n+1/2} \cdot p^\mu, \quad Q = w^\alpha - \langle l_\beta \rangle_c \cdot G_C^{n+1/2} \cdot p^\mu, \\ \mu &= \frac{\gamma-1}{2\gamma}, G_C^{n+1/2} = \frac{2\sqrt{\gamma} \cdot (p_C^{n+1/2})^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{\rho_C^{n+1/2}}}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Для оставшихся двух уравнений допущение о постоянстве энтропии в ячейке существенно. Для третьего уравнения системы (7.34) следует принять допущение, что в пределах расчетной ячейки выполняется условие

$$\frac{\bar{l}_\alpha \cdot \bar{l}_\beta}{l_\beta^2} = \left\langle \frac{\bar{l}_\alpha \cdot \bar{l}_\beta}{l_\beta^2} \right\rangle_c = \text{const}.$$

Это приводит к локальному инварианту

$$W = w^\beta + \left\langle \frac{\bar{l}_\alpha \cdot \bar{l}_\beta}{l_\beta^2} \right\rangle_c \cdot w^\alpha. \quad (7.37)$$

Для четвертого уравнения локальный инвариант определяется без каких-либо дополнительных предположений:

$$\theta = \ln \frac{p}{\rho^\gamma}. \quad (7.38)$$

После того, как структура экстраполируемых комплексов $\mathcal{F}_k(\rho, u, v, p)$, $k=1, 2, 3, 4$ определена, т. е. установлено, что

$$\mathcal{F}_1(\rho, u, v, p) \equiv R; \quad \mathcal{F}_2(\rho, u, v, p) \equiv Q; \quad \mathcal{F}_3(\rho, u, v, p) \equiv W; \quad \mathcal{F}_4(\rho, u, v, p) \equiv \theta, \quad (7.39)$$

необходимо выявить правила нелинейной коррекции результатов экстраполяции.

В терминах локальных инвариантов система (7.34) с учетом модификации (7.36) в пределах каждой пространственно-временной расчетной ячейки преобразуется к форме

$$\begin{aligned} \langle J \rangle_c \cdot \frac{\partial R}{\partial t} + \left\langle (w^\alpha + c \cdot l_\beta) \right\rangle_c \cdot \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= \langle G_1^\alpha \rangle_c, \\ \langle J \rangle_c \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \left\langle (w^\alpha - c \cdot l_\beta) \right\rangle_c \cdot \frac{\partial Q}{\partial \alpha} &= \langle G_2^\alpha \rangle_c, \\ \langle J \rangle_c \cdot \frac{\partial W}{\partial t} + \langle w^\alpha \rangle_c \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha} &= \langle G_3^\alpha \rangle_c, \\ \langle J \rangle_c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} + \langle w^\alpha \rangle_c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} &= \langle G_4^\alpha \rangle_c. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Каждое из уравнений, входящих в эту систему, представляет собой неоднородное уравнение переноса в направлении α , что дает возможность применить технику экстраполяции и нелинейной коррекции, разработанную для одномерных уравнений переноса.

7.3.1. Процедура линейной экстраполяции локальных инвариантов

Экстраполяция первых двух локальных инвариантов в пределах левой ячейки (рис. 7.2) будет выглядеть как

$$\begin{aligned} R_R^{n+1} &= 2 \cdot R_C^{n+1/2} - R_L^n; & Q_R^{n+1} &= 2 \cdot Q_C^{n+1/2} - Q_L^n, \\ R_L^{n+1} &= 2 \cdot R_C^{n+1/2} - R_R^n; & Q_L^{n+1} &= 2 \cdot Q_C^{n+1/2} - Q_R^n, \end{aligned} \quad (7.41)$$

где

$$\begin{aligned} R_R^n &= (w^a)_R^n + (l_\beta)_C \cdot G_C^{n+1/2} \cdot (p^\mu)_R^n, & Q_R^n &= (w^a)_R^n - (l_\beta)_C \cdot G_C^{n+1/2} \cdot (p^\mu)_R^n, \\ R_L^n &= (w^a)_L^n + (l_\beta)_C \cdot G_C^{n+1/2} \cdot (p^\mu)_L^n, & Q_L^n &= (w^a)_L^n - (l_\beta)_C \cdot G_C^{n+1/2} \cdot (p^\mu)_L^n, \\ R_C^n &= (w^a)_C^n + (l_\beta)_C \cdot G_C^{n+1/2} \cdot (p^\mu)_C^n, & Q_C^n &= (w^a)_C^n - (l_\beta)_C \cdot G_C^{n+1/2} \cdot (p^\mu)_C^n \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (w^a)_R^n &= \frac{1}{h_\beta} \cdot [u_R^n \cdot (y_2 - y_1) - v_R^n \cdot (x_2 - x_1)], & (l_\beta)_R &= \frac{1}{h_\beta} \cdot \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}, \\ (w^a)_L^n &= \frac{1}{h_\beta} \cdot [u_L^n \cdot (y_3 - y_4) - v_L^n \cdot (x_3 - x_4)], & (l_\beta)_L &= \frac{1}{h_\beta} \cdot \sqrt{(y_3 - y_4)^2 + (x_3 - x_4)^2}, \\ (w^a)_C^n &= \frac{1}{h_\beta} \cdot [u_C^n \cdot (y_7 - y_8) - v_C^n \cdot (x_7 - x_8)], & (l_\beta)_C &= \frac{1}{h_\beta} \cdot \sqrt{(y_7 - y_8)^2 + (x_7 - x_8)^2}, \\ x_7 &= \frac{x_2 + x_3}{2}, & y_7 &= \frac{y_2 + y_3}{2}, & x_8 &= \frac{x_1 + x_4}{2}, & y_8 &= \frac{y_1 + y_4}{2}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Экстраполяция в пределах расчетной ячейки третьего инварианта дает

$$W_R^{n+1} = 2 \cdot W_C^{n+1/2} - W_L^n, \quad W_L^{n+1} = 2 \cdot W_C^{n+1/2} - W_R^n,$$

где (рис. 7.3)

$$\begin{aligned} W_R^n &= (w^a)_{RC}^n + \frac{(\bar{l}_a)_C \cdot (\bar{l}_\beta)_C}{(l_\beta)_C^2} \cdot (w^a)_R^n, & (w^a)_{RC}^n &= -u_R^n \cdot \frac{y_R - y_L}{h_a} + v_R^n \cdot \frac{x_R - x_L}{h_a}, \\ W_L^n &= (w^a)_{LC}^n + \frac{(\bar{l}_a)_C \cdot (\bar{l}_\beta)_C}{(l_\beta)_C^2} \cdot (w^a)_L^n, & (w^a)_{LC}^n &= -u_L^n \cdot \frac{y_R - y_L}{h_a} + v_L^n \cdot \frac{x_R - x_L}{h_a}, \\ W_C^n &= (w^a)_{CC}^n + \frac{(\bar{l}_a)_C \cdot (\bar{l}_\beta)_C}{(l_\beta)_C^2} \cdot (w^a)_C^n, & (w^a)_{CC}^n &= -u_C^n \cdot \frac{y_R - y_L}{h_a} + v_C^n \cdot \frac{x_R - x_L}{h_a}, \\ x_R &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2), & x_L &= \frac{1}{2}(x_3 + x_4), & y_R &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2), & y_L &= \frac{1}{2}(y_3 + y_4), \\ (\bar{l}_a)_C &= \left\{ -\frac{y_R - y_L}{h_a}, \frac{x_R - x_L}{h_a} \right\}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Энтропийный инвариант θ экстраполируется обычным образом:

$$\theta_R^{n+1} = 2 \cdot \theta_C^{n+1/2} - \theta_L^n, \quad \theta_L^{n+1} = 2 \cdot \theta_C^{n+1/2} - \theta_R^n.$$

7.3.2. Процедура нелинейной коррекции потоковых переменных на основе принципа максимума

Нелинейная коррекция на основе принципа максимума для локального инварианта $R_{R,L}^{n+1}$ осуществляется следующим образом:

$$R_{R,L}^{n+1} = \begin{cases} R_{R,L}^{n+1} & \text{if } \min(R) \leq R_{R,L}^{n+1} \leq \max(R) \\ \min(R) & \text{if } R_{R,L}^{n+1} < \min(R) \\ \max(R) & \text{if } R_{R,L}^{n+1} > \max(R) \end{cases},$$

где

$$\min(R) = \min(R_L^n, R_C^n, R_R^n) + \tau \cdot D_R, \quad \max(R) = \max(R_L^n, R_C^n, R_R^n) + \tau \cdot D_R,$$

$$D_R = \frac{R_C^{n+1/2} - R_C^n}{\tau/2} + \frac{h_\alpha \cdot h_\beta}{S_C} \cdot (w^\alpha + c \cdot l_\beta)_C^{n+1/2} \cdot \frac{R_R^n - R_L^n}{h_\alpha}. \quad (7.44)$$

Аналогично для локального инварианта Q :

$$Q_{R,L}^{n+1} = \begin{cases} Q_{R,L}^{n+1} & \text{if } \min(Q) \leq Q_{R,L}^{n+1} \leq \max(Q) \\ \min(Q) & \text{if } Q_{R,L}^{n+1} < \min(Q) \\ \max(Q) & \text{if } Q_{R,L}^{n+1} > \max(Q) \end{cases},$$

$$\min(Q) = \min(Q_L^n, Q_C^n, Q_R^n) + \tau \cdot D_Q, \quad \max(Q) = \max(Q_L^n, Q_C^n, Q_R^n) + \tau \cdot D_Q,$$

$$D_Q = \frac{Q_C^{n+1/2} - Q_C^n}{\tau/2} + \frac{h_\alpha \cdot h_\beta}{S_C} \cdot (w^\alpha - c \cdot l_\beta)_C^{n+1/2} \cdot \frac{Q_R^n - Q_L^n}{h_\alpha}. \quad (7.45)$$

Для инварианта W :

$$W_{R,L}^{n+1} = \begin{cases} W_{R,L}^{n+1} & \text{if } \min(W) \leq W_{R,L}^{n+1} \leq \max(W) \\ \min(W) & \text{if } W_{R,L}^{n+1} < \min(W) \\ \max(W) & \text{if } W_{R,L}^{n+1} > \max(W) \end{cases},$$

$$\min(W) = \min(W_L^n, W_C^n, W_R^n) + \tau \cdot D_W, \quad \max(W) = \max(W_L^n, W_C^n, W_R^n) + \tau \cdot D_W,$$

$$D_W = \frac{W_C^{n+1/2} - W_C^n}{\tau/2} + \frac{h_\alpha \cdot h_\beta}{S_C} \cdot (w^\alpha)_C^{n+1/2} \cdot \frac{W_R^n - W_L^n}{h_\alpha}. \quad (7.46)$$

И для энтропии S :

$$\theta_{R,L}^{n+1} = \begin{cases} \theta_{R,L}^{n+1} & \text{if } \min(\theta) \leq \theta_{R,L}^{n+1} \leq \max(\theta) \\ \min(\theta) & \text{if } \theta_{R,L}^{n+1} < \min(\theta) \\ \max(\theta) & \text{if } \theta_{R,L}^{n+1} > \max(\theta) \end{cases},$$

$$\min(\theta) = \min(\theta_L^n, \theta_C^n, \theta_R^n) + \tau \cdot D_S, \quad \max(\theta) = \max(\theta_L^n, \theta_C^n, \theta_R^n) + \tau \cdot D_S,$$

$$D_\theta = \frac{\theta_C^{n+1/2} - \theta_C^n}{\tau/2} + \frac{h_\alpha \cdot h_\beta}{S_C} \cdot (w^\alpha)_C^{n+1/2} \cdot \frac{\theta_R^n - \theta_L^n}{h_\alpha}. \quad (7.47)$$

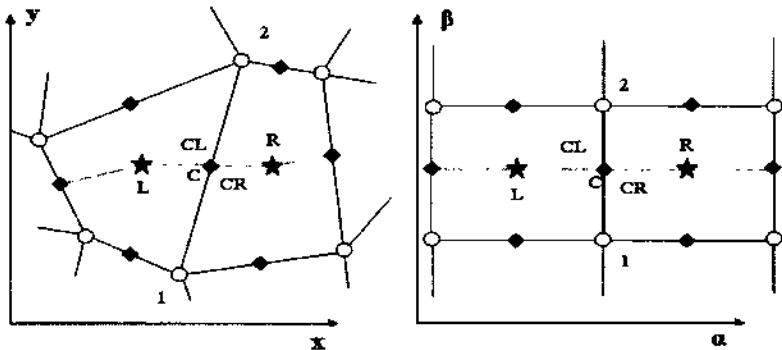


Рис. 7.4. Переход от произвольных четырехугольных ячеек к прямоугольным при нелинейной коррекции потоковых переменных

7.3.3. Процедура селекции локальных инвариантов и вычисления новых потоковых переменных

Для вычисления потоковых переменных на новом временном слое на вертикальном ребре (рис. 7.3б) в точке C используется следующий алгоритм. Пусть $R_{CL}^{n+1}, Q_{CL}^{n+1}, W_{CL}^{n+1}, \theta_{CL}^{n+1}$ — локальные инварианты, вычисленные в точке C по параметрам левой ячейки; $R_{CR}^{n+1}, Q_{CR}^{n+1}, W_{CR}^{n+1}, \theta_{CR}^{n+1}$ — инварианты, вычисленные по правой ячейке (рис. 7.3). Таким образом, к точке C приписано в два раза больше локальных инвариантов, чем нужно. В точке C проводится их селекция. Для осуществления селекции в настоящее время используется несколько альтернативных алгоритмов и окончательного решения о том, какой из них является наилучшим, пока не принято. Остановимся на наиболее простом. Усредним характеристические числа уравнений переноса (7.44), (7.45), (7.46) по двум прилегающим к ребру C ячейкам и отнесем результат к точке C :

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,C} &= \frac{h_\alpha \cdot h_\beta}{2} \left[\frac{1}{S_L} \cdot (w^\alpha + c \cdot l_\beta)_L^{n+1/2} + \frac{1}{S_R} \cdot (w^\alpha + c \cdot l_\beta)_R^{n+1/2} \right], \\
\lambda_{2,C} &= \frac{h_\alpha \cdot h_\beta}{2} \left[\frac{1}{S_L} \cdot (w^\alpha - c \cdot l_\beta)_L^{n+1/2} + \frac{1}{S_R} \cdot (w^\alpha - c \cdot l_\beta)_R^{n+1/2} \right], \\
\lambda_{3,C} &= \frac{h_\alpha \cdot h_\beta}{2} \left[\frac{(w^\alpha)_L^{n+1/2}}{S_L} + \frac{(w^\alpha)_R^{n+1/2}}{S_R} \right].
\end{aligned} \tag{7.48}$$

Будем выбирать нужные локальные инварианты в зависимости от знака соответствующих характеристических чисел:

$$\begin{aligned}
R_C^{n+1} &= \begin{cases} R_{CL}^{n+1} & \text{if } \lambda_{1,C} \geq 0 \\ R_{CR}^{n+1} & \text{if } \lambda_{1,C} < 0 \end{cases}, & Q_C^{n+1} &= \begin{cases} Q_{CL}^{n+1} & \text{if } \lambda_{2,C} \geq 0 \\ Q_{CR}^{n+1} & \text{if } \lambda_{2,C} < 0 \end{cases}, \\
W_C^{n+1} &= \begin{cases} W_{CL}^{n+1} & \text{if } \lambda_{3,C} \geq 0 \\ W_{CR}^{n+1} & \text{if } \lambda_{3,C} < 0 \end{cases}, & \theta_C^{n+1} &= \begin{cases} \theta_{CL}^{n+1} & \text{if } \lambda_{4,C} \geq 0 \\ \theta_{CR}^{n+1} & \text{if } \lambda_{4,C} < 0 \end{cases}.
\end{aligned} \tag{7.49}$$

Далее составляются и решаются системы уравнений относительно неизвестных p_C^{n+1} и $(w^\alpha)_C^{n+1}$:

if $[(\lambda_{1,C} \geq 0) \& (\lambda_{2,C} < 0)]$ then

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} (w^\alpha)_C^{n+1} + G_L^{n+1/2} \cdot (l_\beta)_C \cdot (p_C^{n+1})^\mu &= R_C^{n+1} \\ (w^\alpha)_C^{n+1} - G_R^{n+1/2} \cdot (l_\beta)_C \cdot (p_C^{n+1})^\mu &= Q_C^{n+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (w^\alpha)_C^{n+1} = \frac{R_C^{n+1} \cdot G_R^{n+1/2} + Q_C^{n+1} \cdot G_L^{n+1/2}}{G_R^{n+1/2} + G_L^{n+1/2}} \\ p_C^{n+1} = \left[\frac{R_C^{n+1} - Q_C^{n+1}}{(G_R^{n+1/2} + G_L^{n+1/2}) \cdot (l_\beta)_C} \right]^\frac{1}{\mu} \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.50}$$

if $[(\lambda_{1,C} \geq 0) \& (\lambda_{2,C} \geq 0)]$ then

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} (w^\alpha)_C^{n+1} + G_L^{n+1/2} \cdot (l_\beta)_C \cdot (p_C^{n+1})^\mu &= R_C^{n+1} \\ (w^\alpha)_C^{n+1} - G_L^{n+1/2} \cdot (l_\beta)_C \cdot (p_C^{n+1})^\mu &= Q_C^{n+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (w^\alpha)_C^{n+1} = \frac{R_C^{n+1} + Q_C^{n+1}}{2} \\ p_C^{n+1} = \left[\frac{R_C^{n+1} - Q_C^{n+1}}{2 \cdot G_L^{n+1/2} \cdot (l_\beta)_C} \right]^\frac{1}{\mu} \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.51}$$

if $[(\lambda_{1,c} < 0) \& (\lambda_{2,c} < 0)]$ then

$$\left. \begin{aligned} (w^\alpha)_c^{n+1} + G_R^{n+1/2} \cdot (l_\beta)_c \cdot (p_c^{n+1})^\mu &= R_c^{n+1} \\ (w^\alpha)_c^{n+1} - G_R^{n+1/2} \cdot (l_\beta)_c \cdot (p_c^{n+1})^\mu &= Q_c^{n+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (w^\alpha)_c^{n+1} = \frac{R_c^{n+1} + Q_c^{n+1}}{2} \\ p_c^{n+1} = \left[\frac{R_c^{n+1} - Q_c^{n+1}}{2 \cdot G_R^{n+1/2} \cdot (l_\beta)_c} \right]^\frac{1}{\mu} \end{cases} \quad (7.52)$$

if $[(\lambda_{1,c} < 0) \& (\lambda_{2,c} \geq 0)]$ then

$$\left. \begin{aligned} (w^\alpha)_c^{n+1} + G_R^{n+1/2} \cdot (l_\beta)_c \cdot (p_c^{n+1})^\mu &= R_c^{n+1} \\ (w^\alpha)_c^{n+1} - G_L^{n+1/2} \cdot (l_\beta)_c \cdot (p_c^{n+1})^\mu &= Q_c^{n+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (w^\alpha)_c^{n+1} = \frac{R_c^{n+1} \cdot G_L^{n+1/2} + Q_c^{n+1} \cdot G_R^{n+1/2}}{G_R^{n+1/2} + G_L^{n+1/2}} \\ p_c^{n+1} = \left[\frac{R_c^{n+1} - Q_c^{n+1}}{(G_R^{n+1/2} + G_L^{n+1/2}) \cdot (l_\beta)_c} \right]^\frac{1}{\mu} \end{cases} \quad (7.53)$$

Для вычисления остальных переменных используется уже вычисленное значение $(w^\alpha)_c^{n+1}$:

if $[(w^\alpha)_c^{n+1} \geq 0]$ then

$$(w^\beta)_{LC}^{n+1} = W_{CL}^{n+1} - \frac{(\bar{l}_\alpha)_L \cdot (\bar{l}_\beta)_C}{(l_\beta)_C^2} \cdot (w^\alpha)_c^{n+1}; \quad (w^\beta)_{LC}^{n+1} = -u_c^{n+1} \cdot \frac{y_{LR} - y_{LL}}{h_\alpha} + v_c^{n+1} \cdot \frac{x_{LR} - x_{LL}}{h_\alpha}$$

else

$$(w^\beta)_{RC}^{n+1} = W_{CR}^{n+1} - \frac{(\bar{l}_\alpha)_R \cdot (\bar{l}_\beta)_C}{(l_\beta)_C^2} \cdot (w^\alpha)_c^{n+1}; \quad (w^\beta)_{RC}^{n+1} = -u_c^{n+1} \cdot \frac{y_{RR} - y_{RL}}{h_\alpha} + v_c^{n+1} \cdot \frac{x_{RR} - x_{RL}}{h_\alpha}$$

endif

(7.54)

$$\text{if } [(w^\alpha)_c^{n+1} \geq 0] \text{ then } \rho_c^{n+1} = \left[\frac{p_c^{n+1}}{\exp(\theta_{CL}^{n+1})} \right]^\frac{1}{\gamma} \text{ else } \rho_c^{n+1} = \left[\frac{p_c^{n+1}}{\exp(\theta_{CR}^{n+1})} \right]^\frac{1}{\gamma} \quad (7.55)$$

Осталось вычислить декартовы компоненты потоковых скоростей из систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned}
 & \text{if } \left[(w^\alpha)_C^{n+1} \geq 0 \right] \quad \text{then} \\
 & \left. \begin{aligned} & -u_C^{n+1} \cdot \frac{y_{LR} - y_{LL}}{h_\alpha} + v_C^{n+1} \cdot \frac{x_{LR} - x_{LL}}{h_\alpha} = (w^\beta)_{LC}^{n+1} \\ & \frac{1}{h_\beta} \cdot [u_C^{n+1} \cdot (y_2 - y_1) - v_C^{n+1} \cdot (x_2 - x_1)] = (w^\alpha)_C^{n+1} \end{aligned} \right\} \\
 & \text{else} \\
 & \left. \begin{aligned} & -u_C^{n+1} \cdot \frac{y_{RR} - y_{RL}}{h_\alpha} + v_C^{n+1} \cdot \frac{x_{RR} - x_{RL}}{h_\alpha} = (w^\beta)_{RC}^{n+1} \\ & \frac{1}{h_\beta} \cdot [u_C^{n+1} \cdot (y_2 - y_1) - v_C^{n+1} \cdot (x_2 - x_1)] = (w^\alpha)_C^{n+1} \end{aligned} \right\} \\
 & \text{endif}
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

Следует отметить, что, хотя в вышеприведенные формулы входят величины h_α, h_β , все они легко сокращаются и окончательный результат от них не зависит. Для того, чтобы не преобразовывать все эти выкладки в форме, не зависящей от h_α, h_β , достаточно задать их равными единице.

Вычисление потоковых переменных на горизонтальных гранях расчетной ячейки (рис. 7.5) в плоскости (α, β) проводится аналогичным образом.

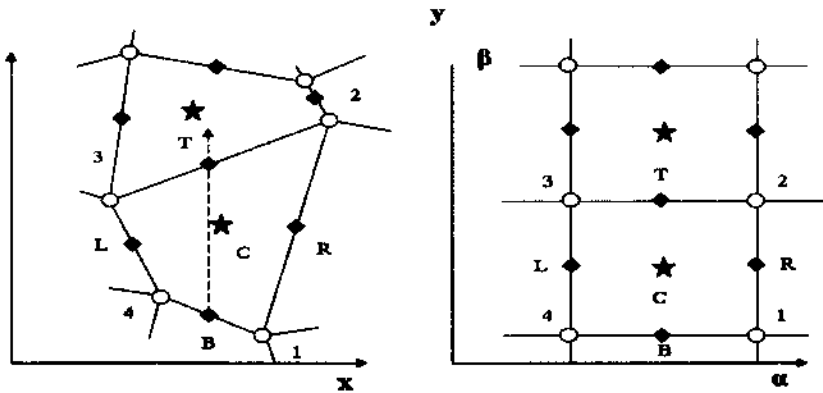


Рис. 7.5. Переход от произвольных четырехугольных ячеек к прямоугольным при вычислении новых потоковых переменных

7.4. Учет вязкости

Для учета вязкости и теплопроводности нужно аппроксимировать оператор Лапласа, который можно представить как суперпозицию операторов дивергенции и градиента:

$$\Delta \phi = \text{div} \cdot \text{grad}(\phi) \tag{7.57}$$

Предположим, что эта задача каким-то образом решена и мы имеем сеточные операторы $DIV(\cdot)$ и $GRAD(\cdot)$ такие, что каждый из них аппроксимирует соответствующий дифференциальный оператор и область определения первого из них совпадает с областью значений второго, и можно составить суперпозицию

$$\Delta_h \varphi_h = DIV_h \cdot GRAD_h(\varphi_h), \quad (7.58)$$

где φ_h – сеточная функция.

Алгоритм учета вязкости и теплопроводности в схеме «КАБАРЕ» удобно представить в терминах символической формы записи этапов «предиктор – корректор», введенной ранее.

Самый естественный способ учета диссипативных процессов, не нарушающий второго порядка точности уравнений по времени и не приводящий к появлению дополнительных ограничений на величину шага по времени, выглядит следующим образом.

Неявный предиктор

$$\begin{aligned} S_C \cdot \frac{\Theta_1^{n+1/2} - \Theta_1^n}{\tau/2} &= L_1(a_1^n, a_2^n, a_3^n, a_4^n), \\ S_C \cdot \frac{\Theta_2^{n+1/2} - \Theta_2^n}{\tau/2} &= L_2(a_1^n, a_2^n, a_3^n, a_4^n) + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \Delta_h \cdot \left\{ \frac{\Theta_2^{n+1/2}}{\Theta_1^{n+1/2}} \right\}, \\ S_C \cdot \frac{\Theta_3^{n+1/2} - \Theta_3^n}{\tau/2} &= L_3(a_1^n, a_2^n, a_3^n, a_4^n) + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \Delta_h \cdot \left\{ \frac{\Theta_3^{n+1/2}}{\Theta_1^{n+1/2}} \right\}, \\ S_C \cdot \frac{\Theta_4^{n+1/2} - \Theta_4^n}{\tau/2} &= L_4(a_1^n, a_2^n, a_3^n, a_4^n) + \frac{1}{\text{Pe}} \cdot \Delta_h \cdot T^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (7.59)$$

где T – сеточная функция температуры.

Явный корректор

$$\begin{aligned} S_C \cdot \frac{\Theta_1^{n+1} - \Theta_1^{n+1/2}}{\tau/2} &= L_1(a_1^{n+1}, a_2^{n+1}, a_3^{n+1}, a_4^{n+1}), \\ S_C \cdot \frac{\Theta_2^{n+1} - \Theta_2^{n+1/2}}{\tau/2} &= L_2(a_1^{n+1}, a_2^{n+1}, a_3^{n+1}, a_4^{n+1}) + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \Delta_h \cdot \left\{ \frac{\Theta_2^{n+1/2}}{\Theta_1^{n+1/2}} \right\}, \\ S_C \cdot \frac{\Theta_3^{n+1} - \Theta_3^{n+1/2}}{\tau/2} &= L_3(a_1^{n+1}, a_2^{n+1}, a_3^{n+1}, a_4^{n+1}) + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \Delta_h \cdot \left\{ \frac{\Theta_3^{n+1/2}}{\Theta_1^{n+1/2}} \right\}, \\ S_C \cdot \frac{\Theta_4^{n+1} - \Theta_4^{n+1/2}}{\tau/2} &= L_4(a_1^{n+1}, a_2^{n+1}, a_3^{n+1}, a_4^{n+1}) + \frac{1}{\text{Pe}} \cdot \Delta_h \cdot T^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (7.60)$$

Следует особо подчеркнуть, что разностные операторы Лапласа должны быть определены только на множестве консервативных сеточных функций, задаваемых в

«центрах» расчетных ячеек, для того, чтобы алгоритм был устойчивым. Поточковые переменные в схеме «КАБАРЕ» используются исключительно для аппроксимации конвективных потоков.

Блок вычисления новых поточковых переменных при этом остается неизменным. Недостатком описанного подхода является необходимость решения на каждом временном шаге системы линейных алгебраических уравнений большой размерности, возникающих на этапе «предиктор». При больших числах Рейнольдса и Пекле, характерных для многих прикладных задач, предпочтительно использовать другой алгоритм, использующий принцип расщепления по физическим процессам.

Сначала рассчитываются предварительные значения консервативных переменных на промежуточном временном слое без учета вязкости и теплопроводности:

$$\begin{aligned} S_C \cdot \frac{\tilde{\Theta}_1^{n+1/2} - \Theta_1^n}{\tau/2} &= L_1(a_1^n, a_2^n, a_3^n, a_4^n), \\ S_C \cdot \frac{\tilde{\Theta}_2^{n+1/2} - \Theta_2^n}{\tau/2} &= L_2(a_1^n, a_2^n, a_3^n, a_4^n), \\ S_C \cdot \frac{\tilde{\Theta}_3^{n+1/2} - \Theta_3^n}{\tau/2} &= L_3(a_1^n, a_2^n, a_3^n, a_4^n), \\ S_C \cdot \frac{\tilde{\Theta}_4^{n+1/2} - \Theta_4^n}{\tau/2} &= L_4(a_1^n, a_2^n, a_3^n, a_4^n). \end{aligned} \quad (7.61)$$

Затем их величины подправляются с использованием явной схемы учета диссипативных процессов:

$$\begin{aligned} S_C \cdot \frac{\Theta_1^{n+1/2} - \tilde{\Theta}_1^{n+1/2}}{\tau/2} &= 0, \\ S_C \cdot \frac{\Theta_2^{n+1/2} - \tilde{\Theta}_2^{n+1/2}}{\tau/2} &= \frac{1}{\text{Re}} \cdot \Delta_h \cdot \left\{ \frac{\tilde{\Theta}_2^{n+1/2}}{\tilde{\Theta}_1^{n+1/2}} \right\}, \\ S_C \cdot \frac{\Theta_3^{n+1/2} - \tilde{\Theta}_3^{n+1/2}}{\tau/2} &= \frac{1}{\text{Re}} \cdot \Delta_h \cdot \left\{ \frac{\tilde{\Theta}_3^{n+1/2}}{\tilde{\Theta}_1^{n+1/2}} \right\}, \\ S_C \cdot \frac{\Theta_4^{n+1/2} - \tilde{\Theta}_4^{n+1/2}}{\tau/2} &= \frac{1}{\text{Pe}} \cdot \Delta_h \cdot \bar{T}_C^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Этап «корректор» и этап вычисления новых поточковых переменных при этом не меняются.

Сеточные операторы градиента и дивергенции

Пусть ω – сеточное множество центров расчетных ячеек, $\mathcal{W}$ – множество узлов. Обозначим через $\mathcal{H}_\omega$ множество сеточных функций, определенных на ω , через $\mathcal{H}_\mathcal{W}$ – множество функций, определенных на $\mathcal{W}$. Все консервативные переменные в схе-

ме «КАБАРЕ» относятся к множеству $\omega: u_c, v_c, p_c, E_c \in \mathcal{H}_\omega$, координаты узлов расчетных ячеек $x_h, y_h \in \mathcal{H}_\omega$.

Аппроксимация градиента

Для произвольной сеточной функции $\varphi \in \mathcal{H}_\omega$ определим оператор сеточного градиента при условии, что в окрестности узла с индексом «0» (рис. 7.6) существует достаточно гладкое локальное отображение $x = x(\alpha, \beta), y = y(\alpha, \beta)$.

Поскольку

$$\begin{aligned} \text{grad}(\varphi) &= \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{J} \cdot \frac{D(\varphi, y)}{D(\alpha, \beta)} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{J} \cdot \frac{D(x, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = -\frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\varphi \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\varphi \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.63)$$

аппроксимируем эти дифференциальные выражения на регулярной разностной сетке в плоскости (α, β) с шагами h_α, h_β (рис. 7.6).

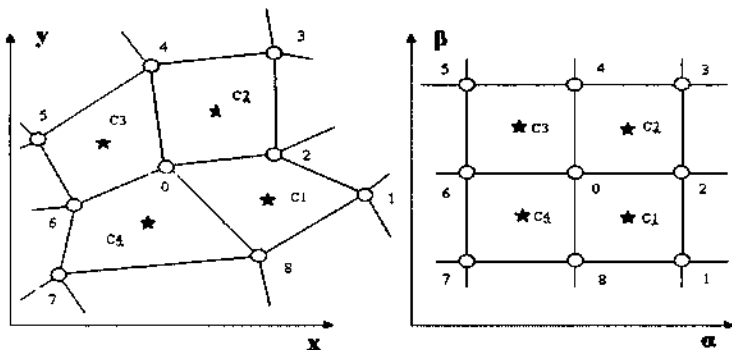


Рис. 7.6. Консервативные переменные на произвольных четырехугольных и прямоугольных ячейках

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_h = \frac{1}{\langle J \rangle_h} \cdot \left\langle \frac{D(\varphi, y)}{D(\alpha, \beta)} \right\rangle_h = \frac{1}{\langle J \rangle_h} \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) \right\rangle_h - \left\langle \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right\rangle_h \right]. \quad (7.64)$$

Здесь угловыми скобками обозначены разностные аппроксимации соответствующих выражений. Рассмотрим каждую из этих угловых скобок по отдельности с использованием локальной индексации, приведенной на рис. 7.6.

$$\begin{aligned}
 \left\langle \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right\rangle_{4-0} &= \frac{1}{2} \left[\varphi_{C2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_2 - y_0}{h_\alpha} + \frac{y_3 - y_4}{h_\alpha} \right) + \varphi_{C3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_0 - y_6}{h_\alpha} + \frac{y_4 - y_2}{h_\alpha} \right) \right]; \\
 \left\langle \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right\rangle_{0-8} &= \frac{1}{2} \left[\varphi_{C1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_1 - y_3}{h_\alpha} + \frac{y_2 - y_0}{h_\alpha} \right) + \varphi_{C4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_3 - y_7}{h_\alpha} + \frac{y_0 - y_6}{h_\alpha} \right) \right]; \\
 \left\langle \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right) \right\rangle_h &= \frac{1}{h_\beta} \cdot \left[\left\langle \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right\rangle_{4-0} - \left\langle \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right\rangle_{0-8} \right].
 \end{aligned} \quad (7.65)$$

Здесь нижние индексы «4-0» и «0-8» указывают на то, что разностные выражения относятся к серединам граней с узлами «4» и «0», и «0» и «8». Нетрудно заметить, что полученное разностное выражение аппроксимирует соответствующую производную в центральном узле со вторым порядком относительно h_α, h_β .

Аналогично для другой производной

$$\begin{aligned}
 \left\langle \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) \right\rangle_{2-0} &= \frac{1}{2} \left[\varphi_{C2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_3 - y_2}{h_\beta} + \frac{y_4 - y_0}{h_\beta} \right) + \varphi_{C1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{h_\beta} + \frac{y_0 - y_3}{h_\beta} \right) \right], \\
 \left\langle \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) \right\rangle_{0-6} &= \frac{1}{2} \left[\varphi_{C3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_4 - y_0}{h_\beta} + \frac{y_3 - y_6}{h_\beta} \right) + \varphi_{C4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_0 - y_3}{h_\beta} + \frac{y_6 - y_7}{h_\beta} \right) \right], \\
 \left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) \right) \right\rangle_h &= \frac{1}{h_\alpha} \cdot \left[\left\langle \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) \right\rangle_{2-0} - \left\langle \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) \right\rangle_{0-6} \right].
 \end{aligned} \quad (7.66)$$

Аппроксимацию якобиана также отнесем к центральной точке:

$$\begin{aligned}
 \langle J \rangle_h &= \frac{1}{4} (\langle J \rangle_{C1} + \langle J \rangle_{C2} + \langle J \rangle_{C3} + \langle J \rangle_{C4}), \\
 \langle J \rangle_{C1} &= \frac{S_{C1}}{h_\alpha \cdot h_\beta}, \quad \langle J \rangle_{C2} = \frac{S_{C2}}{h_\alpha \cdot h_\beta}, \quad \langle J \rangle_{C3} = \frac{S_{C3}}{h_\alpha \cdot h_\beta}, \quad \langle J \rangle_{C4} = \frac{S_{C4}}{h_\alpha \cdot h_\beta},
 \end{aligned}$$

где $S_{C1}, S_{C2}, S_{C3}, S_{C4}$ – площади прилегающих к центральному узлу ячеек на плоскости (x, y) , выраженные через координаты образующих их узлов согласно (7.17):

$$\begin{aligned}
 S_{C1} &= \frac{1}{2} [(x_1 - x_0) \cdot (y_2 - y_8) - (y_1 - y_0) \cdot (x_2 - x_8)], \\
 S_{C2} &= \frac{1}{2} [(x_2 - x_4) \cdot (y_3 - y_0) - (y_2 - y_4) \cdot (x_3 - x_0)], \\
 S_{C3} &= \frac{1}{2} [(x_0 - x_5) \cdot (y_4 - y_6) - (y_0 - y_5) \cdot (x_4 - x_6)], \\
 S_{C4} &= \frac{1}{2} [(x_8 - x_6) \cdot (y_0 - y_7) - (y_8 - y_6) \cdot (x_0 - x_7)].
 \end{aligned} \quad (7.67)$$

Аналогично для второй составляющей градиента

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_h = \frac{1}{\langle J \rangle_h} \cdot \left\langle \frac{D(x, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} \right\rangle_h = -\frac{1}{\langle J \rangle_h} \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left\langle \varphi \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\rangle \right) \right\rangle_h - \left\langle \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\left\langle \varphi \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle \right) \right\rangle_h \right]. \quad (7.68)$$

Формальная аппроксимация этого выражения в центральном узле центральными разностями дает

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\varphi \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) \right\rangle_{2-0} &= \frac{1}{2} \left[\varphi_{C2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_3 - x_2}{h_\beta} + \frac{x_4 - x_0}{h_\beta} \right) + \varphi_{C1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{h_\beta} + \frac{x_0 - x_8}{h_\beta} \right) \right], \\ \left\langle \left(\varphi \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) \right\rangle_{0-6} &= \frac{1}{2} \left[\varphi_{C3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_4 - x_0}{h_\beta} + \frac{x_5 - x_6}{h_\beta} \right) + \varphi_{C4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_0 - x_8}{h_\beta} + \frac{x_6 - x_7}{h_\beta} \right) \right], \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left\langle \varphi \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\rangle \right) \right\rangle_h &= \frac{1}{h_\alpha} \cdot \left[\left\langle \left(\varphi \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) \right\rangle_{2-0} - \left\langle \left(\varphi \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) \right\rangle_{0-6} \right]. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Выражения для компонент градиента (7.66), (7.69), можно значительно упростить и представить в виде

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_0 &= -\frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial S_{C1}}{\partial x_0} \cdot \varphi_{C1} + \frac{\partial S_{C2}}{\partial x_0} \cdot \varphi_{C2} + \frac{\partial S_{C3}}{\partial x_0} \cdot \varphi_{C3} + \frac{\partial S_{C4}}{\partial x_0} \cdot \varphi_{C4} \right), \\ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_0 &= -\frac{1}{S_0} \left(\frac{\partial S_{C1}}{\partial y_0} \cdot \varphi_{C1} + \frac{\partial S_{C2}}{\partial y_0} \cdot \varphi_{C2} + \frac{\partial S_{C3}}{\partial y_0} \cdot \varphi_{C3} + \frac{\partial S_{C4}}{\partial y_0} \cdot \varphi_{C4} \right), \\ S_0 &= 0,25(S_{C1} + S_{C2} + S_{C3} + S_{C4}). \end{aligned} \quad (7.70)$$

Таким образом построен сеточный оператор градиента

$$GRAD_h(\varphi_h) = \left\{ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_h, \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_h \right\}, \quad (7.71)$$

определенный на сеточных функциях, заданных в центрах расчетных ячеек и с областью значений в узлах расчетной сетки $GRAD_h(\varphi_h) \in \mathcal{H}_w$, $\varphi_h \in \mathcal{H}_u$.

Аппроксимация дивергенции

Пусть $q^x, q^y \in \mathcal{H}_w$ — компоненты векторного поля, заданные в узловых точках расчетной сетки. Оператор дивергенции представим как

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\bar{q}) &= \frac{\partial q^x}{\partial x} + \frac{\partial q^y}{\partial y} = \frac{1}{J} \left[\frac{D(q^x, y)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, q^y)}{D(\alpha, \beta)} \right] = \\ &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} q^x \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta} q^x \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} q^y \frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta} q^y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Для записи аппроксимации этого выражения воспользуемся шаблоном, приведенным на рисунке 7.1.

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}_h(\bar{q}_h) &= \frac{1}{\langle J \rangle} \cdot \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\langle q^x \frac{\partial y}{\partial \beta} \right\rangle_h \right\rangle_h - \left\langle \frac{\partial}{\partial \beta} \left\langle q^x \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right\rangle_h \right\rangle_h - \right. \\ &\quad \left. - \left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\langle q^y \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\rangle_h \right\rangle_h - \left\langle \frac{\partial}{\partial \beta} \left\langle q^y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle_h \right\rangle_h \right], \end{aligned} \quad (7.73)$$

где

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\langle q^x \frac{\partial y}{\partial \beta} \right\rangle_h \right\rangle_h &= \frac{1}{h_\alpha} \cdot \left(\frac{q_2^x + q_1^x}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{h_\beta} - \frac{q_3^x + q_4^x}{2} \cdot \frac{y_3 - y_4}{h_\beta} \right), \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial \beta} \left\langle q^x \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right\rangle_h \right\rangle_h &= \frac{1}{h_\beta} \cdot \left(\frac{q_2^x + q_3^x}{2} \cdot \frac{y_3 - y_2}{h_\alpha} - \frac{q_1^x + q_4^x}{2} \cdot \frac{y_1 - y_4}{h_\alpha} \right), \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\langle q^y \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\rangle_h \right\rangle_h &= \frac{1}{h_\alpha} \cdot \left(\frac{q_2^y + q_1^y}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{h_\beta} - \frac{q_3^y + q_4^y}{2} \cdot \frac{y_3 - y_4}{h_\beta} \right), \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial \beta} \left\langle q^y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle_h \right\rangle_h &= \frac{1}{h_\beta} \cdot \left(\frac{q_2^y + q_3^y}{2} \cdot \frac{y_3 - y_2}{h_\alpha} - \frac{q_1^y + q_4^y}{2} \cdot \frac{y_1 - y_4}{h_\alpha} \right). \end{aligned}$$

После некоторых алгебраических преобразований это выражение можно привести к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}_{h,c}(\bar{q}_h) &= \frac{1}{S_c} \cdot \left[\frac{\partial S_c}{\partial x_1} \cdot q_1^x + \frac{\partial S_c}{\partial x_2} \cdot q_2^x + \frac{\partial S_c}{\partial x_3} \cdot q_3^x + \frac{\partial S_c}{\partial x_4} \cdot q_4^x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial S_c}{\partial y_1} \cdot q_1^y + \frac{\partial S_c}{\partial y_2} \cdot q_2^y + \frac{\partial S_c}{\partial y_3} \cdot q_3^y + \frac{\partial S_c}{\partial y_4} \cdot q_4^y \right]. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Таким образом, сеточный оператор дивергенции определен на узловых сеточных функциях и имеет область значений в центрах расчетных ячеек $\operatorname{Div}_h(\bar{q}_h) \in \mathcal{H}_\omega, \bar{q}_h \in \mathcal{H}_\omega$.

Из процедуры построения следует, что оператор обладает сеточным свойством дивергентности и имеет второй порядок аппроксимации на достаточно гладких отображениях.

Аппроксимация лапласиана

С помощью полученных сеточных операторов $DIV_h(\cdot)$ и $GRAD_h(\cdot)$ составляется сеточный лапласиан:

$$\Delta_h(\varphi) = DIV_h \cdot GRAD_h(\varphi), \quad \Delta_h(\varphi) \in \mathcal{H}_w; \quad \varphi \in \mathcal{H}_w. \quad (7.75)$$

Сеточный шаблон, на котором определен этот оператор, включает в общем случае все прилегающие к данной ячейке соседние ячейки, и на структурированной сетке состоит из 9 элементов. На квадратных сетках он вырождается в крест.

На достаточно гладких отображениях оператор (7.75) имеет второй порядок аппроксимации. Можно показать, что он обладает свойством самосопряженности и неотрицательно определен.

7.5. Реализация граничных условий

Рассмотрим реализацию основных типов граничных условий.

Двойной набор переменных и их функциональное разделение на консервативные и потоковые делает задание граничных условий совершенно прозрачной процедурой.

Поскольку граничные условия определяют потоки через ребра расчетных ячеек, лежащих на границе, а для вычисления этих потоков в схеме «КАБАРЕ» используются локальные римановы инварианты, то все определяется теми инвариантами, которые приносятся снаружи области.

Втекающий дозвуковой поток (рис. 7.7)

По заданной скорости, плотности и давлению набегающего потока легко вычисляются локальные инварианты $(Q)_\alpha^{n+1}, (W)_\alpha^{n+1}, (\theta)_\alpha^{n+1}$. Параметры входного потока на границе области вычисляются с учетом инварианта $(R)_\alpha^{n+1}$, приходящего изнутри области. Это обеспечивает возможность внутренним возмущениям (простым волнам) проходить через границу практически без отражений.

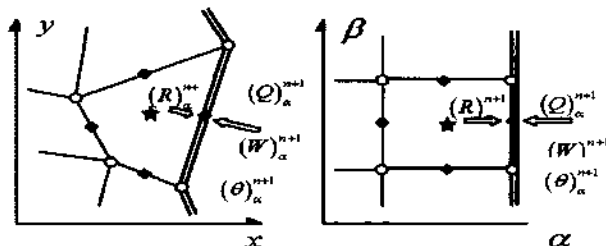


Рис. 7.7. Втекающий дозвуковой поток

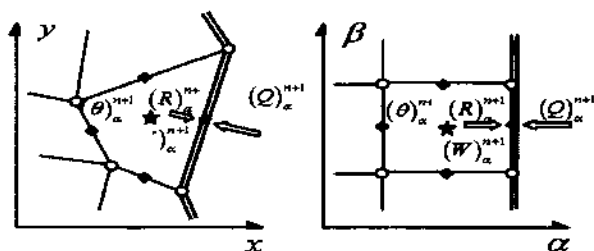


Рис. 7.8. Вытекающий дозвуковой поток

Вытекающий дозвуковой поток (рис. 7.8)

На граничное ребро приходятся три характеристики из расчетной области, приносящие три локальных римановых инварианта: $(R)_\alpha^{n+1}$, $(W)_\alpha^{n+1}$, $(\theta)_\alpha^{n+1}$. Внешняя среда формирует инвариант $(Q)_\alpha^{n+1}$. Возмущения проходят через такую границу, так же практически не отражаясь.

Вытекающий и вытекающий сверхзвуковые потоки

Все четыре локальных римановых инварианта приносятся либо изнутри расчетной области, либо снаружи. Условия для отражения возмущений от границы расчетной области отсутствуют.

Условия непротекания

Условие непротекания заключается в равенстве нормальной составляющей скорости нулю, откуда следует, что $(w^a)_G^{n+1} = 0$. На граничное ребро расчетной ячейки приходит, по крайней мере, одна характеристика $(R)_\alpha^{n+1}$. Это позволяет вычислить потоковую переменную давления $(p)_G^{n+1}$. Если величина $(w^a)_G^{n+1/2}$, вычисленная по консервативным компонентам скорости, относящимся к центру граничной ячейки, больше нуля, то на середину граничного ребра приходит еще одна характеристика, приносящая два локальных инварианта $(W)_\alpha^{n+1}$ и $(\theta)_\alpha^{n+1}$. Это позволяет вычислить полный набор потоковых переменных на граничном ребре.

Если $(w^a)_G^{n+1/2} < 0$, то значения плотности и касательной к ребру скорости равны их значениям в ячейке, т. е. равны соответствующим консервативным переменным на промежуточном временном слое.

Квазистационарное вытекание

Режим квазистационарного вытекания предполагает реализацию условия:

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial w_n}{\partial \bar{n}} = 0. \quad (7.76)$$

Будем трактовать этот режим как дозвуковое вытекание с заданными параметрами течения на бесконечности. Это позволяет вычислить приходящий из бесконечности локальный инвариант $(Q)_\alpha^{n+1}$, однако, его постоянное использование при стандартном ре-

жиме дозвукового вытекания может привести к тому, что условие выполняться не будет даже приближенно. Поэтому в тех случаях, когда $(w^a)_c^{n+1/2} > 0$, наряду с тремя «законным» образом приходящими изнутри области инвариантами $(R)_a^{n+1}, (W)_a^{n+1}, (\theta)_a^{n+1}$, нужно будет задавать еще нормальную к границе скорость $(w^a)_G^{n+1/2}$ как $(w^a)_G^{n+1} = (w^a)_L^n$. Нетрудно заметить, что это дискретный аналог условия $\frac{\partial w_n}{\partial \eta} = 0$.

В моменты, когда условие $(w^a)_c^{n+1/2} > 0$ нарушается, происходит возврат к стандартному алгоритму дозвукового вытекания с использованием инварианта $(Q)_a^{n+1}$.

Вместо сноса нормальной скорости можно сносить и давление. Это будет соответствовать условию $\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0$. Пока нет достаточных данных, позволяющих предпочесть одно условие другому.

7.6. Вопросы аппроксимации

Разностные схемы этапов «предиктор» и «корректор» имеют по построению второй порядок аппроксимации относительно шагов опорной сетки h_α, h_β при условии достаточной гладкости локальных отображений $x = x(\alpha, \beta), y = y(\alpha, \beta)$ в окрестностях каждой расчетной ячейки. При построении таких отображений достаточно, чтобы узлы косоугольной ячейки в плоскости (x, y) переходили в соответствующие узлы прямоугольной ячейки на плоскости (α, β) (рис. 7.1). Отображения прямых ребер ячеек в плоскости (α, β) в прямые ребра косоугольных ячеек не требуются. Достаточно очевидно, что, если ячейка в плоскости (x, y) выпукла, то такие отображения существуют и их бесконечно много. Качество численного решения зависит, разумеется, от неоднородности расчетной сетки. Второй порядок аппроксимации проявляется в зависимости точности численного решения от густоты сетки. При дроблении каждой из расчетных ячеек на четыре с учетом гладкости локальных отображений при втором порядке аппроксимации точность расчета должна повыситься в четыре раза. Следует отметить, что для дробления сетки знание конкретного вида локального отображения необязательно. Это связано с существенной неоднозначностью построения такого отображения.

Следует отметить, что разностные схемы этапов «предиктор» и «корректор» могут быть получены и без привлечения опорных криволинейных координат, например, методом конечных объемов. В этом случае на косоугольных ячейках их порядок аппроксимации снизится до первого. Кажущееся противоречие с ранее высказанным утверждением снимается замечанием, что составляющая ошибки аппроксимации первого порядка на декартовой плоскости является дивергентной и может быть обнулена при надлежащем выборе точки, в которой производится разложение на ряды Тейлора.

Линейная экстраполяция, используемая для вычисления новых потоковых переменных, имеет точность $O(\tau^2, h_\alpha^2, h_\beta^2)$, поскольку

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{F}_{kL}^n + \mathcal{F}_{kR}^{n+1}}{2} &= \mathcal{F}_{kC}^{n+1/2} + O(\tau^2, h_\alpha^2, h_\beta^2), & \frac{\mathcal{F}_{kL}^{n+1} + \mathcal{F}_{kR}^n}{2} &= \mathcal{F}_{kC}^{n+1/2} + O(\tau^2, h_\alpha^2, h_\beta^2), \\ \frac{\mathcal{F}_{kT}^n + \mathcal{F}_{kB}^n}{2} &= \mathcal{F}_{kC}^{n+1/2} + O(\tau^2, h_\alpha^2, h_\beta^2), & \frac{\mathcal{F}_{kT}^{n+1} + \mathcal{F}_{kB}^n}{2} &= \mathcal{F}_{kC}^{n+1/2} + O(\tau^2, h_\alpha^2, h_\beta^2), \\ k &= 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

Допущение постоянства энтропии в пределах расчетной ячейки не влияет на порядок аппроксимации, поскольку используется только для определения комплексов $\mathcal{F}_{1,2}(\rho, u, v, p)$, носящих вспомогательный характер.

Таким образом, если отвлечься от этапа нелинейной коррекции потоковых переменных, то схема «КАБАРЕ» имеет второй формальный порядок аппроксимации как по времени, так и по пространственным переменным. Коррекция потоков в тех случаях, когда она «включается», снижает порядок аппроксимации до первого.

Также второй с формальной точки зрения порядок аппроксимации лапласиана наблюдается на косоугольных сетках.

7.7. Условия устойчивости. Выбор шага интегрирования по времени

Для каждой расчетной ячейки должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned}(\tau_\alpha)_C^{n+1/2} &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{S_C}{(d_\beta)_C \cdot (\vec{w} \cdot \vec{n}^\alpha + c)_C^{n+1/2}}, & (d_\beta)_C &= \sqrt{(x_T - x_B)^2 + (y_T - y_B)^2}, \\ (\tau_\beta)_C^{n+1/2} &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{S_C}{(d_\alpha)_C \cdot (\vec{w} \cdot \vec{n}^\beta + c)_C^{n+1/2}}, & (d_\alpha)_C &= \sqrt{(x_R - x_L)^2 + (y_R - y_L)^2}, \\ \vec{n}_C^\alpha &= \left\{ n_x \cdot \frac{y_T - y_B}{(d_\beta)_C}, -n_y \cdot \frac{x_T - x_B}{(d_\beta)_C} \right\}, & \vec{n}_C^\beta &= \left\{ -n_x \cdot \frac{y_R - y_L}{(d_\alpha)_C}, n_y \cdot \frac{x_R - x_L}{(d_\alpha)_C} \right\}.\end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения, соответствующие рисунку 7.1. Текущий шаг по времени обозначается как $\tau^{n+1/2}$. Величина следующего шага по времени вычисляется как

$$\tau^{n+3/2} = CFL \cdot \tau_{\max}^{n+3/2}, \quad \tau_{\max}^{n+3/2} = \min_C \left\{ (\tau_\alpha)_C^{n+3/2}, (\tau_\beta)_C^{n+3/2} \right\}, \quad CFL \in [0, 1]. \quad (7.77)$$

При учете вязкости и теплопроводности по явной схеме следует добавить ограничения, характерные для явных аппроксимаций параболических уравнений.

7.8. Примеры тестовых расчетов

7.8.1. Задача об обтекании цилиндра потенциальным слабосжимаемым потоком газа

Рассмотрим задачу об обтекании цилиндра слабосжимаемым невязким потоком в открытой области при $M_\infty = 0,1$. Аналитическое решение этой задачи с точностью до $O(M_\infty^6)$ было получено с использованием метода возмущений при решении уравнения потенциала [1]:

$$\frac{P}{P_\infty} = 1 + \frac{1}{2} M_\infty^2 (1 - \alpha_1) + \frac{1}{2} M_\infty^4 (\alpha_1^2 - \alpha_1 - \alpha_2), \quad (7.78)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 + \frac{1}{r^4} - \frac{3}{r^2} \cos 2\theta, \\ \alpha_2 &= \cos \theta \left(1 - \frac{1}{r^4}\right) \left[\cos \theta \left(\frac{3}{r^4} - \frac{13}{6r^2} - \frac{5}{6r^4}\right) + \frac{1}{2} \cos 3\theta \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2}\right) \right] + \\ &+ \sin \theta \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \left[\cos \theta \left(\frac{13}{6r^2} - \frac{1}{r^4} + \frac{1}{6r^4}\right) + \frac{1}{2} \cos 3\theta \left(\frac{1}{r^4} - \frac{3}{r^2}\right) \right], \end{aligned}$$

r – расстояние от центра цилиндра, θ – полярный угол, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс.

Численные трудности при решении этой задачи связаны с наличием численной вязкости в стандартных схемах типа Колгана – Ван Лири – ТВД. Эта вязкость приводит к паразитным асимметриям в решении из-за образования искусственного «энтропийного следа» за задней кромкой цилиндра. На рисунке 7.9 показаны решения, полученные по схеме Колгана – Ван Лири – ТВД третьего порядка аппроксимации по пространству, и метода «КАБАРЕ» на расчетной сетке 200×90 ячеек, где также приведено аналитическое решение. При расчете по «КАБАРЕ» использовался стандартный вариант коррекции и «изэнтропические» локальные инварианты. В обоих расчетах использовалась круглая расчетная область размером порядка 40 характерных радиусов цилиндра с плавно увеличивающимся с расстоянием от цилиндра (не более 2–4 % от ячейки к ячейке) шагом сетки. Тесты по увеличению/сужению области решения показали, что область является достаточно большой и эффектом паразитного отражения решения от границ можно пренебречь так же, как и отражением от сеточной неоднородности для обоих методов. В отличие от решения Колгана – Ван Лири – ТВД (рис. 7.9в), решение «КАБАРЕ» практически совпадает с аналитическим (рис. 7.9б). Причем даже на вдвое более грубой сетке контуры решения «КАБАРЕ» вблизи передней и задней кромки цилиндра практически не содержат искусственных асимметрий и близки к аналитическому решению (рис. 7.9а), что говорит о малой численной вязкости схемы.

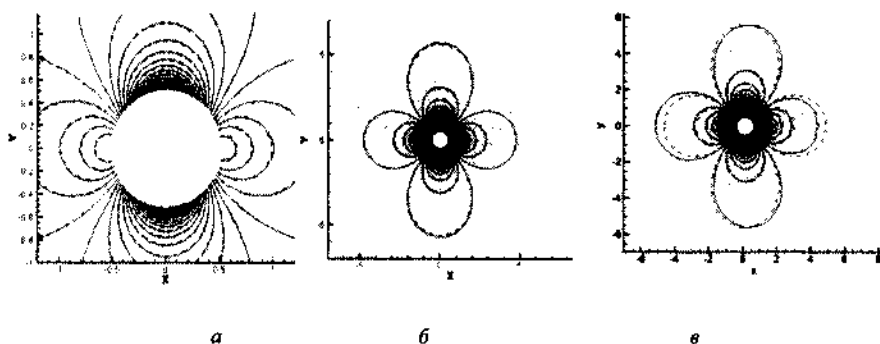


Рис. 7.9. Решение задачи о потенциальном обтекании цилиндра. Контуры распределения давления: аналитическое решение показано пунктиром, численное решение – сплошной линией, а – решение «КАБАРЕ» на сетке 100×90 ячеек, б – решение «КАБАРЕ» на сетке 200×90 ячеек, в – решение Колгана – Ван Лиры – ТВД на сетке 200×90 ячеек

7.8.2. Дифракция акустического импульса на цилиндре в покоящейся однородной среде

Рассматривается задача, предложенная на втором семинаре по вычислительным методам в аэроакустике (2nd CAA Workshop). В центре открытой расчетной области задается цилиндр единичного диаметра. На расстоянии 4 диаметра от него в начальный момент времени задается акустический импульс:

$$(u', v', p') = (0, 0, \varepsilon \cdot \exp(-\beta \cdot [(x-4)^2 + y^2])), \quad \beta = 25 \ln(2), \quad \varepsilon = 10^{-5}. \quad (7.81)$$

Требуется рассчитать акустический сигнал в контрольных точках А, В и С, расположенных на расстоянии радиуса 5 диаметров от центра цилиндра под углами 90° , 135° и 180° к оси x соответственно (рис. 7.10).

В силу симметрии задача решалась в $1/2$ области с симметричными условиями на нижней границе. Для решения использовались две криволинейные декартовые расчетные сетки: 200×100 и 400×200 ячеек. На рисунке 7.11 приведено сравнение флуктуаций давления с аналитическим решением в контрольных точках. Следует отметить, что полученная при решении полных уравнений Эйлера точность на сетке 200×100 ячеек не уступает точности, получаемой при решении линеаризованных уравнений с помощью схемы высокого порядка на основе метода *DRP* на аналогичной сетке [2].

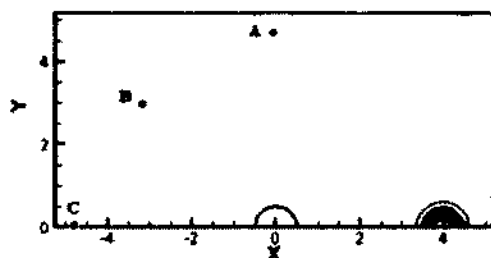


Рис. 7.10. Область решения задачи о дифракции акустической волны на цилиндре. Показано положение контрольных точек A , B и C , а также контуры акустических пульсаций в начальный момент времени

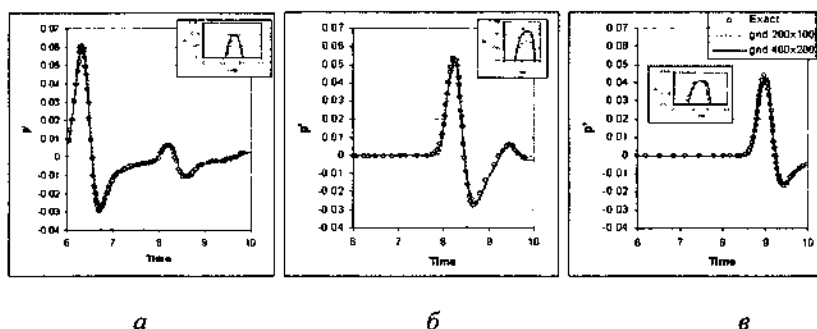


Рис. 7.11. Сравнение акустических сигналов, полученных при решении уравнений Эйлера, с аналитическим решением для контрольных точек a – A , $б$ – B и $в$ – C

Заключение к главе 7

Несмотря на кажущуюся сложность схемы «КАБАРЕ», на косоугольных сетках все основные составляющие алгоритма остаются неизменными. Прежде всего, он продолжает базироваться на двух формах записи исходных уравнений: дивергентной, выражающей основные законы сохранения, и характеристической, определяющей гиперболический характер этих уравнений. Исходная разностная схема в расчетной ячейке может быть получена стандартным интегро-интерполяционным методом [3] или методом «конечных объемов» [4], как это принято называть в зарубежной литературе. При этом, как и ранее, консервативные переменные относятся к центрам расчетных ячеек, за которые следует принимать точки пересечения отрезков, соединяющих центры противоположных граней, потоковые переменные относятся к серединам этих граней. Порядок аппроксимации схемы в целом определяется порядком аппроксимации дивергентной (консервативной) формы записи уравнений. По времени он всегда (там, где не включается процедура нелинейной коррекции) остается вторым. Что касается пространственной части разностного (дискретного) оператора, то тут возможны разные трактовки. Если исходить из того, что для каждой расчетной ячейки существует локальное достаточное гладкое отображение,

переводящее ее в прямоугольник, то порядок аппроксимации по пространству также можно считать вторым. Однако этот второй порядок реализуется только тогда, когда исходная расчетная сетка дробится на более мелкую с учетом этих локальных отображений. Например, если исходные ячейки разделить на четыре части посредством включения еще одного узла в геометрический центр выпуклой ячейки, то на новой сетке точность расчетов возрастет только в два раза. Если же построить совершенно новую сетку с в четыре раза большим числом ячеек, но плохо скоррелированную с предыдущей, то точность возрастет только в два раза. При вычислении новых потоковых переменных также используются локальные римановы инварианты, получающиеся из характеристической формы записи исходных уравнений в терминах контравариантных составляющих скоростей и предположения, что энтропия внутри каждой пространственно-временной расчетной сетки является постоянной и равной ее значению на половинном слое по времени. Основные локальные римановы инварианты R и Q выражаются через давление и контравариантные компоненты скоростей, направления которых со стороны прилегающих к грани ячеек совпадают. Это упрощает как расчеты внутри области, так и постановку граничных условий. Нелинейная коррекция потоковых переменных проводится совершенно аналогично тому, как она описана для прямоугольных расчетных ячеек.

Литература к главе 7

1. *Van Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. – The Parabolic Press, 1975.
2. *Hixon R.* Evaluation of a high-accuracy MacCormack-type scheme using benchmark problems. // NASA Contractor Report 202324. – 1997 – ICOMP-97-03.
3. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. Москва: Наука, 1971. – 550 с.
4. *Hirsch C.* Numerical Computation of Internal and External Flows. // The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. – 2nd Edition. – John Wiley&Sons, Ltd, 2007.

Схема «КАБАРЕ» для трехмерных нестационарных задач газовой динамики на косоугольных гексагональных сетках

Обобщение схемы «КАБАРЕ» на случай трехмерных косоугольных гексагональных ячеек проводится по аналогии с двумерным случаем.

8.1. Уравнения Эйлера в криволинейной системе координат

8.1.1. Исходные представления уравнений газовой динамики

Исходным пунктом для построения схемы «КАБАРЕ» на трехмерных косоугольных гексагональных ячейках является, как и во всех ранее рассмотренных случаях, консервативная форма уравнений газовой динамики (уравнений Эйлера):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial z} = 0, \\
 & \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_1 u_3}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_2 u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_2 u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_2 u_3}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{\partial \rho u_3}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_3 u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_3 u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_3 u_3}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\
 & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho E u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho E u_3}{\partial z} + \frac{\partial p u_1}{\partial x} + \frac{\partial p u_2}{\partial y} + \frac{\partial p u_3}{\partial z} = 0, \\
 & E = e + \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2}; \quad p = (\gamma - 1) \rho e.
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Пространственно-временная дискретизация этих уравнений приводит к консервативным разностным схемам относительно «консервативных переменных».

Декомпозиция численного решения в пределах расчетной ячейки на локальные инварианты Римана осуществляется, как и в предыдущих главах, на основе характеристического представления исходных уравнений, получаемого из т. н. «простой формы» исходных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_3 \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial y} + \rho \frac{\partial u_3}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial p}{\partial t} + u_1 \frac{\partial p}{\partial x} + u_2 \frac{\partial p}{\partial y} + u_3 \frac{\partial p}{\partial z} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) &= 0.
\end{aligned} \quad (8.2)$$

8.1.2. Криволинейная система координат

Рассмотрим невырожденную криволинейную систему координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, определяемую дифференцируемым отображением $\vec{r} = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Локальный базис этой системы будет иметь вид [1]:

$$\vec{e}_{\alpha_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \right); \quad \vec{e}_{\alpha_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right); \quad \vec{e}_{\alpha_3} = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_3}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}, \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \right). \quad (8.3)$$

Дуальным к нему будет базис [1]:

$$\begin{aligned}
\vec{e}^{\alpha_1} &= \frac{1}{J} \cdot [\vec{e}_{\alpha_2} \times \vec{e}_{\alpha_3}] = \frac{1}{J} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{\alpha_2} & y_{\alpha_2} & z_{\alpha_2} \\ x_{\alpha_3} & y_{\alpha_3} & z_{\alpha_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \cdot \left[\frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} \cdot \mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} \cdot \mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} \cdot \mathbf{k} \right]; \\
\vec{e}^{\alpha_2} &= \frac{1}{J} \cdot [\vec{e}_{\alpha_3} \times \vec{e}_{\alpha_1}] = \frac{1}{J} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{\alpha_3} & y_{\alpha_3} & z_{\alpha_3} \\ x_{\alpha_1} & y_{\alpha_1} & z_{\alpha_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \cdot \left[\frac{D(y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} \cdot \mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} \cdot \mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} \cdot \mathbf{k} \right]; \\
\vec{e}^{\alpha_3} &= \frac{1}{J} \cdot [\vec{e}_{\alpha_1} \times \vec{e}_{\alpha_2}] = \frac{1}{J} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{\alpha_1} & y_{\alpha_1} & z_{\alpha_1} \\ x_{\alpha_2} & y_{\alpha_2} & z_{\alpha_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \cdot \left[\frac{D(y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \cdot \mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \cdot \mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \cdot \mathbf{k} \right], \quad (8.4)
\end{aligned}$$

где $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$ – якобиан отображения $\vec{r} = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} S_{a1}^x &= \frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)}; & S_{a1}^y &= \frac{D(z, x)}{D(\alpha_2, \alpha_3)}; & S_{a1}^z &= \frac{D(x, y)}{D(\alpha_2, \alpha_3)}; \\ S_{a2}^x &= \frac{D(y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1)}; & S_{a2}^y &= \frac{D(z, x)}{D(\alpha_3, \alpha_1)}; & S_{a2}^z &= \frac{D(x, y)}{D(\alpha_3, \alpha_1)}; \\ S_{a3}^x &= \frac{D(y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2)}; & S_{a3}^y &= \frac{D(z, x)}{D(\alpha_1, \alpha_2)}; & S_{a3}^z &= \frac{D(x, y)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \end{aligned} \quad (8.5)$$

и перейдем к новой системе дуальных векторов, отличающихся от (8.4) только нормировкой:

$$\begin{aligned} \bar{e}^{a1} &= \frac{1}{|S_{a1}|} \cdot [S_{a1}^x \cdot \mathbf{i} + S_{a1}^y \cdot \mathbf{j} + S_{a1}^z \cdot \mathbf{k}], \\ \bar{e}^{a2} &= \frac{1}{|S_{a2}|} \cdot [S_{a2}^x \cdot \mathbf{i} + S_{a2}^y \cdot \mathbf{j} + S_{a2}^z \cdot \mathbf{k}], \\ \bar{e}^{a3} &= \frac{1}{|S_{a3}|} \cdot [S_{a3}^x \cdot \mathbf{i} + S_{a3}^y \cdot \mathbf{j} + S_{a3}^z \cdot \mathbf{k}], \end{aligned} \quad (8.6)$$

где $\mathbf{i} = \mathbf{n}_x$; $\mathbf{j} = \mathbf{n}_y$; $\mathbf{k} = \mathbf{n}_z$;

$$|S_{a1}| = \sqrt{(S_{a1}^x)^2 + (S_{a1}^y)^2 + (S_{a1}^z)^2}; |S_{a2}| = \sqrt{(S_{a2}^x)^2 + (S_{a2}^y)^2 + (S_{a2}^z)^2}; |S_{a3}| = \sqrt{(S_{a3}^x)^2 + (S_{a3}^y)^2 + (S_{a3}^z)^2}.$$

Нетрудно увидеть, что в принятой нормировке каждый вектор из (8.6) имеет единичную длину.

Для дуальной системы векторов (8.6) «исходный» базис примет вид:

$$\bar{e}_{a1} = \frac{|S_{a1}|}{J} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \right); \bar{e}_{a2} = \frac{|S_{a2}|}{J} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right); \bar{e}_{a3} = \frac{|S_{a3}|}{J} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_3}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}, \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \right). \quad (8.7)$$

Коэффициенты разложения (Q^{a1}, Q^{a2}, Q^{a3}) произвольного векторного поля $\bar{q}$ по этому базису

$$\bar{q} = Q^{a1} \cdot \bar{e}_{a1} + Q^{a2} \cdot \bar{e}_{a2} + Q^{a3} \cdot \bar{e}_{a3} \quad (8.8)$$

будем называть контравариантными компонентами векторного поля. В этих терминах дивергенция в криволинейных координатах $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ будет иметь вид:

$$\operatorname{div}(\bar{q}) = \frac{1}{J} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot (|S_{a1}| \cdot Q^{a1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \cdot (|S_{a2}| \cdot Q^{a2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \cdot (|S_{a3}| \cdot Q^{a3}) \right]. \quad (8.9)$$

Следует отметить, что это определение дивергенции отличается от общепринятого.

Нашей ближайшей целью является преобразование консервативной и простой форм записи уравнений Эйлера (8.1) и (8.2) в криволинейную систему координат. При этом консервативную форму следует преобразовать к виду законов сохранения:

$$J \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{J}_{a1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \bar{J}_{a2}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \bar{J}_{a3}}{\partial \alpha_3} = 0 \quad (8.10)$$

а «простую» — к виду

$$J \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha_1} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha_2} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha_3} = \bar{F}, \quad (8.11)$$

где $\bar{\phi} = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho E)^T$, $\bar{\psi} = (\rho, u^{a1}, u^{a2}, u^{a3}, p)^T$, $\bar{J}_{ai}$ — обобщенные потоки.

8.1.3. Якобианы и их основные свойства

Дальнейшие математические выкладки будут существенно опираться на якобианы и их основные свойства, вытекающие из их определения

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} + \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} + \frac{\partial x}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad (8.12)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} &= \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}; \\ \frac{D(y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} &= \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_1}; \\ \frac{D(y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} &= \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Из определений (8.12), (8.13) следует, что значения якобиана не изменяются при четных циклических перестановках как верхних, так и нижних аргументов:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \frac{D(y, z, x)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \frac{D(z, x, y)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)} = \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)}.$$

При нечетных перестановках якобиан меняет знак:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = -\frac{D(z, y, x)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = -\frac{D(x, z, y)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = -\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3)} = -\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)}.$$

Якобиан суперпозиции двух отображений равен произведению их якобианов:

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad y = y(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad z = z(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \alpha_1 &= \alpha_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \alpha_2 = \alpha_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \alpha_3 = \alpha_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \frac{D(x, y, z)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} &= \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \cdot \frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{J}.$$

Частные производные в криволинейных координатах могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{D(\varphi, y, z)}{D(x, y, z)} = \frac{D(\varphi, y, z)}{D(x, y, z)} = \frac{D(\varphi, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \cdot \frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{J} \cdot \frac{D(\varphi, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{D(x, \varphi, z)}{D(x, y, z)} = \frac{D(x, \varphi, z)}{D(x, y, z)} = \frac{D(x, \varphi, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \cdot \frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{J} \cdot \frac{D(x, \varphi, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{D(x, y, \varphi)}{D(x, y, z)} = \frac{D(x, y, \varphi)}{D(x, y, z)} = \frac{D(x, y, \varphi)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \cdot \frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{J} \cdot \frac{D(x, y, \varphi)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}. \end{aligned}$$

8.1.4. Дивергентное представление якобианов

Наряду с определением (8.12), можно дать и другие дивергентные определения якобиана:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha_3} \\ x \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} & x \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} & x \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[x \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[x \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[x \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \right].$$

Действительно, непосредственными вычислениями можно показать, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{D(y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[\frac{D(y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_2} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \cdot}{\partial \alpha_3} \\ y \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} & y \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} & y \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[y \cdot \frac{D(z, x)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[y \cdot \frac{D(z, x)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[y \cdot \frac{D(z, x)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \right]$$

и

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \begin{vmatrix} z \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} & z \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} & z \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[z \cdot \frac{D(x, y)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[z \cdot \frac{D(x, y)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[z \cdot \frac{D(x, y)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \right].$$

Объединяя все эти три формы, можно получить симметризованное дивергентное представление якобиана:

$$J = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[x \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} + y \cdot \frac{D(z, x)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} + z \cdot \frac{D(x, y)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} \right] + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[x \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} + y \cdot \frac{D(z, x)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} + z \cdot \frac{D(x, y)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} \right] +$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[x \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} + y \cdot \frac{D(z, x)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} + z \cdot \frac{D(x, y)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \right] \right\}. \quad (8.14)$$

8.1.5. Основные законы сохранения в криволинейных координатах

При преобразовании к криволинейным координатам основных законов сохранения (8.1) оставим без изменения декартовы компоненты вектора скорости. Остальные члены, входящие в эту систему, представим в форме якобианов:

$$J \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{D(\rho u_1, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, \rho u_2, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, y, \rho u_3)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 0,$$

$$J \cdot \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{D(\rho u_1 u_1, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, \rho u_1 u_2, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, y, \rho u_1 u_3)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(p, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 0,$$

$$J \cdot \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{D(\rho u_2 u_1, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, \rho u_2 u_2, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, y, \rho u_2 u_3)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, p, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 0,$$

$$J \cdot \frac{\partial \rho u_3}{\partial t} + \frac{D(\rho u_3 u_1, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, \rho u_3 u_2, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, y, \rho u_3 u_3)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, y, p)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 0,$$

$$J \cdot \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{D(H u_1, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, H u_2, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, y, H u_3)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 0,$$

$$E = e + \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2}; \quad p = (\gamma - 1) \rho e; \quad H = \rho E + p. \quad (8.15)$$

При последующей аппроксимации этой системы уравнений будем использовать симметризованное дивергентное представление входящих сюда якобианов. В дальнейшем, в разделе 8.1.8 система (8.15) будет преобразована к виду (8.10).

8.1.6. Перевод в криволинейные координаты «простой формы» уравнений газовой динамики

Преобразуем в криволинейные координаты уравнения (8.2), оставляя на первом этапе компоненты векторов скорости декартовыми. Уравнения преобразуются соответственно к виду:

$$J \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \cdot \frac{D(\rho, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_2 \cdot \frac{D(x, \rho, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_3 \cdot \frac{D(x, y, \rho)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \\ + \rho \cdot \frac{D(u_1, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \rho \cdot \frac{D(x, u_2, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \rho \cdot \frac{D(u_1, y, u_3)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 0; \quad (8.16)$$

$$J \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \cdot \frac{D(u_1, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_2 \cdot \frac{D(x, u_1, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_3 \cdot \frac{D(x, y, u_1)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{1}{\rho} \frac{D(p, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 0; \quad (8.17)$$

$$J \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \cdot \frac{D(u_2, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_2 \cdot \frac{D(x, u_2, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_3 \cdot \frac{D(x, y, u_2)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{1}{\rho} \frac{D(x, p, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 0; \quad (8.18)$$

$$J \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \cdot \frac{D(u_3, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_2 \cdot \frac{D(x, u_3, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_3 \cdot \frac{D(x, y, u_3)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{1}{\rho} \frac{D(x, y, p)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = 0; \quad (8.19)$$

$$J \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + u_1 \cdot \frac{D(p, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)} + u_2 \cdot \frac{D(x, p, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)} + u_3 \cdot \frac{D(x, y, p)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)} + \\ + \rho c^2 \cdot \left(\frac{D(u_1, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)} + \frac{D(x, u_1, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)} + \frac{D(x, y, u_1)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)} \right) = 0. \quad (8.20)$$

Рассмотрим вначале первое и пятое уравнения этой системы. Общим для них является оператор дивергенции

$$J \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \cdot \frac{D(\rho, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_2 \cdot \frac{D(x, \rho, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_3 \cdot \frac{D(x, y, \rho)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \rho J \cdot \text{div}(\vec{u}) = 0; \quad (8.21)$$

$$J \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + u_1 \cdot \frac{D(p, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)} + u_2 \cdot \frac{D(x, p, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)} + u_3 \cdot \frac{D(x, y, p)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)} + \rho c^2 J \cdot \text{div}(\vec{u}) = 0, \quad (8.22)$$

где

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{1}{J} \left[\frac{D(u_1, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, u_2, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + \frac{D(x, y, u_3)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \right] = 0;$$

В терминах контравариантных компонент скоростей дивергенция преобразуется к более компактной форме:

$$J \cdot \operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (|S_{a1}| \cdot u^{a1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (|S_{a2}| \cdot u^{a2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (|S_{a3}| \cdot u^{a3}). \quad (8.23)$$

Представим якобианы, входящие в определение конвективных членов в (8.21) уравнении неразрывности в дивергентном виде. Остановимся на первом из якобианов:

$$\frac{D(\rho, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \rho \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \rho \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \rho \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2)}. \quad (8.24)$$

Непосредственной проверкой можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{D(\rho, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} &= \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1)} + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{D(y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} \cdot S_{a1}^x + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_2} \cdot S_{a2}^x + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_3} \cdot S_{a3}^x. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Аналогично остальные два якобиана преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \frac{D(x, \rho, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} &= \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} \cdot S_{a1}^y + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_2} \cdot S_{a2}^y + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_3} \cdot S_{a3}^y; \\ \frac{D(x, y, \rho)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} &= \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} \cdot S_{a1}^z + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_2} \cdot S_{a2}^z + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_3} \cdot S_{a3}^z. \end{aligned} \quad (8.26)$$

С учетом (8.25), (8.26), конвективные члены в уравнении неразрывности можно записать как

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} (u_1 \cdot S_{a1}^x + u_2 \cdot S_{a1}^y + u_3 \cdot S_{a1}^z) + \\ &+ \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_2} (u_1 \cdot S_{a2}^x + u_2 \cdot S_{a2}^y + u_3 \cdot S_{a2}^z) + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_3} (u_1 \cdot S_{a3}^x + u_2 \cdot S_{a3}^y + u_3 \cdot S_{a3}^z). \end{aligned} \quad (8.27)$$

Учитывая определение контравариантных компонент скорости, конвективные слагаемые принимают достаточно простой и знакомый вид:

$$\begin{aligned} &u_1 \cdot \frac{D(\rho, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_2 \cdot \frac{D(x, \rho, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_3 \cdot \frac{D(x, y, \rho)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \\ &= |S_{a1}| u^{a1} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} + |S_{a2}| u^{a2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_2} + |S_{a3}| u^{a3} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_3}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Конвективные слагаемые в уравнении энергии (давления) (8.22) после аналогичных преобразований приводятся к форме:

$$\begin{aligned} & u_1 \cdot \frac{D(p, y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_2 \cdot \frac{D(x, p, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} + u_3 \cdot \frac{D(x, y, p)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \\ & = |S_{a1}| u^{a1} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} + |S_{a2}| u^{a2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} + |S_{a3}| u^{a3} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_3}. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Окончательно уравнение неразрывности и уравнение для давления системы (8.2) с учетом представления дивергенции в криволинейной системе координат (8.23) выглядят следующим образом:

уравнение неразрывности

$$\begin{aligned} & J \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + |S_{a1}| u^{a1} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} + |S_{a2}| u^{a2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_2} + |S_{a3}| u^{a3} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_3} + \\ & + \rho \cdot \left[|S_{a1}| \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot (u^{a1}) + |S_{a2}| \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \cdot (u^{a2}) + |S_{a3}| \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \cdot (u^{a3}) \right] = 0; \end{aligned} \quad (8.30)$$

уравнение на давление (уравнение энергии)

$$\begin{aligned} & J \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + |S_{a1}| u^{a1} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} + |S_{a2}| u^{a2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} + |S_{a3}| u^{a3} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} + \\ & + \rho c^2 \cdot \left[|S_{a1}| \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot (u^{a1}) + |S_{a2}| \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \cdot (u^{a2}) + |S_{a3}| \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \cdot (u^{a3}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Преобразуем в криволинейные координаты уравнение сохранения импульса (8.17). Учитывая (8.28), (8.29), приводим динамические уравнения к виду:

$$\begin{aligned} & J \cdot \frac{\partial u_1}{\partial t} + |S_{a1}| u^{a1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + |S_{a2}| u^{a2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + |S_{a3}| u^{a3} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} + \\ & + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} S_{a1}^x + \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} S_{a2}^x + \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} S_{a3}^x \right) = 0; \\ & J \cdot \frac{\partial u_2}{\partial t} + |S_{a1}| u^{a1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + |S_{a2}| u^{a2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + |S_{a3}| u^{a3} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3} + \\ & + \frac{1}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial \alpha_2} S_{a2}^y + \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} S_{a1}^y + \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} S_{a3}^y \right] = 0; \\ & J \cdot \frac{\partial u_3}{\partial t} + |S_{a1}| u^{a1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + |S_{a2}| u^{a2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + |S_{a3}| u^{a3} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} + \\ & + \frac{1}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial \alpha_3} S_{a3}^z + \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} S_{a1}^z + \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} S_{a2}^z \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Выразим декартовы компоненты скорости через их контравариантные составляющие

$$\begin{aligned}u_1 &= D_{11} \cdot u^{a1} + D_{12} \cdot u^{a2} + D_{13} \cdot u^{a3}, \\u_2 &= D_{21} \cdot u^{a1} + D_{22} \cdot u^{a2} + D_{23} \cdot u^{a3}, \\u_3 &= D_{31} \cdot u^{a1} + D_{32} \cdot u^{a2} + D_{33} \cdot u^{a3},\end{aligned}\quad (8.33)$$

где

$$\begin{aligned}D_{11} &= \frac{|S_{a1}|(S_{a2}^y \cdot S_{a3}^z - S_{a3}^y \cdot S_{a2}^z)}{\Delta}, D_{12} = -\frac{|S_{a2}|(S_{a1}^y \cdot S_{a3}^z - S_{a3}^y \cdot S_{a1}^z)}{\Delta}, D_{13} = \frac{|S_{a3}|(S_{a1}^y \cdot S_{a2}^z - S_{a2}^y \cdot S_{a1}^z)}{\Delta}, \\D_{21} &= \frac{|S_{a1}|(S_{a2}^x \cdot S_{a3}^z - S_{a3}^x \cdot S_{a2}^z)}{\Delta}, D_{22} = -\frac{|S_{a2}|(S_{a1}^x \cdot S_{a3}^z - S_{a3}^x \cdot S_{a1}^z)}{\Delta}, D_{23} = \frac{|S_{a3}|(S_{a1}^x \cdot S_{a2}^z - S_{a2}^x \cdot S_{a1}^z)}{\Delta}, \\D_{31} &= \frac{|S_{a1}|(S_{a2}^x \cdot S_{a3}^y - S_{a3}^x \cdot S_{a2}^y)}{\Delta}, D_{32} = -\frac{|S_{a2}|(S_{a1}^x \cdot S_{a3}^y - S_{a3}^x \cdot S_{a1}^y)}{\Delta}, D_{33} = \frac{|S_{a3}|(S_{a1}^x \cdot S_{a2}^y - S_{a2}^x \cdot S_{a1}^y)}{\Delta}.\end{aligned}$$

Предполагая, что система (8.33) не вырождена, разрешим ее относительно контравариантных компонент скорости:

$$\begin{aligned}u^{a1} &= G_{11} \cdot u_1 + G_{12} \cdot u_2 + G_{13} \cdot u_3; \\u^{a2} &= G_{21} \cdot u_1 + G_{22} \cdot u_2 + G_{23} \cdot u_3; \\u^{a3} &= G_{31} \cdot u_1 + G_{32} \cdot u_2 + G_{33} \cdot u_3.\end{aligned}\quad (8.34)$$

Вычислим элементы матрицы G . Для этого решим систему (8.33) методом Крамера:

$$u^{a1} = \frac{\text{Det}(u^{a1})}{\text{Det}}, \quad u^{a2} = \frac{\text{Det}(u^{a2})}{\text{Det}}, \quad u^{a3} = \frac{\text{Det}(u^{a3})}{\text{Det}},$$

где

$$\begin{aligned}\text{Det} &= D_{11} \cdot (D_{22} \cdot D_{33} - D_{23} \cdot D_{32}) - D_{12} \cdot (D_{21} \cdot D_{33} - D_{31} \cdot D_{23}) + D_{13} \cdot (D_{21} \cdot D_{32} - D_{22} \cdot D_{31}); \\ \text{Det}(u^{a1}) &= u_1 \cdot (D_{22} \cdot D_{33} - D_{23} \cdot D_{32}) - u_2 \cdot (D_{12} \cdot D_{33} - D_{32} \cdot D_{13}) + u_3 \cdot (D_{12} \cdot D_{23} - D_{22} \cdot D_{13}); \\ \text{Det}(u^{a2}) &= -u_1 \cdot (D_{21} \cdot D_{33} - D_{31} \cdot D_{23}) + u_2 \cdot (D_{11} \cdot D_{33} - D_{13} \cdot D_{31}) - u_3 \cdot (D_{11} \cdot D_{23} - D_{21} \cdot D_{13}); \\ \text{Det}(u^{a3}) &= u_1 \cdot (D_{21} \cdot D_{32} - D_{31} \cdot D_{22}) - u_2 \cdot (D_{11} \cdot D_{32} - D_{31} \cdot D_{12}) + u_3 \cdot (D_{11} \cdot D_{22} - D_{21} \cdot D_{12}),\end{aligned}$$

откуда следует

$$\left(\begin{aligned} G_{11} &= \frac{(D_{22} \cdot D_{33} - D_{23} \cdot D_{32})}{\text{Det}}, G_{12} = \frac{(D_{32} \cdot D_{13} - D_{12} \cdot D_{33})}{\text{Det}}, G_{13} = \frac{(D_{12} \cdot D_{23} - D_{22} \cdot D_{13})}{\text{Det}}, \\ G_{21} &= \frac{(D_{31} \cdot D_{22} - D_{21} \cdot D_{33})}{\text{Det}}, G_{22} = \frac{(D_{11} \cdot D_{33} - D_{13} \cdot D_{31})}{\text{Det}}, G_{23} = \frac{(D_{21} \cdot D_{13} - D_{11} \cdot D_{23})}{\text{Det}}, \\ G_{31} &= \frac{(D_{21} \cdot D_{32} - D_{31} \cdot D_{22})}{\text{Det}}, G_{32} = \frac{(D_{31} \cdot D_{12} - D_{11} \cdot D_{32})}{\text{Det}}, G_{33} = \frac{(D_{11} \cdot D_{22} - D_{21} \cdot D_{12})}{\text{Det}}. \end{aligned} \right) \quad (8.35)$$

Умножим первое уравнение системы (8.32) на G_{11} , второе уравнение – на G_{21} , третье – на G_{31} , и результаты сложим. Учитывая (8.34), получаем

$$\begin{aligned} & J \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial t} + |S_{a1}| u^{a1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} + |S_{a2}| u^{a2} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_2} + |S_{a3}| u^{a3} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_3} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} (S_{a1}^x \cdot G_{11} + S_{a1}^y \cdot G_{21} + S_{a1}^z \cdot G_{31}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} (S_{a2}^x \cdot G_{11} + S_{a2}^y \cdot G_{21} + S_{a2}^z \cdot G_{31}) + \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} (S_{a3}^x \cdot G_{11} + S_{a3}^y \cdot G_{21} + S_{a3}^z \cdot G_{31}) \right] = 0. \quad (8.36) \end{aligned}$$

Проведя аналогичные операции со второй и третьей колонкой матрицы, находим:

$$\begin{aligned} & J \cdot \frac{\partial u^{a2}}{\partial t} + |S_{a1}| u^{a1} \cdot \frac{\partial u^{a2}}{\partial \alpha_1} + |S_{a2}| u^{a2} \cdot \frac{\partial u^{a2}}{\partial \alpha_2} + |S_{a3}| u^{a3} \cdot \frac{\partial u^{a2}}{\partial \alpha_3} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} (S_{a1}^x \cdot G_{12} + S_{a1}^y \cdot G_{22} + S_{a1}^z \cdot G_{32}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} (S_{a2}^x \cdot G_{12} + S_{a2}^y \cdot G_{22} + S_{a2}^z \cdot G_{32}) + \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} (S_{a3}^x \cdot G_{12} + S_{a3}^y \cdot G_{22} + S_{a3}^z \cdot G_{32}) \right] = 0; \quad (8.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & J \cdot \frac{\partial u^{a3}}{\partial t} + |S_{a1}| u^{a1} \cdot \frac{\partial u^{a3}}{\partial \alpha_1} + |S_{a2}| u^{a2} \cdot \frac{\partial u^{a3}}{\partial \alpha_2} + |S_{a3}| u^{a3} \cdot \frac{\partial u^{a3}}{\partial \alpha_3} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} (S_{a1}^x \cdot G_{13} + S_{a1}^y \cdot G_{23} + S_{a1}^z \cdot G_{33}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} (S_{a2}^x \cdot G_{13} + S_{a2}^y \cdot G_{23} + S_{a2}^z \cdot G_{33}) + \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} (S_{a3}^x \cdot G_{13} + S_{a3}^y \cdot G_{23} + S_{a3}^z \cdot G_{33}) \right] = 0. \quad (8.38) \end{aligned}$$

Приведем систему уравнений (8.30), (8.36), (8.37), (8.38), (8.31) к виду (8.11).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Theta_{a1}^1 &= (S_{a1}^x \cdot G_{11} + S_{a1}^y \cdot G_{21} + S_{a1}^z \cdot G_{31}); & \Theta_{a1}^2 &= (S_{a1}^x \cdot G_{12} + S_{a1}^y \cdot G_{22} + S_{a1}^z \cdot G_{32}); \\ \Theta_{a1}^3 &= (S_{a1}^x \cdot G_{13} + S_{a1}^y \cdot G_{23} + S_{a1}^z \cdot G_{33}); & \Theta_{a2}^1 &= (S_{a2}^x \cdot G_{11} + S_{a2}^y \cdot G_{21} + S_{a2}^z \cdot G_{31}); \\ \Theta_{a2}^2 &= (S_{a2}^x \cdot G_{12} + S_{a2}^y \cdot G_{22} + S_{a2}^z \cdot G_{32}); & \Theta_{a2}^3 &= (S_{a2}^x \cdot G_{13} + S_{a2}^y \cdot G_{23} + S_{a2}^z \cdot G_{33}); \\ \Theta_{a3}^1 &= (S_{a3}^x \cdot G_{11} + S_{a3}^y \cdot G_{21} + S_{a3}^z \cdot G_{31}); & \Theta_{a3}^2 &= (S_{a3}^x \cdot G_{12} + S_{a3}^y \cdot G_{22} + S_{a3}^z \cdot G_{32}); \\ \Theta_{a3}^3 &= (S_{a3}^x \cdot G_{13} + S_{a3}^y \cdot G_{23} + S_{a3}^z \cdot G_{33}). \end{aligned}$$

Выпишем структуры матриц A , B , C в представлении (8.11)

Структура матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} |S_{a1}|u^{a1} & \rho \cdot |S_{a1}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |S_{a1}|u^{a1} & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a1}^1}{\rho} \\ 0 & 0 & |S_{a1}|u^{a1} & 0 & \frac{\Theta_{a1}^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & |S_{a1}|u^{a1} & \frac{\Theta_{a1}^3}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 \cdot |S_{a1}| & 0 & 0 & |S_{a1}|u^{a1} \end{pmatrix}. \quad (8.39)$$

Структура матрицы B

$$B = \begin{pmatrix} |S_{a2}|u^{a2} & 0 & \rho \cdot |S_{a2}| & 0 & 0 \\ 0 & |S_{a2}|u^{a2} & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a2}^1}{\rho} \\ 0 & 0 & |S_{a2}|u^{a2} & 0 & \frac{\Theta_{a2}^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & |S_{a2}|u^{a2} & \frac{\Theta_{a2}^3}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 \cdot |S_{a2}| & 0 & |S_{a2}|u^{a2} \end{pmatrix}. \quad (8.40)$$

Структура матрицы C

$$C = \begin{pmatrix} |S_{a3}|u^{a3} & 0 & 0 & \rho \cdot |S_{a3}| & 0 \\ 0 & |S_{a3}|u^{a3} & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a3}^1}{\rho} \\ 0 & 0 & |S_{a3}|u^{a3} & 0 & \frac{\Theta_{a3}^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & |S_{a3}|u^{a3} & \frac{\Theta_{a3}^3}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 \cdot |S_{a3}| & |S_{a3}|u^{a3} \end{pmatrix}. \quad (8.41)$$

8.1.7. Приведение к локально-одномерному характеристическому виду системы уравнений газовой динамики в криволинейных координатах

Найдем собственные числа и соответствующие им левые собственные векторы матриц A , B и C .

Собственные числа матриц A, B, C

Для определения собственных чисел матрицы A решим матричное уравнение $\|A - \lambda \cdot E\| = 0$. В покомпонентном представлении это приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} (|S_{a1}|u^{a1} - \lambda) & \rho \cdot |S_{a1}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (|S_{a1}|u^{a1} - \lambda) & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a1}^1}{\rho} \\ 0 & 0 & (|S_{a1}|u^{a1} - \lambda) & 0 & \frac{\Theta_{a1}^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & (|S_{a1}|u^{a1} - \lambda) & \frac{\Theta_{a1}^3}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 \cdot |S_{a1}| & 0 & 0 & (|S_{a1}|u^{a1} - \lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= (|S_{a1}|u^{a1} - \lambda) \left[(|S_{a1}|u^{a1} - \lambda) \cdot (|S_{a1}|u^{a1} - \lambda)^3 - c^2 \cdot |S_{a1}| \cdot (|S_{a1}|u^{a1} - \lambda)^2 \Theta_{a1}^1 \right] =$$

$$= (|S_{a1}|u^{a1} - \lambda)^2 \left[(|S_{a1}|u^{a1} - \lambda)^2 - c^2 \cdot |S_{a1}| \cdot \Theta_{a1}^1 \right] = 0,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1^A &= |S_{a1}|u^{a1} + c\sqrt{|S_{a1}| \cdot \Theta_{a1}^1}; \\ \lambda_2^A &= |S_{a1}|u^{a1} - c\sqrt{|S_{a1}| \cdot \Theta_{a1}^1}; \\ \lambda_3^A &= \lambda_4^A = \lambda_5^A = |S_{a1}|u^{a1}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Рассмотрим матрицу B . Решим матричное уравнение $\|B - \lambda \cdot E\| = 0$.

Это приводит к равенству:

$$\begin{vmatrix} (|S_{a2}|u^{a2} - \lambda) & 0 & \rho \cdot |S_{a2}| & 0 & 0 \\ 0 & (|S_{a2}|u^{a2} - \lambda) & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a2}^1}{\rho} \\ 0 & 0 & (|S_{a2}|u^{a2} - \lambda) & 0 & \frac{\Theta_{a2}^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & (|S_{a2}|u^{a2} - \lambda) & \frac{\Theta_{a2}^3}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 \cdot |S_{a2}| & 0 & (|S_{a2}|u^{a2} - \lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= (|S_{a2}|u^{a2} - \lambda)^3 \cdot [(|S_{a2}|u^{a2} - \lambda)^2 - c^2 \cdot |S_{a2}| \cdot \Theta_{a2}^2] = 0.$$

Собственные числа матрицы **B**:

$$\begin{aligned} \lambda_1^B &= |S_{a2}|u^{a2} + c\sqrt{|S_{a2}| \cdot \Theta_{a2}^2}; \\ \lambda_2^B &= |S_{a2}|u^{a2} - c\sqrt{|S_{a2}| \cdot \Theta_{a2}^2}; \\ \lambda_3^B &= \lambda_4^B = \lambda_5^B = |S_{a2}|u^{a2}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Для матрицы **C**:

$$\begin{vmatrix} (|S_{a3}|u^{a3} - \lambda) & 0 & 0 & \rho \cdot |S_{a3}| & 0 \\ 0 & (|S_{a3}|u^{a3} - \lambda) & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a3}^1}{\rho} \\ 0 & 0 & (|S_{a3}|u^{a3} - \lambda) & 0 & \frac{\Theta_{a3}^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & (|S_{a3}|u^{a3} - \lambda) & \frac{\Theta_{a3}^3}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 \cdot |S_{a3}| & (|S_{a3}|u^{a3} - \lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= (|S_{a3}|u^{a3} - \lambda)^3 \cdot [(|S_{a3}|u^{a3} - \lambda)^2 - c^2 \cdot |S_{a3}| \cdot \Theta_{a3}^3] = 0.$$

Собственные числа матрицы **C**:

$$\begin{aligned} \lambda_1^C &= |S_{a3}|u^{a3} + c\sqrt{|S_{a3}| \cdot \Theta_{a3}^3}; \\ \lambda_2^C &= |S_{a3}|u^{a3} - c\sqrt{|S_{a3}| \cdot \Theta_{a3}^3}; \\ \lambda_3^C &= \lambda_4^C = \lambda_5^C = |S_{a3}|u^{a3}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

Левые собственные векторы матрицы A

Найдем левый собственный вектор L_{1A} , соответствующий первому собственному числу $\lambda_1^A = |S_{a1}|u^{a1} + c\sqrt{|S_{a1}|} \cdot \Theta_{a1}^1$,

$$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \cdot \begin{pmatrix} -c\sqrt{|S_{a1}|} \Theta_{a1}^1 & \rho \cdot |S_{a1}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c\sqrt{|S_{a1}|} \Theta_{a1}^1 & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a1}^1}{\rho} \\ 0 & 0 & -c\sqrt{|S_{a1}|} \Theta_{a1}^1 & 0 & \frac{\Theta_{a1}^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & -c\sqrt{|S_{a1}|} \Theta_{a1}^1 & \frac{\Theta_{a1}^3}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 \cdot |S_{a1}| & 0 & 0 & -c\sqrt{|S_{a1}|} \Theta_{a1}^1 \end{pmatrix} = 0.$$

Легко увидеть, что

$$L_{1A} = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = \left(0, 1, 0, 0, \frac{1}{\rho c} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{a1}^1}{|S_{a1}|}} \right). \quad (8.45)$$

Для дуального собственного числа λ_2^A левый собственный вектор L_{2A} будет иметь вид:

$$L_{2A} = \left(0, 1, 0, 0, -\frac{1}{\rho c} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{a1}^1}{|S_{a1}|}} \right). \quad (8.46)$$

Собственные векторы, отвечающие тройным собственным значениям, находятся из системы линейных уравнений

$$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \rho \cdot |S_{a1}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a1}^1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a1}^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a1}^3}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 \cdot |S_{a1}| & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

которая сводится к системе из двух независимых уравнений:

$$\begin{aligned} d_1 + d_5 \cdot c^2 &= 0; \\ d_2 \cdot \Theta_{a1}^1 + d_3 \cdot \Theta_{a1}^2 + d_4 \cdot \Theta_{a1}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Выразим два неизвестных через остальные, так называемые свободные неизвестные:

$$\begin{aligned} d_1 &= -d_3 \cdot c^2; \\ d_2 &= -d_3 \cdot \frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} - d_4 \cdot \frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} = 0. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Представим вектор свободных неизвестных в виде комбинации трех независимых векторов в «естественном» базисе:

$$\begin{pmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя первый из базисных векторов в (8.47), получаем: $d_1 = 0, d_2 = -\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1}$. Дополняя эти значения компонентами первого базисного вектора, находим третий левый собственный вектор: $L_{3A} = \left(0, -\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1}, 1, 0, 0 \right)$. Прделав аналогичные операции с остальными двумя базисными векторами, получаем остальные два левых собственных вектора:

$$L_{4A} = \left(0, -\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1}, 0, 1, 0 \right); \quad L_{5A} = (-c^2, 0, 0, 0, 1).$$

Таким образом, матрица левых собственных значений Ω_A матрицы A имеет вид:

$$\Omega_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho c} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{a1}^1}{|S_{a1}|}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho c} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{a1}^1}{|S_{a1}|}} \\ 0 & -\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} & 0 & 1 & 0 \\ -c^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.48)$$

Иными словами,

$$\Omega_A \cdot A = L_A^{\lambda} \cdot \Omega_A = \begin{pmatrix} \lambda_1^A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5^A \end{pmatrix} \cdot \Omega_A. \quad (8.49)$$

Левые собственные векторы матрицы В

Найдем левый собственный вектор L_{1B} , соответствующей первому собственному числу $\lambda_1^B = |S_{a2}|u^{a2} + c\sqrt{|S_{a2}| \cdot \Theta_{a2}^2}$.

Для этого решим систему уравнений относительно неизвестных d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 :

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -c\sqrt{|S_{a2}| \cdot \Theta_{a2}^2} & 0 & \rho \cdot |S_{a2}| & 0 & 0 \\ 0 & -c\sqrt{|S_{a2}| \cdot \Theta_{a2}^2} & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a2}^1}{\rho} \\ 0 & 0 & -c\sqrt{|S_{a2}| \cdot \Theta_{a2}^2} & 0 & \frac{\Theta_{a2}^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & -c\sqrt{|S_{a2}| \cdot \Theta_{a2}^2} & \frac{\Theta_{a2}^3}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 \cdot |S_{a2}| & 0 & -c\sqrt{|S_{a2}| \cdot \Theta_{a2}^2} \end{pmatrix} = 0,$$

откуда находим

$$L_{1B} = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = \left(0, 0, 1, 0, \frac{1}{\rho c} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{a2}^2}{|S_{a2}|}} \right).$$

Для дуального собственного числа λ_2^B левый собственный вектор L_{2B} будет иметь вид:

$$L_{2B} = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = \left(0, 0, 1, 0, -\frac{1}{\rho c} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{a2}^2}{|S_{a2}|}} \right).$$

Собственные векторы, отвечающие тройному собственному значению, находятся из системы линейных уравнений

$$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho \cdot |S_{a2}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a2}^1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a2}^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Theta_{a2}^3}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 \cdot |S_{a2}| & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

которая сводится к существенно более простой:

$$\begin{aligned} d_1 + d_5 \cdot c^2 &= 0; \\ d_2 \cdot \Theta_{a2}^1 + d_3 \cdot \Theta_{a2}^2 + d_4 \cdot \Theta_{a2}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Выразим два неизвестных через остальные – свободные неизвестные:

$$\begin{aligned} d_1 &= -d_5 \cdot c^2; \\ d_2 &= -d_3 \cdot \frac{\Theta_{a2}^2}{\Theta_{a2}^1} - d_4 \cdot \frac{\Theta_{a2}^3}{\Theta_{a2}^1} = 0. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Трехмерное пространство свободных неизвестных представим в виде разложения по трем линейно независимым (базисным) векторам:

$$\begin{pmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя каждый из этих базисных векторов в (8.50), как и в предыдущем случае, приходим к матрице Ω_B левых собственных векторов (строк) матрицы В:

$$\Omega_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\rho c} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{a2}^2}{|S_{a2}|}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\rho c} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{a2}^2}{|S_{a2}|}} \\ 0 & -\frac{\Theta_{a2}^2}{\Theta_{a2}^1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Theta_{a2}^3}{\Theta_{a2}^1} & 0 & 1 & 0 \\ -c^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.51)$$

Таким образом, мы установили, что выполняется соотношение

$$\Omega_B \cdot B = L_B^1 \cdot \Omega_B = \begin{pmatrix} \lambda_1^B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3^B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3^B \end{pmatrix} \cdot \Omega_B. \quad (8.52)$$

Левые собственные векторы матрицы С

Действия, совершенно аналогичные описанным выше, приводят к матрице левых собственных векторов Ω_C , имеющей следующую структуру:

$$\Omega_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{a3}^3}{|S_{a3}|}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{a3}^3}{|S_{a3}|}} \\ 0 & -\frac{\Theta_{a3}^2}{\Theta_{a3}^1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Theta_{a3}^3}{\Theta_{a3}^1} & 0 & 1 & 0 \\ -c^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(8.53)

Собственные векторы представляют собой строки этой матрицы, поэтому, как и в предыдущих случаях, всегда выполняется равенство

$$\Omega_c \cdot C = L_c^A \cdot \Omega_c = \begin{pmatrix} \lambda_1^C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3^C \end{pmatrix} \cdot \Omega_c. \quad (8.54)$$

8.1.8. Локально-одномерные характеристические представления уравнений газовой динамики в криволинейных координатах

Локально-одномерная характеристическая форма уравнений газовой динамики в направлении координаты α_1

Умножая уравнение (8.11) на матрицу Ω_A , получаем

$$J \cdot \Omega_A \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \Omega_A \cdot A \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha_1} = -\Omega_A \cdot \left(B \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha_2} + C \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha_3} - \bar{F} \right) = \bar{F}_A.$$

С учетом (8.49), это соотношение преобразуется к форме

$$J \cdot \Omega_A \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + L_A^A \cdot \Omega_A \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha_1} = \bar{F}_A, \quad (8.58)$$

которую будем называть локально-одномерной характеристической формой уравнений газовой динамики в направлении координаты α_1 . В покомпонентной записи это будет выглядеть как

$$\begin{aligned} J \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\Theta_{a1}^1}{\sqrt{|S_{a1}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \lambda_1^A \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\Theta_{a1}^1}{\sqrt{|S_{a1}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} \right) &= (F_A)_1; \\ J \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\Theta_{a1}^1}{\sqrt{|S_{a1}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \lambda_2^A \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\Theta_{a1}^1}{\sqrt{|S_{a1}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} \right) &= (F_A)_2; \\ J \left(\frac{\partial u^{a2}}{\partial t} - \frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial t} \right) + \lambda_3^A \cdot \left(\frac{\partial u^{a2}}{\partial \alpha_1} - \frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} \right) &= (F_A)_3; \\ J \cdot \left(\frac{\partial u^{a3}}{\partial t} - \frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial t} \right) + \lambda_3^A \cdot \left(\frac{\partial u^{a3}}{\partial \alpha_1} - \frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} \right) &= (F_A)_4; \\ J \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \lambda_3^A \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} - c^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} \right) &= (F_A)_5. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Подставляя сюда выражения для собственных чисел и разделив на якобиан, окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\sqrt{\Theta_{a1}^1}}{\sqrt{|S_{a1}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{(|S_{a1}|u^{a1} + c\sqrt{|S_{a1}|} \cdot \Theta_{a1}^1)}{J} \cdot \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\sqrt{\Theta_{a1}^1}}{\sqrt{|S_{a1}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{(F_A)_1}{J}; \\
 & \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\sqrt{\Theta_{a1}^1}}{\sqrt{|S_{a1}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{(|S_{a1}|u^{a1} - c\sqrt{|S_{a1}|} \cdot \Theta_{a1}^1)}{J} \cdot \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\sqrt{\Theta_{a1}^1}}{\sqrt{|S_{a1}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{(F_A)_2}{J}; \\
 & \left(\frac{\partial u^{a2}}{\partial t} - \frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial t} \right) + \frac{|S_{a1}|u^{a1}}{J} \cdot \left(\frac{\partial u^{a2}}{\partial \alpha_1} - \frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{(F_A)_3}{J}; \\
 & \left(\frac{\partial u^{a3}}{\partial t} - \frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial t} \right) + \frac{|S_{a1}|u^{a1}}{J} \cdot \left(\frac{\partial u^{a3}}{\partial \alpha_1} - \frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{(F_A)_4}{J}; \\
 & \left(\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{|S_{a1}|u^{a1}}{J} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} - c^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{(F_A)_5}{J}.
 \end{aligned} \tag{8.56}$$

Конкретные выражения для правых частей этой системы уравнений нам в дальнейшем не понадобятся.

Локально-одномерная характеристическая форма уравнений газовой динамики в направлении координаты α_2

Умножая уравнение (8.11) на матрицу Ω_B и перенося ряд членов в правую часть, приходим к выражению

$$J \cdot \Omega_B \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + \Omega_B \cdot B \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha_2} = -\Omega_B \cdot \left(A \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha_1} + C \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha_3} - \vec{F} \right) = \vec{F}_B.$$

С учетом (8.49), это соотношение приобретает вид:

$$J \cdot \Omega_B \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + L_B^\lambda \cdot \Omega_B \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha_2} = \vec{F}_B.$$

Приведем покомпонентную запись этого векторного уравнения:

$$\begin{aligned}
 & J \cdot \left(\frac{\partial u^{a2}}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\sqrt{\Theta_{a2}^2}}{\sqrt{|S_{a2}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \lambda_1^a \cdot \left(\frac{\partial u^{a2}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\sqrt{\Theta_{a2}^2}}{\sqrt{|S_{a2}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} \right) = (F_B)_1; \\
 & J \cdot \left(\frac{\partial u^{a2}}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\sqrt{\Theta_{a2}^2}}{\sqrt{|S_{a2}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \lambda_2^a \cdot \left(\frac{\partial u^{a2}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\sqrt{\Theta_{a2}^2}}{\sqrt{|S_{a2}|}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} \right) = (F_B)_2; \\
 & J \cdot \left(\frac{\partial u^{a2}}{\partial t} - \frac{\Theta_{a2}^2}{\Theta_{a2}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial t} \right) + \lambda_3^a \cdot \left(\frac{\partial u^{a2}}{\partial \alpha_2} - \frac{\Theta_{a2}^2}{\Theta_{a2}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_2} \right) = (F_B)_3; \\
 & J \cdot \left(\frac{\partial u^{a3}}{\partial t} - \frac{\Theta_{a2}^3}{\Theta_{a2}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial t} \right) + \lambda_3^a \cdot \left(\frac{\partial u^{a3}}{\partial \alpha_2} - \frac{\Theta_{a2}^3}{\Theta_{a2}^1} \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_2} \right) = (F_B)_4; \\
 & J \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \lambda_3^a \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_2} - c^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_2} \right) = (F_B)_5.
 \end{aligned} \tag{8.57}$$

Подставляя сюда выражения для собственных чисел и разделив на якобиан, окончательно получаем вторую локальную характеристическую форму:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial u^{\alpha_2}}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \sqrt{\frac{\Theta_{\alpha_2}^2}{|S_{\alpha_2}|}} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{(|S_{\alpha_2}| u^{\alpha_2} + c \sqrt{|S_{\alpha_2}| \Theta_{\alpha_2}^2})}{J} \left(\frac{\partial u^{\alpha_2}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{\rho c} \sqrt{\frac{\Theta_{\alpha_2}^2}{|S_{\alpha_2}|}} \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{(F_B)_1}{J}, \\
 & \left(\frac{\partial u^{\alpha_2}}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \sqrt{\frac{\Theta_{\alpha_2}^2}{|S_{\alpha_2}|}} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{(|S_{\alpha_2}| u^{\alpha_2} - c \sqrt{|S_{\alpha_2}| \Theta_{\alpha_2}^2})}{J} \left(\frac{\partial u^{\alpha_2}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{\rho c} \sqrt{\frac{\Theta_{\alpha_2}^2}{|S_{\alpha_2}|}} \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{(F_B)_2}{J}, \\
 & \left(\frac{\partial u^{\alpha_2}}{\partial t} - \frac{\Theta_{\alpha_2}^2}{\Theta_{\alpha_2}^1} \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial t} \right) + \frac{|S_{\alpha_2}| u^{\alpha_2}}{J} \cdot \left(\frac{\partial u^{\alpha_2}}{\partial \alpha_2} - \frac{\Theta_{\alpha_2}^2}{\Theta_{\alpha_2}^1} \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{(F_B)_3}{J}, \\
 & \left(\frac{\partial u^{\alpha_3}}{\partial t} - \frac{\Theta_{\alpha_2}^3}{\Theta_{\alpha_2}^1} \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial t} \right) + \frac{|S_{\alpha_2}| u^{\alpha_2}}{J} \cdot \left(\frac{\partial u^{\alpha_3}}{\partial \alpha_2} - \frac{\Theta_{\alpha_2}^3}{\Theta_{\alpha_2}^1} \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{(F_B)_4}{J}, \\
 & \left(\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{|S_{\alpha_2}| u^{\alpha_2}}{J} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_2} - c^2 \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{(F_B)_5}{J}.
 \end{aligned} \tag{8.58}$$

Локально-одномерная характеристическая форма уравнений газовой динамики в направлении координаты α_3

Умножая уравнение (8.11) на матрицу Ω_C , как и в предыдущих случаях, находим:

$$J \cdot \Omega_C \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + \Omega_C \cdot C \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha_3} = -\Omega_C \cdot \left(A \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha_1} + B \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha_2} - \vec{F} \right) = \vec{F}_C.$$

Учитывая, что матрица Ω_C составлена из строк собственных векторов, получаем:

$$J \cdot \Omega_C \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + L_C^1 \cdot \Omega_C \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha_3} = \vec{F}_C.$$

Как и в предыдущих случаях, распишем это выражение покомпонентно с учетом конкретных значений собственных чисел:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial u^{\alpha_3}}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \sqrt{\frac{\Theta_{\alpha_3}^2}{|S_{\alpha_3}|}} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{(|S_{\alpha_3}| u^{\alpha_3} + c \sqrt{|S_{\alpha_3}| \Theta_{\alpha_3}^2})}{J} \left(\frac{\partial u^{\alpha_3}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{\rho c} \sqrt{\frac{\Theta_{\alpha_3}^2}{|S_{\alpha_3}|}} \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{(F_C)_1}{J}, \\
 & \left(\frac{\partial u^{\alpha_3}}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \sqrt{\frac{\Theta_{\alpha_3}^2}{|S_{\alpha_3}|}} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{(|S_{\alpha_3}| u^{\alpha_3} - c \sqrt{|S_{\alpha_3}| \Theta_{\alpha_3}^2})}{J} \left(\frac{\partial u^{\alpha_3}}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{\rho c} \sqrt{\frac{\Theta_{\alpha_3}^2}{|S_{\alpha_3}|}} \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{(F_C)_2}{J}, \\
 & \left(\frac{\partial u^{\alpha_2}}{\partial t} - \frac{\Theta_{\alpha_3}^2}{\Theta_{\alpha_3}^1} \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial t} \right) + \frac{|S_{\alpha_3}| u^{\alpha_3}}{J} \cdot \left(\frac{\partial u^{\alpha_2}}{\partial \alpha_3} - \frac{\Theta_{\alpha_3}^2}{\Theta_{\alpha_3}^1} \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{(F_C)_3}{J}, \\
 & \left(\frac{\partial u^{\alpha_3}}{\partial t} - \frac{\Theta_{\alpha_3}^3}{\Theta_{\alpha_3}^1} \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial t} \right) + \frac{|S_{\alpha_3}| u^{\alpha_3}}{J} \cdot \left(\frac{\partial u^{\alpha_3}}{\partial \alpha_3} - \frac{\Theta_{\alpha_3}^3}{\Theta_{\alpha_3}^1} \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{(F_C)_4}{J}, \\
 & \left(\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{|S_{\alpha_3}| u^{\alpha_3}}{J} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_3} - c^2 \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{(F_C)_5}{J}.
 \end{aligned} \tag{8.59}$$

Следует отметить, что идентификатор C в приведенных выше локально-характеристических уравнениях обозначает скорость звука. Для идеального газа с уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1) \rho e, \quad (8.60)$$

где γ – показатель адиабаты, а $e = E - 0,5(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$ – удельная внутренняя энергия, скорость звука определяется выражениями

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)e}. \quad (8.61)$$

8.1.9. Консервативная запись уравнений Эйлера в криволинейных координатах

Схема «КАБАРЕ» базируется на двух разных формах записи уравнений газовой динамики (уравнений Эйлера) – дивергентной (консервативной) форме (8.1) и локально-одномерном характеристическом представлении (8.56), (8.58) и (8.59). В криволинейных координатах законы сохранения удобно преобразовать к специальному (дивергентному) виду, удобному для построения консервативных разностных схем. Рассмотрим эти законы по отдельности.

Закон сохранения массы

В декартовых координатах записывается как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial z} = 0.$$

С учетом определения дивергенции (8.23) и контравариантных компонент скоростей, последнее уравнение приобретает вид:

$$J \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot (|S_{\alpha 1}| \cdot \rho \cdot u^{\alpha 1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \cdot (|S_{\alpha 2}| \cdot \rho \cdot u^{\alpha 2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \cdot (|S_{\alpha 3}| \cdot \rho \cdot u^{\alpha 3}) \right] = 0. \quad (8.62)$$

Уравнение сохранения компоненты импульса в направлении X

Вид в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_1 u_3}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

В криволинейных координатах переходит в дивергентную форму:

$$J \cdot \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot (|S_{\alpha 1}| \cdot \rho u_1 \cdot u^{\alpha 1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \cdot (|S_{\alpha 2}| \cdot \rho u_1 \cdot u^{\alpha 2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \cdot (|S_{\alpha 3}| \cdot \rho u_1 \cdot u^{\alpha 3}) \right] + \\ + \frac{\partial p S_{\alpha 1}^x}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial p S_{\alpha 2}^x}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial p S_{\alpha 3}^x}{\partial \alpha_3} = 0. \quad (8.63)$$

Уравнение сохранения компоненты импульса в направлении Y

В декартовых координатах:

$$\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_z u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_z u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z u_3}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Переходит в дивергентное уравнение:

$$\begin{aligned} J \cdot \frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot (|S_{\alpha 1}| \cdot \rho u_z \cdot u^{\alpha 1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \cdot (|S_{\alpha 2}| \cdot \rho u_z \cdot u^{\alpha 2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \cdot (|S_{\alpha 3}| \cdot \rho u_z \cdot u^{\alpha 3}) \right] + \\ + \left[\frac{\partial p S'_{\alpha 2}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial p S'_{\alpha 1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial p S'_{\alpha 3}}{\partial \alpha_3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.64)$$

При получении последнего уравнения была использована возможность дивергентного представления якобианов, откуда следует, что

$$\left[\frac{\partial p}{\partial \alpha_2} S'_{\alpha 2} + \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} S'_{\alpha 1} + \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} S'_{\alpha 3} \right] = \left[\frac{\partial p S'_{\alpha 2}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial p S'_{\alpha 1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial p S'_{\alpha 3}}{\partial \alpha_3} \right].$$

Уравнение сохранения компоненты импульса в направлении Z

В декартовых координатах:

$$\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_z u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_z u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z u_3}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

В криволинейных координатах:

$$\begin{aligned} J \cdot \frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot (|S_{\alpha 1}| \cdot \rho u_z \cdot u^{\alpha 1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \cdot (|S_{\alpha 2}| \cdot \rho u_z \cdot u^{\alpha 2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \cdot (|S_{\alpha 3}| \cdot \rho u_z \cdot u^{\alpha 3}) \right] + \\ + \left[\frac{\partial p S'_{\alpha 3}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial p S'_{\alpha 1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial p S'_{\alpha 2}}{\partial \alpha_2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Уравнение сохранения полной энергии

В декартовых координатах:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho E u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho E u_3}{\partial z} + \frac{\partial p u_1}{\partial x} + \frac{\partial p u_2}{\partial y} + \frac{\partial p u_3}{\partial z} = 0.$$

В криволинейных координатах:

$$J \cdot \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot (|S_{a1}| \cdot \rho E \cdot u^{\alpha_1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \cdot (|S_{a2}| \cdot \rho E \cdot u^{\alpha_2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \cdot (|S_{a3}| \cdot \rho E \cdot u^{\alpha_3}) \right] + \\ + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot (|S_{a1}| \cdot p \cdot u^{\alpha_1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \cdot (|S_{a2}| \cdot p \cdot u^{\alpha_2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \cdot (|S_{a3}| \cdot p \cdot u^{\alpha_3}) \right] = 0. \quad (8.66)$$

8.2. Схема «КАБАРЕ» для трехмерных нестационарных задач газовой динамики на криволинейных гексагональных сетках

8.2.1. Аппроксимация геометрических характеристик на структурированных гексагональных косоугольных сетках

Рассмотрим одну косоугольную гексагональную ячейку (рис. 8.1) с нумерацией узлов, принятой в открытой системе OpenFOAM, причем такую, что существует достаточно гладкое отображение, переводящее ее в прямоугольную ячейку со сторонами $h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}, h_{\alpha_3}$.

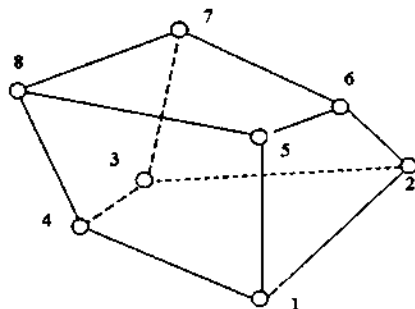


Рис. 8.1. Типичная косоугольная гексагональная расчетная ячейка в декартовых координатах

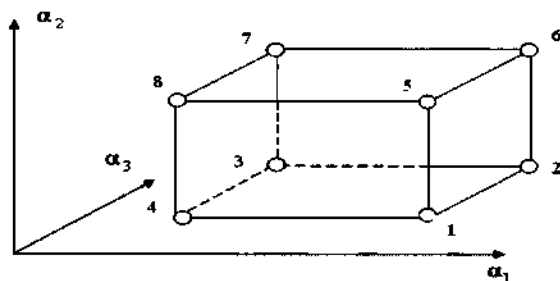


Рис. 8.2. Вид косоугольной гексагональной расчетной ячейки в криволинейной системе координат. В тексте используются следующие наименования шести граней изображенного параллелепипеда: грань 1,2,6,5 – «западная», грань 4,3,7,8 – «восточная», грань 2,6,7,3 – «северная», грань 1,5,8,4 – «южная», грань 1,2,3,4 – «нижняя», грань 5,6,7,8 – «верхняя»

Аппроксимируем производные

$$S_{a1}^x = \frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)}; \quad S_{a1}^y = \frac{D(z, x)}{D(\alpha_2, \alpha_3)}; \quad S_{a1}^z = \frac{D(x, y)}{D(\alpha_2, \alpha_3)}$$

на восточной границе параллелепипеда (рис. 8.2)

$$\begin{aligned} \frac{S_E^x}{h_{a2} \cdot h_{a3}} &= \langle S_{a1}^x \rangle_h = \left\langle \frac{D(y, z)}{D(\alpha_2, \alpha_3)} \right\rangle_h = \left\langle \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \right\rangle_h \cdot \left\langle \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \right\rangle_h - \left\langle \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \right\rangle_h \cdot \left\langle \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right\rangle_h; \\ \left\langle \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \right\rangle_h &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_5 - y_1}{h_{a2}} + \frac{y_6 - y_2}{h_{a2}} \right); \quad \left\langle \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \right\rangle_h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_2 - z_1}{h_{a3}} + \frac{z_6 - z_3}{h_{a3}} \right); \\ \left\langle \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right\rangle_h &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_5 - z_1}{h_{a2}} + \frac{z_6 - z_2}{h_{a2}} \right); \quad \left\langle \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \right\rangle_h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{h_{a3}} + \frac{y_6 - y_3}{h_{a3}} \right); \\ S_E^x &= \frac{1}{2} [(y_5 - y_2)(z_6 - z_1) - (y_6 - y_1)(z_5 - z_2)]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить разностные выражения

$$\begin{aligned} S_E^y &= \frac{1}{2} [(z_5 - z_2)(x_6 - x_1) - (z_6 - z_1)(x_5 - x_2)]; \\ S_E^z &= \frac{1}{2} [(x_5 - x_2)(y_6 - y_1) - (x_6 - x_1)(y_5 - y_2)]. \end{aligned}$$

Легко увидеть, что если существует локальное достаточно гладкое отображение, переводящее параллелепипед (рис. 8.2) в косугольную гексагональную ячейку (рис. 8.1), то равенства

$$\frac{S_E^x}{h_{a2} \cdot h_{a3}} = S_{a1}^x; \quad \frac{S_E^y}{h_{a2} \cdot h_{a3}} = S_{a1}^y; \quad \frac{S_E^z}{h_{a2} \cdot h_{a3}} = S_{a1}^z$$

выполняются со вторым порядком точности относительно опорных переменных (α_2, α_3) .

Величины S_E^x , S_E^y , S_E^z представляют собой проекции площади правой грани шестигранника на плоскости (yz, xz, xy) соответственно. Отсюда непосредственно следуют выражения как для аппроксимации площади этой грани

$$S_E = \sqrt{(S_E^x)^2 + (S_E^y)^2 + (S_E^z)^2}, \quad (8.67)$$

так и для компонент единичного вектора, внешнего по отношению к изображенной на рисунке 8.1 расчетной ячейке

$$(n_x)_E = \frac{S_E^x}{S_E}; \quad (n_y)_E = \frac{S_E^y}{S_E}; \quad (n_z)_E = \frac{S_E^z}{S_E}. \quad (8.68)$$

Следует отметить, что величины, входящие в последние выражения (8.67), (8.68), зависят только от координат узлов в переменных (x, y, z) .

Для западной грани гексаэдра, проведя аналогичные выкладки, получаем:

$$S_w^x = \frac{1}{2}[(y_7 - y_4)(z_8 - z_3) - (y_8 - y_3)(z_7 - z_4)];$$

$$S_w^y = \frac{1}{2}[(z_7 - z_4)(x_8 - x_3) - (z_8 - z_3)(x_7 - x_4)];$$

$$S_w^z = \frac{1}{2}[(x_7 - x_4)(y_8 - y_3) - (x_8 - x_3)(y_7 - y_4)].$$

Величины S_w^x , S_w^y , S_w^z также представляют собой проекции площади $S_w = \sqrt{(S_w^x)^2 + (S_w^y)^2 + (S_w^z)^2}$ левой грани гексаэдра на оси (x, y, z) . Выражения для нормали

$$(n_x)_w = \frac{S_w^x}{S_w}; \quad (n_y)_w = \frac{S_w^y}{S_w}; \quad (n_z)_w = \frac{S_w^z}{S_w}$$

описывают нормаль, направленную внутрь расчетной ячейки. Чтобы получить внешнюю нормаль, нужно поменять знак всех трех компонент.

Для вычисления геометрических характеристик северной грани косоугольной ячейки нужно аппроксимировать выражения

$$S_{a2}^x = \frac{D(y, z)}{D(\alpha_3, \alpha_1)}; \quad S_{a2}^y = \frac{D(z, x)}{D(\alpha_3, \alpha_1)}; \quad S_{a2}^z = \frac{D(x, y)}{D(\alpha_3, \alpha_1)}.$$

Продельвая аналогичные, описанные ранее операции, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{S_N^x}{h_{a1} \cdot h_{a3}} &= S_{a2}^x + O((h_{a1})^2, (h_{a3})^2); & \frac{S_N^y}{h_{a1} \cdot h_{a3}} &= S_{a2}^y + O((h_{a1})^2, (h_{a3})^2); \\ \frac{S_N^z}{h_{a1} \cdot h_{a3}} &= S_{a2}^z + O((h_{a1})^2, (h_{a3})^2), \end{aligned}$$

где

$$S_N^x = \frac{1}{2}[(y_6 - y_3)(z_7 - z_2) - (y_7 - y_2)(z_6 - z_3)];$$

$$S_N^y = \frac{1}{2}[(z_6 - z_3)(x_7 - x_2) - (z_7 - z_2)(x_6 - x_3)];$$

$$S_N^z = \frac{1}{2}[(x_6 - x_3)(y_7 - y_2) - (x_7 - x_2)(y_6 - y_3)].$$

Полная площадь и единичные векторы внешней нормали записываются обычным образом:

$$S_N = \sqrt{(S_N^x)^2 + (S_N^y)^2 + (S_N^z)^2};$$

$$(n_x)_N = \frac{S_N^x}{S_N}; \quad (n_y)_N = \frac{S_N^y}{S_N}; \quad (n_z)_N = \frac{S_N^z}{S_N}.$$

Для южной грани ячейки находим

$$\begin{aligned} S_s^x &= \frac{1}{2}[(y_5 - y_4)(z_8 - z_1) - (y_8 - y_1)(z_5 - z_4)]; \\ S_s^y &= \frac{1}{2}[(z_5 - z_4)(x_8 - x_1) - (z_8 - z_1)(x_5 - x_4)]; \\ S_s^z &= \frac{1}{2}[(x_5 - x_4)(y_8 - y_1) - (x_8 - x_1)(y_5 - y_4)]; \\ S_s &= \sqrt{(S_s^x)^2 + (S_s^y)^2 + (S_s^z)^2}; \\ (n_x)_s &= \frac{S_s^x}{S_s}; \quad (n_y)_s = \frac{S_s^y}{S_s}; \quad (n_z)_s = \frac{S_s^z}{S_s}. \end{aligned}$$

Здесь вектор единичной нормали к поверхности направлен внутрь ячейки (внутренняя нормаль). Для получения внешней нормали следует поменять знак всех компонент единичного вектора.

Для нахождения геометрических характеристик верхней грани аппроксимируем соотношения

$$S_{a3}^x = \frac{D(y, z)}{D(\alpha_1, \alpha_2)}; \quad S_{a3}^y = \frac{D(z, x)}{D(\alpha_1, \alpha_2)}; \quad S_{a3}^z = \frac{D(x, y)}{D(\alpha_1, \alpha_2)}.$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{S_T^x}{h_{a1} \cdot h_{a2}} &= S_{a3}^x + O((h_{a1})^2, (h_{a2})^2); \quad \frac{S_T^y}{h_{a1} \cdot h_{a2}} = S_{a3}^y + O((h_{a1})^2, (h_{a2})^2); \\ \frac{S_T^z}{h_{a1} \cdot h_{a2}} &= S_{a3}^z + O((h_{a1})^2, (h_{a2})^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_T^x &= \frac{1}{2}[(y_8 - y_6)(z_5 - z_7) - (y_5 - y_7)(z_8 - z_6)]; \\ S_T^y &= \frac{1}{2}[(z_8 - z_6)(x_5 - x_7) - (z_5 - z_7)(x_8 - x_6)]; \\ S_T^z &= \frac{1}{2}[(x_8 - x_6)(y_5 - y_7) - (x_5 - x_7)(y_8 - y_6)]. \end{aligned}$$

По проекциям площади верхней грани на координатные плоскости находим основные геометрические характеристики этой грани – площадь и компоненты внешней единичной нормали

$$\begin{aligned} S_T &= \sqrt{(S_T^x)^2 + (S_T^y)^2 + (S_T^z)^2}; \\ (n_x)_T &= \frac{S_T^x}{S_T}; \quad (n_y)_T = \frac{S_T^y}{S_T}; \quad (n_z)_T = \frac{S_T^z}{S_T}. \end{aligned}$$

Для нижней грани аналогично получаем:

$$S_b^x = \frac{1}{2}[(y_4 - y_2)(z_1 - z_3) - (y_1 - y_3)(z_4 - z_2)];$$

$$S_b^y = \frac{1}{2}[(z_4 - z_2)(x_1 - x_3) - (z_1 - z_3)(x_4 - x_2)];$$

$$S_b^z = \frac{1}{2}[(x_4 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_4 - y_2)];$$

$$S_b = \sqrt{(S_b^x)^2 + (S_b^y)^2 + (S_b^z)^2};$$

$$(n_x)_b = \frac{S_b^x}{S_b}; \quad (n_y)_b = \frac{S_b^y}{S_b}; \quad (n_z)_b = \frac{S_b^z}{S_b}.$$

При принятых обозначениях единичная нормаль к нижней границе является внутренней для данной расчетной ячейки.

8.2.2. Дивергентное симметризованное определение объема расчетной косоугольной шестигранной ячейки

В соответствии с геометрическим смыслом якобиана, объем расчетной ячейки Vol можно представить как

$$Vol = h_{a1} \cdot h_{a2} \cdot h_{a3} \cdot \langle J \rangle.$$

Для аппроксимации якобиана в этом выражении возьмем его дивергентное симметризованное определение (8.14). Все величины h_{a1}, h_{a2}, h_{a3} сократятся, и с точностью до величин второго порядка малости мы получим:

$$\begin{aligned} Vol = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \left[(\langle x \rangle_E \cdot S_E^x + \langle y \rangle_E \cdot S_E^y + \langle z \rangle_E \cdot S_E^z) - (\langle x \rangle_W \cdot S_W^x + \langle y \rangle_W \cdot S_W^y + \langle z \rangle_W \cdot S_W^z) \right] + \right. \\ \left. + \left[(\langle x \rangle_N \cdot S_N^x + \langle y \rangle_N \cdot S_N^y + \langle z \rangle_N \cdot S_N^z) - (\langle x \rangle_S \cdot S_S^x + \langle y \rangle_S \cdot S_S^y + \langle z \rangle_S \cdot S_S^z) \right] + \right. \\ \left. + \left[(\langle x \rangle_T \cdot S_T^x + \langle y \rangle_T \cdot S_T^y + \langle z \rangle_T \cdot S_T^z) - (\langle x \rangle_B \cdot S_B^x + \langle y \rangle_B \cdot S_B^y + \langle z \rangle_B \cdot S_B^z) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_E &= \frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_2 + x_6 + x_5); \quad \langle y \rangle_E = \frac{1}{4} \cdot (y_1 + y_2 + y_6 + y_5); \quad \langle z \rangle_E = \frac{1}{4} \cdot (z_1 + z_2 + z_6 + z_5); \\ \langle x \rangle_W &= \frac{1}{4} \cdot (x_4 + x_3 + x_7 + x_8); \quad \langle y \rangle_W = \frac{1}{4} \cdot (y_4 + y_3 + y_7 + y_8); \quad \langle z \rangle_W = \frac{1}{4} \cdot (z_4 + z_3 + z_7 + z_8); \\ \langle x \rangle_N &= \frac{1}{4} \cdot (x_2 + x_3 + x_7 + x_6); \quad \langle y \rangle_N = \frac{1}{4} \cdot (y_2 + y_3 + y_7 + y_6); \quad \langle z \rangle_N = \frac{1}{4} \cdot (z_2 + z_3 + z_7 + z_6); \\ \langle x \rangle_S &= \frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_5 + x_8 + x_4); \quad \langle y \rangle_S = \frac{1}{4} \cdot (y_1 + y_5 + y_8 + y_4); \quad \langle z \rangle_S = \frac{1}{4} \cdot (z_1 + z_5 + z_8 + z_4); \\ \langle x \rangle_T &= \frac{1}{4} \cdot (x_6 + x_5 + x_8 + x_7); \quad \langle y \rangle_T = \frac{1}{4} \cdot (y_6 + y_5 + y_8 + y_7); \quad \langle z \rangle_T = \frac{1}{4} \cdot (z_6 + z_5 + z_8 + z_7); \\ \langle x \rangle_B &= \frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4); \quad \langle y \rangle_B = \frac{1}{4} \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4); \quad \langle z \rangle_B = \frac{1}{4} \cdot (z_1 + z_2 + z_3 + z_4). \end{aligned}$$

8.2.3. Аппроксимация консервативного представления уравнения Эйлера в криволинейных координатах

Схема «КАБАРЕ» опирается как на консервативную форму записи основных уравнений, так и на их локально-характеристическое представление. В соответствии с этим, используется два типа переменных – консервативные переменные, отвечающие за законы сохранения, и так называемые потоковые переменные, определяющие конвективные потоки основных величин через грани расчетных ячеек. В соответствии с этим, консервативные переменные относятся к центрам пространственных ячеек, потоковые – к серединам их граней. Хотя понятия «центров» граней и ячеек для косоугольных гексаэдров в декартовых координатах могут быть определены по-разному, в опорных переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ их положения вполне однозначно. Итак, к центрам ячеек будем относить сеточные функции $\rho_c, u_{1,c}, u_{2,c}, u_{3,c}, E_c$, т. е. плотность, три компоненты скорости и полную удельную энергию. К серединам граней отнесем потоковые величины плотности, трех компонент скоростей и давление, которые будем обозначать $\rho_\Sigma, u_{1,\Sigma}, u_{2,\Sigma}, u_{3,\Sigma}, p_\Sigma$, где индекс Σ может принимать значения E, W, N, S, T, B , т. е. буквенных обозначений граней ячейки.

При формальной аппроксимации дивергентных дифференциальных уравнений все шаги по опорной сетке (h_{21}, h_{22}, h_{23}) сокращаются, и получается такой же результат, как в методе конечных объемов.

Схему «КАБАРЕ» можно представить в виде трех основных вычислительных блоков. В первом блоке вычисляются консервативные переменные на половинном временном слое по явным дивергентным формулам первого порядка точности по времени и второго по пространству. Второй вычислительный блок отвечает за вычисление потоковых переменных на новом временном слое. И, наконец, третий блок находит консервативные переменные на новом временном слое, опираясь на консервативные переменные на половинном временном слое и потоковые – на новом слое. Выпишем консервативные разностные схемы первого блока.

8.2.4. Первый блок разностных уравнений схемы «КАБАРЕ»

Уравнение неразрывности

$$\begin{aligned} Vol \cdot \frac{\rho_c^{n+1/2} - \rho_c^n}{\tau/2} + \left[(S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_E^n - (S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_W^n \right] + \left[(S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_N^n - (S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_S^n \right] + \\ + \left[(S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_T^n - (S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_B^n \right] = 0, \end{aligned} \quad (8.69)$$

где $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_\Sigma = (u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3)_\Sigma$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор нормали к грани Σ , S – площадь грани Σ .

Уравнение сохранения компоненты импульса в направлении X

$$\begin{aligned}
& Vol \cdot \frac{(\rho \cdot u_1)_C^{n+1/2} - (\rho \cdot u_1)_C^n}{\tau/2} + \left[(S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_E^n - (S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_W^n \right] + \\
& + \left[(S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_N^n - (S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_S^n \right] + \\
& + \left[(S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_T^n - (S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_B^n \right] = - \left[(S \cdot \mathbf{n}_x \cdot p)_E^n - (S \cdot \mathbf{n}_x \cdot p)_W^n \right] - \\
& - \left[(S \cdot \mathbf{n}_x \cdot p)_N^n - (S \cdot \mathbf{n}_x \cdot p)_S^n \right] - \left[(S \cdot \mathbf{n}_x \cdot p)_T^n - (S \cdot \mathbf{n}_x \cdot p)_B^n \right].
\end{aligned} \tag{8.70}$$

Уравнение сохранения компоненты импульса в направлении Y

$$\begin{aligned}
& Vol \cdot \frac{(\rho \cdot u_2)_C^{n+1/2} - (\rho \cdot u_2)_C^n}{\tau/2} + \left[(S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_E^n - (S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_W^n \right] + \\
& + \left[(S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_N^n - (S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_S^n \right] + \\
& + \left[(S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_T^n - (S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_B^n \right] = - \left[(S \cdot \mathbf{n}_y \cdot p)_E^n - (S \cdot \mathbf{n}_y \cdot p)_W^n \right] - \\
& - \left[(S \cdot \mathbf{n}_y \cdot p)_N^n - (S \cdot \mathbf{n}_y \cdot p)_S^n \right] - \left[(S \cdot \mathbf{n}_y \cdot p)_T^n - (S \cdot \mathbf{n}_y \cdot p)_B^n \right].
\end{aligned} \tag{8.71}$$

Уравнение сохранения компоненты импульса в направлении Z

$$\begin{aligned}
& Vol \cdot \frac{(\rho \cdot u_3)_C^{n+1/2} - (\rho \cdot u_3)_C^n}{\tau/2} + \left[(S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_E^n - (S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_W^n \right] + \\
& + \left[(S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_N^n - (S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_S^n \right] + \\
& + \left[(S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_T^n - (S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_B^n \right] = - \left[(S \cdot \mathbf{n}_z \cdot p)_E^n - (S \cdot \mathbf{n}_z \cdot p)_W^n \right] - \\
& - \left[(S \cdot \mathbf{n}_z \cdot p)_N^n - (S \cdot \mathbf{n}_z \cdot p)_S^n \right] - \left[(S \cdot \mathbf{n}_z \cdot p)_T^n - (S \cdot \mathbf{n}_z \cdot p)_B^n \right].
\end{aligned} \tag{8.72}$$

Уравнение сохранения полной энергии

$$\begin{aligned}
& Vol \cdot \frac{(\rho E)_C^{n+1/2} - (\rho E)_C^n}{\tau/2} + \left\{ \left[S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right]_E^n - \left[S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right]_W^n \right\} + \\
& + \left\{ \left[S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right]_N^n - \left[S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right]_S^n \right\} + \\
& + \left\{ \left[S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right]_T^n - \left[S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right]_B^n \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{8.73}$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (8.69)–(8.73) представляют собой сеточные законы сохранения соответствующих величин – они записаны в дивергентной форме и напрямую следуют из их дифференциальных аналогов при покомпонентной аппроксимации всех членов. При существовании достаточно гладкого локального отображения, переводящего исходный параллелепипед в пространстве опорных переменных (рис. 8.2) в косоугольную гексагональную расчетную ячейку, все эти уравнения (дискретные законы сохранения) обладают вторым порядком аппроксимации по пространственным переменным и первым порядком по времени. Следует отметить, что конкретный вид локального отображения нам нигде не требуется – важен лишь сам факт его существования. Важно также отметить максимальную компактность вычислительных шаблонов всех этих разностных схем, локализованных в пределах одной пространственно-временной расчетной ячейки.

8.2.5. Второй блок разностных уравнений схемы «КАБАРЕ»

Основное отличие схемы «КАБАРЕ» от других вычислительных алгоритмов для уравнений газовой динамики сосредоточено в процедурах второго блока, существенно опирающихся на локально-характеристическое представление уравнений (8.56), (8.57), (8.59). Рассмотрим подробно локально-характеристическое уравнение (8.56) вдоль переменной α_1 . Все дальнейшее изложение будем иллюстрировать на двух примыкающих вдоль направления α_1 прямоугольных расчетных ячейках в пространстве опорных переменных (рис. 8.3). Здесь приняты следующие обозначения: S – внутренняя грань, перпендикулярная направлению переноса α_1 , WW и EE – левая и правая вертикальные грани соответственно, перпендикулярные направлению переноса; WN , WS , WT , WB – северная, южная, верхняя и нижняя грани левой ячейки; EN , ES , ET , EB – северная, южная, верхняя и нижняя грани правой ячейки; WC , EC – центры левой и правой ячеек. Будем считать, что на данный момент на всех гранях заданы компоненты скорости (u_1, u_2, u_3) , а также плотность и давление (ρ, p) .

Будем также считать, что на данный момент времени и в следующем временном слое, отстоящем от текущего на половину расчетного шага $\tau_n/2$, заданы декартовы компоненты скорости

$$\begin{aligned} & (u_1)_{EC}^n, (u_2)_{EC}^n, (u_3)_{EC}^n, (u_1)_{EC}^{n+1/2}, (u_2)_{EC}^{n+1/2}, (u_3)_{EC}^{n+1/2}, \\ & (u_1)_{WC}^n, (u_2)_{WC}^n, (u_3)_{WC}^n, (u_1)_{WC}^{n+1/2}, (u_2)_{WC}^{n+1/2}, (u_3)_{WC}^{n+1/2}, \end{aligned}$$

плотность и полная удельная энергия: $\rho_{WC}^n, \rho_{WC}^{n+1/2}, \rho_{EC}^n, \rho_{EC}^{n+1/2}, E_{WC}^n, E_{WC}^{n+1/2}, E_{EC}^n, E_{EC}^{n+1/2}$.

Напомним, что величины на полуцелом временном слое вычисляются на первом этапе описываемого алгоритма.

8.2.5.1. Дискретизация геометрических факторов

В локально-характеристическое разложение уравнений газовой динамики (8.56), (8.58), (8.59) входят контравариантные представления скоростей, в то время как в консервативной (дивергентной) части алгоритма используются их обычные, декартовы

представления. Прежде всего, установим связь между этими представлениями с учетом дискретного характера отображений, определяемого расчетной сеткой.

Для потоковых контравариантных скоростей, нормальных к граням расчетной ячейки (рис. 8.2), получаем:

$$\begin{aligned}(u^{a1})_E &= \frac{1}{S_E} \cdot [S^x \cdot u_1 + S^y \cdot u_2 + S^z \cdot u_3]_E; & (u^{a1})_W &= \frac{1}{S_W} \cdot [S^x \cdot u_1 + S^y \cdot u_2 + S^z \cdot u_3]_W; \\(u^{a2})_N &= \frac{1}{S_N} \cdot [S^x \cdot u_1 + S^y \cdot u_2 + S^z \cdot u_3]_N; & (u^{a2})_S &= \frac{1}{S_S} \cdot [S^x \cdot u_1 + S^y \cdot u_2 + S^z \cdot u_3]_S; \\(u^{a3})_T &= \frac{1}{S_T} \cdot [S^x \cdot u_1 + S^y \cdot u_2 + S^z \cdot u_3]_T; & (u^{a3})_B &= \frac{1}{S_B} \cdot [S^x \cdot u_1 + S^y \cdot u_2 + S^z \cdot u_3]_B.\end{aligned}\quad (8.74)$$

Касательные к этим граням контравариантные компоненты будут выглядеть заметно сложнее:

$$\begin{aligned}(u^{a2})_E &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_N^x}{S_N} + \frac{S_S^y}{S_S} \right) \cdot (u_1)_E + \left(\frac{S_N^y}{S_N} + \frac{S_S^x}{S_S} \right) \cdot (u_2)_E + \left(\frac{S_N^z}{S_N} + \frac{S_S^z}{S_S} \right) \cdot (u_3)_E \right]; \\(u^{a3})_E &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_T^x}{S_T} + \frac{S_B^x}{S_B} \right) \cdot (u_1)_E + \left(\frac{S_T^y}{S_T} + \frac{S_B^y}{S_B} \right) \cdot (u_2)_E + \left(\frac{S_T^z}{S_T} + \frac{S_B^z}{S_B} \right) \cdot (u_3)_E \right];\end{aligned}\quad (8.75)$$

$$\begin{aligned}(u^{a2})_W &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_N^x}{S_N} + \frac{S_S^x}{S_S} \right) \cdot (u_1)_W + \left(\frac{S_N^y}{S_N} + \frac{S_S^y}{S_S} \right) \cdot (u_2)_W + \left(\frac{S_N^z}{S_N} + \frac{S_S^z}{S_S} \right) \cdot (u_3)_W \right]; \\(u^{a3})_W &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_T^x}{S_T} + \frac{S_B^x}{S_B} \right) \cdot (u_1)_W + \left(\frac{S_T^y}{S_T} + \frac{S_B^y}{S_B} \right) \cdot (u_2)_W + \left(\frac{S_T^z}{S_T} + \frac{S_B^z}{S_B} \right) \cdot (u_3)_W \right].\end{aligned}\quad (8.76)$$

Для северной и южной граней неортогональные контравариантные компоненты потоковых скоростей будут иметь вид:

$$\begin{aligned}(u^{a1})_N &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_E^x}{S_E} + \frac{S_W^y}{S_W} \right) \cdot (u_1)_N + \left(\frac{S_E^y}{S_E} + \frac{S_W^x}{S_W} \right) \cdot (u_2)_N + \left(\frac{S_E^z}{S_E} + \frac{S_W^z}{S_W} \right) \cdot (u_3)_N \right]; \\(u^{a3})_N &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_T^x}{S_T} + \frac{S_B^x}{S_B} \right) \cdot (u_1)_N + \left(\frac{S_T^y}{S_T} + \frac{S_B^y}{S_B} \right) \cdot (u_2)_N + \left(\frac{S_T^z}{S_T} + \frac{S_B^z}{S_B} \right) \cdot (u_3)_N \right];\end{aligned}\quad (8.77)$$

$$\begin{aligned}(u^{a1})_S &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_E^x}{S_E} + \frac{S_W^x}{S_W} \right) \cdot (u_1)_S + \left(\frac{S_E^y}{S_E} + \frac{S_W^y}{S_W} \right) \cdot (u_2)_S + \left(\frac{S_E^z}{S_E} + \frac{S_W^z}{S_W} \right) \cdot (u_3)_S \right]; \\(u^{a3})_S &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_T^x}{S_T} + \frac{S_B^x}{S_B} \right) \cdot (u_1)_S + \left(\frac{S_T^y}{S_T} + \frac{S_B^y}{S_B} \right) \cdot (u_2)_S + \left(\frac{S_T^z}{S_T} + \frac{S_B^z}{S_B} \right) \cdot (u_3)_S \right].\end{aligned}\quad (8.78)$$

Для верхней и нижней граней соответственно находим:

$$\begin{aligned}(u^{a1})_T &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_E^x}{S_E} + \frac{S_W^x}{S_W} \right) \cdot (u_1)_T + \left(\frac{S_E^y}{S_E} + \frac{S_W^y}{S_W} \right) \cdot (u_2)_T + \left(\frac{S_E^z}{S_E} + \frac{S_W^z}{S_W} \right) \cdot (u_3)_T \right]; \\ (u^{a2})_T &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_N^x}{S_N} + \frac{S_S^x}{S_S} \right) \cdot (u_1)_T + \left(\frac{S_N^y}{S_N} + \frac{S_S^y}{S_S} \right) \cdot (u_2)_T + \left(\frac{S_N^z}{S_N} + \frac{S_S^z}{S_S} \right) \cdot (u_3)_T \right];\end{aligned}\quad (8.79)$$

$$\begin{aligned}(u^{a1})_B &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_E^x}{S_E} + \frac{S_W^x}{S_W} \right) \cdot (u_1)_B + \left(\frac{S_E^y}{S_E} + \frac{S_W^y}{S_W} \right) \cdot (u_2)_B + \left(\frac{S_E^z}{S_E} + \frac{S_W^z}{S_W} \right) \cdot (u_3)_B \right]; \\ (u^{a2})_B &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_N^x}{S_N} + \frac{S_S^x}{S_S} \right) \cdot (u_1)_B + \left(\frac{S_N^y}{S_N} + \frac{S_S^y}{S_S} \right) \cdot (u_2)_B + \left(\frac{S_N^z}{S_N} + \frac{S_S^z}{S_S} \right) \cdot (u_3)_B \right].\end{aligned}\quad (8.80)$$

Для консервативных компонент, относящихся к центру ячейки, получаем:

$$\begin{aligned}(u^{a1})_C &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_E^x}{S_E} + \frac{S_W^x}{S_W} \right) \cdot (u_1)_C + \left(\frac{S_E^y}{S_E} + \frac{S_W^y}{S_W} \right) \cdot (u_2)_C + \left(\frac{S_E^z}{S_E} + \frac{S_W^z}{S_W} \right) \cdot (u_3)_C \right]; \\ (u^{a2})_C &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_N^x}{S_N} + \frac{S_S^x}{S_S} \right) \cdot (u_1)_C + \left(\frac{S_N^y}{S_N} + \frac{S_S^y}{S_S} \right) \cdot (u_2)_C + \left(\frac{S_N^z}{S_N} + \frac{S_S^z}{S_S} \right) \cdot (u_3)_C \right]; \\ (u^{a3})_C &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{S_T^x}{S_T} + \frac{S_B^x}{S_B} \right) \cdot (u_1)_C + \left(\frac{S_T^y}{S_T} + \frac{S_B^y}{S_B} \right) \cdot (u_2)_C + \left(\frac{S_T^z}{S_T} + \frac{S_B^z}{S_B} \right) \cdot (u_3)_C \right].\end{aligned}$$

Таким образом, для каждой грани и центра ячейки получаем соотношения вида

$$\begin{aligned}(u^{a1})_\Sigma &= (G_{11})_\Sigma \cdot (u_1)_\Sigma + (G_{12})_\Sigma \cdot (u_2)_\Sigma + (G_{13})_\Sigma \cdot (u_3)_\Sigma; \\ (u^{a2})_\Sigma &= (G_{21})_\Sigma \cdot (u_1)_\Sigma + (G_{22})_\Sigma \cdot (u_2)_\Sigma + (G_{23})_\Sigma \cdot (u_3)_\Sigma; \\ (u^{a3})_\Sigma &= (G_{31})_\Sigma \cdot (u_1)_\Sigma + (G_{32})_\Sigma \cdot (u_2)_\Sigma + (G_{33})_\Sigma \cdot (u_3)_\Sigma,\end{aligned}\quad (8.81)$$

где Σ принимает значения E, W, N, S, T, B, C .

Следует обратить внимание на то, что у каждой грани будут одинаковыми только нормальные контравариантные компоненты. Оставшиеся две компоненты могут различаться в зависимости от того, со стороны которой из прилегающих к этой грани ячеек они вычисляются. Далее, разрешая системы (8.81) относительно $(G_{ij})_\Sigma$, можно вычислить геометрические параметры:

$$\begin{aligned}
\Theta_E^1 &= [S_E^x \cdot (G_{11})_E + S_E^y \cdot (G_{21})_E + S_E^z \cdot (G_{31})_E]; \\
\Theta_E^2 &= [S_E^x \cdot (G_{12})_E + S_E^y \cdot (G_{22})_E + S_E^z \cdot (G_{32})_E]; \\
\Theta_E^3 &= [S_E^x \cdot (G_{13})_E + S_E^y \cdot (G_{23})_E + S_E^z \cdot (G_{33})_E].
\end{aligned} \tag{8.82}$$

8.2.5.2. Определение локальных римановых инвариантов

Пусть все уравнения одномерной системы (8.56) справедливы во всех точках левой расчетной ячейки. Все геометрические параметры этих уравнений будем считать для данной ячейки постоянными и аппроксимируем их в центре левой расчетной ячейки со вторым порядком следующим образом:

$$\sqrt{\frac{\Theta_{a1}^1}{|S_{a1}|}} = \sqrt{\frac{\langle \Theta_{a1}^1 \rangle_C}{\langle |S_{a1}| \rangle_C}} + O(h_{a1}^2, h_{a2}^2, h_{a3}^2), \tag{8.83}$$

где

$$\begin{aligned}
\langle |S_{a1}| \rangle_C &= \frac{1}{2 \cdot h_{a2} \cdot h_{a3}} \cdot [|S|_E + |S|_W]; \\
\langle \Theta_{a1}^1 \rangle_C &= \frac{1}{2 \cdot h_{a2} \cdot h_{a3}} \cdot \{ [S_E^x \cdot (G_{11})_E + S_W^x \cdot (G_{11})_W] + \\
&+ [S_E^y \cdot (G_{21})_E + S_W^y \cdot (G_{21})_W] + [S_E^z \cdot (G_{31})_E + S_W^z \cdot (G_{31})_W] \}.
\end{aligned} \tag{8.84}$$

Окончательно получаем

$$\sqrt{\frac{\Theta_{a1}^1}{|S_{a1}|}} \cong L_1 = \sqrt{\frac{(\Theta_{a1}^1)_C}{[|S|_E + |S|_W]}},$$

где

$$\begin{aligned}
(\Theta_{a1}^1)_C &= \{ [S_E^x \cdot (G_{11})_E + S_W^x \cdot (G_{11})_W] + \\
&+ [S_E^y \cdot (G_{21})_E + S_W^y \cdot (G_{21})_W] + [S_E^z \cdot (G_{31})_E + S_W^z \cdot (G_{31})_W] \}.
\end{aligned} \tag{8.85}$$

Кроме того, для аппроксимации характеристической формы необходимо аппроксимировать геометрические факторы $\Theta_{a1}^2, \Theta_{a1}^3$. По аналогии с (8.84) можно записать:

$$\begin{aligned}
\langle \Theta_{a1}^2 \rangle_C &= \frac{1}{2 \cdot h_{a2} \cdot h_{a3}} \cdot \{ [S_E^x \cdot (G_{12})_E + S_W^x \cdot (G_{12})_W] + \\
&+ [S_E^y \cdot (G_{22})_E + S_W^y \cdot (G_{22})_W] + [S_E^z \cdot (G_{32})_E + S_W^z \cdot (G_{32})_W] \}; \\
\langle \Theta_{a1}^3 \rangle_C &= \frac{1}{2 \cdot h_{a2} \cdot h_{a3}} \cdot \{ [S_E^x \cdot (G_{13})_E + S_W^x \cdot (G_{13})_W] + \\
&+ [S_E^y \cdot (G_{23})_E + S_W^y \cdot (G_{23})_W] + [S_E^z \cdot (G_{33})_E + S_W^z \cdot (G_{33})_W] \}.
\end{aligned} \tag{8.86}$$

Последние выражения также аппроксимируются со вторым порядком относительно шагов сетки в опорных переменных h_{a2}, h_{a3} .

Аппроксимация со вторым порядком в центре расчетной ячейки характеристических чисел $\lambda_1^A, \lambda_2^A, \lambda_3^A$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1^A \rangle &= \Lambda_1^A = \frac{1}{2}(|S_E| + |S_W|)(u^{a1})_C + \frac{1}{2}(c)_C \sqrt{(|S_E| + |S_W|) \cdot (\Theta_{a1}^1)_C}; \\ \langle \lambda_2^A \rangle &= \Lambda_2^A = \frac{1}{2}(|S_E| + |S_W|)(u^{a1})_C - \frac{1}{2}(c)_C \sqrt{(|S_E| + |S_W|) \cdot (\Theta_{a1}^1)_C}; \\ \langle \lambda_3^A \rangle &= \langle \lambda_4^A \rangle = \langle \lambda_5^A \rangle = \Lambda_3^A = \Lambda_4^A = \Lambda_5^A = \frac{1}{2}(|S_E| + |S_W|)(u^{a1})_C.\end{aligned}\quad (8.87)$$

Введем также обозначения:

$$\begin{aligned}(\Theta_{a1}^2)_C &= \left\{ [S_E^x \cdot (G_{12})_E + S_W^x \cdot (G_{12})_W] + [S_E^y \cdot (G_{22})_E + S_W^y \cdot (G_{22})_W] + \right. \\ &\quad \left. + [S_E^z \cdot (G_{32})_E + S_W^z \cdot (G_{32})_W] \right\}; \\ (\Theta_{a1}^3)_C &= \left\{ [S_E^x \cdot (G_{13})_E + S_W^x \cdot (G_{13})_W] + [S_E^y \cdot (G_{23})_E + S_W^y \cdot (G_{23})_W] + \right. \\ &\quad \left. + [S_E^z \cdot (G_{33})_E + S_W^z \cdot (G_{33})_W] \right\}.\end{aligned}\quad (8.88)$$

С учетом всех этих обозначений характеристическую форму (8.56) в пределах одной расчетной ячейки можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial t} + \frac{L_1}{\rho c} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\Lambda_1^A}{Vol} \cdot \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} + \frac{L_1}{\rho c} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} \right) &= \frac{(F_A)_1}{Vol}; \\ \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial t} - \frac{L_1}{\rho c} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\Lambda_2^A}{Vol} \cdot \left(\frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} - \frac{L_1}{\rho c} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} \right) &= \frac{(F_A)_2}{Vol}; \\ \left[\frac{\partial u^{a2}}{\partial t} - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_C \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial t} \right] + \frac{\Lambda_3^A}{Vol} \cdot \left[\frac{\partial u^{a2}}{\partial \alpha_1} - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_C \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} \right] &= \frac{(F_A)_3}{Vol}; \\ \left[\frac{\partial u^{a3}}{\partial t} - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_C \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial t} \right] + \frac{\Lambda_4^A}{Vol} \cdot \left[\frac{\partial u^{a3}}{\partial \alpha_1} - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_C \cdot \frac{\partial u^{a1}}{\partial \alpha_1} \right] &= \frac{(F_A)_4}{Vol}; \\ \left(\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{\Lambda_5^A}{Vol} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} - c^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} \right) &= \frac{(F_A)_5}{Vol}.\end{aligned}\quad (8.89)$$

Будем также считать в ячейке в течение одного шага по времени энтропию постоянной и равной ее значению в центре ячейки на половинном временном шаге. Энтропию определим обычным образом, предполагая справедливость уравнения состояния для идеального газа

$$p = (\gamma - 1) \rho e. \quad (8.90)$$

Тогда

$$(s)_c = \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)_c \Rightarrow \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = A = \text{const.}$$

Учитывая, что $\rho c = \sqrt{\gamma p \rho} = \sqrt{\gamma p \left(\frac{p}{A} \right)^\frac{1}{\gamma}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{(A)^\frac{1}{2\gamma}} \cdot (p)^\frac{\gamma+1}{2\gamma}$, можно показать, что

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} = G_c^A \cdot \frac{\partial p^\mu}{\partial t}; \quad G_c^A = \frac{2\sqrt{\gamma} \cdot (A)^\frac{1}{2\gamma} L_1}{\gamma - 1}; \quad \mu = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}. \quad (8.91)$$

В этом случае систему уравнений (8.89) можно записать как систему переноса локальных инвариантов $R_1^A, R_2^A, R_3^A, R_4^A, R_5^A$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1^A}{\partial t} + \frac{\Lambda_1^A}{Vol} \cdot h_{a1} \cdot \frac{\partial R_1^A}{\partial \alpha_1} &= \frac{(F_A)_1}{Vol}; & \frac{\partial R_2^A}{\partial t} + \frac{\Lambda_2^A}{Vol} \cdot h_{a1} \cdot \frac{\partial R_2^A}{\partial \alpha_1} &= \frac{(F_A)_2}{Vol}; \\ \frac{\partial R_3^A}{\partial t} + \frac{\Lambda_3^A}{Vol} \cdot h_{a1} \cdot \frac{\partial R_3^A}{\partial \alpha_1} &= \frac{(F_A)_3}{Vol}; & \frac{\partial R_4^A}{\partial t} + \frac{\Lambda_4^A}{Vol} \cdot h_{a1} \cdot \frac{\partial R_4^A}{\partial \alpha_1} &= \frac{(F_A)_4}{Vol}; \\ \frac{\partial R_5^A}{\partial t} + \frac{\Lambda_5^A}{Vol} \cdot h_{a1} \cdot \frac{\partial R_5^A}{\partial \alpha_1} &= \frac{(F_A)_5}{Vol}, \end{aligned} \quad (8.92)$$

где локальные инварианты определяются выражениями:

$$\begin{aligned} R_1^A &= u^{a1} + G_c^A \cdot p^\mu; & R_2^A &= u^{a1} - G_c^A \cdot p^\mu; \\ R_3^A &= u^{a2} - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_c \cdot u^{a1}; & R_4^A &= u^{a3} - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_c \cdot u^{a1}; \\ R_5^A &= \ln \frac{p}{\rho^\gamma}. \end{aligned} \quad (8.93)$$

Выпишем дискретные характеристические формы и локальные инварианты для двух других опорных направлений. Для направления α_2 введем обозначения

$$\sqrt{\frac{\Theta_{a2}^2}{|S_{a2}|}} \cong L_2 = \sqrt{\frac{(\Theta_{a2}^2)_c}{[|S_N| + |S_S|]}}; \quad (8.94)$$

$$\begin{aligned}
(\Theta_{a2}^1)_C &= \left\{ [S_N^x \cdot (G_{11})_N + S_S^x \cdot (G_{11})_S] + [S_N^y \cdot (G_{21})_N + S_S^y \cdot (G_{21})_S] + \right. \\
&\quad \left. + [S_N^z \cdot (G_{31})_N + S_S^z \cdot (G_{31})_S] \right\}; \\
(\Theta_{a2}^2)_C &= \left\{ [S_N^x \cdot (G_{12})_N + S_S^x \cdot (G_{12})_S] + [S_N^y \cdot (G_{22})_N + S_S^y \cdot (G_{22})_S] + \right. \\
&\quad \left. + [S_N^z \cdot (G_{32})_N + S_S^z \cdot (G_{32})_S] \right\}; \\
(\Theta_{a2}^3)_C &= \left\{ [S_N^x \cdot (G_{13})_N + S_S^x \cdot (G_{13})_S] + [S_N^y \cdot (G_{23})_N + S_S^y \cdot (G_{23})_S] + \right. \\
&\quad \left. + [S_N^z \cdot (G_{33})_N + S_S^z \cdot (G_{33})_S] \right\};
\end{aligned} \tag{8.95}$$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1^B \rangle &= \Lambda_1^B = \frac{1}{2}(|S_N| + |S_S|)(u^{a2})_C + \frac{1}{2}(c)_C \sqrt{(|S_N| + |S_S|) \cdot (\Theta_{a2}^2)_C}; \\
\langle \lambda_2^B \rangle &= \Lambda_2^B = \frac{1}{2}(|S_N| + |S_S|)(u^{a2})_C - \frac{1}{2}(c)_C \sqrt{(|S_N| + |S_S|) \cdot (\Theta_{a2}^2)_C}; \\
\langle \lambda_3^B \rangle &= \langle \lambda_4^B \rangle = \langle \lambda_5^B \rangle = \Lambda_3^B = \Lambda_4^B = \Lambda_5^B = \frac{1}{2}(|S_N| + |S_S|)(u^{a2})_C;
\end{aligned} \tag{8.96}$$

$$G_C^B = \frac{2\sqrt{\gamma} \cdot (A)^{\frac{1}{2\gamma}} L_2}{\gamma - 1}, \tag{8.97}$$

с использованием которых локальная характеристическая система (8.58) приводится к виду уравнений переноса локальных римановых инвариантов:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1^B}{\partial t} + \frac{\Lambda_1^B}{Vol} \cdot h_{a2} \cdot \frac{\partial R_1^B}{\partial \alpha_2} &= \frac{(F_B)_1}{Vol}; \quad \frac{\partial R_2^B}{\partial t} + \frac{\Lambda_2^B}{Vol} \cdot h_{a2} \cdot \frac{\partial R_2^B}{\partial \alpha_2} = \frac{(F_B)_2}{Vol}; \\
\frac{\partial R_3^B}{\partial t} + \frac{\Lambda_3^B}{Vol} \cdot h_{a2} \cdot \frac{\partial R_3^B}{\partial \alpha_2} &= \frac{(F_B)_3}{Vol}; \quad \frac{\partial R_4^B}{\partial t} + \frac{\Lambda_4^B}{Vol} \cdot h_{a2} \cdot \frac{\partial R_4^B}{\partial \alpha_2} = \frac{(F_B)_4}{Vol}; \\
\frac{\partial R_5^B}{\partial t} + \frac{\Lambda_5^B}{Vol} \cdot h_{a2} \cdot \frac{\partial R_5^B}{\partial \alpha_2} &= \frac{(F_B)_5}{Vol},
\end{aligned} \tag{8.98}$$

где

$$\begin{aligned}
R_1^B &= u^{a2} + G_C^B \cdot p^\mu; & R_2^B &= u^{a2} - G_C^B \cdot p^\mu; \\
R_3^B &= u^{a2} - \left(\frac{\Theta_{a2}^2}{\Theta_{a2}^1} \right)_C \cdot u^{a1}; & R_4^B &= u^{a3} - \left(\frac{\Theta_{a2}^3}{\Theta_{a2}^1} \right)_C \cdot u^{a1}; \\
R_5^B &= \ln \frac{p}{\rho^\gamma}.
\end{aligned} \tag{8.99}$$

Вдоль направления α_3 одномерная характеристическая система (8.59) при обозначениях

$$\sqrt{\frac{\Theta_{a3}^3}{|S_{a3}|}} \cong L_3 = \sqrt{\frac{(\Theta_{a3}^3)_C}{[|S_N| + |S_S|]}}; \tag{8.100}$$

$$\begin{aligned}
(\Theta_{a3}^1)_C &= \left\{ [S_T^x \cdot (G_{11})_T + S_B^x \cdot (G_{11})_B] + [S_T^y \cdot (G_{21})_T + S_B^y \cdot (G_{21})_B] + \right. \\
&\quad \left. + [S_T^z \cdot (G_{31})_T + S_B^z \cdot (G_{31})_B] \right\}; \\
(\Theta_{a3}^2)_C &= \left\{ [S_T^x \cdot (G_{12})_T + S_B^x \cdot (G_{12})_B] + [S_T^y \cdot (G_{22})_T + S_B^y \cdot (G_{22})_B] + \right. \\
&\quad \left. + [S_T^z \cdot (G_{32})_T + S_B^z \cdot (G_{32})_B] \right\}; \\
(\Theta_{a3}^3)_C &= \left\{ [S_T^x \cdot (G_{13})_T + S_B^x \cdot (G_{13})_B] + [S_T^y \cdot (G_{23})_T + S_B^y \cdot (G_{23})_B] + \right. \\
&\quad \left. + [S_T^z \cdot (G_{33})_T + S_B^z \cdot (G_{33})_B] \right\};
\end{aligned} \tag{8.101}$$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1^c \rangle &= \Lambda_1^c = \frac{1}{2} (|S_T| + |S_B|) (u^{a3})_C + \frac{1}{2} (c)_C \sqrt{(|S_T| + |S_B|) \cdot (\Theta_{a3}^3)_C}; \\
\langle \lambda_2^c \rangle &= \Lambda_2^c = \frac{1}{2} (|S_T| + |S_B|) (u^{a3})_C - \frac{1}{2} (c)_C \sqrt{(|S_T| + |S_B|) \cdot (\Theta_{a3}^3)_C}; \\
\langle \lambda_3^c \rangle &= \langle \lambda_4^c \rangle = \langle \lambda_5^c \rangle = \Lambda_3^c = \Lambda_4^c = \Lambda_5^c = \frac{1}{2} (|S_T| + |S_B|) (u^{a3})_C;
\end{aligned} \tag{8.102}$$

$$G_C^c = \frac{2\sqrt{\gamma} \cdot (A)^{\frac{1}{2\gamma}} L_3}{\gamma - 1} \tag{8.103}$$

сводится к системе уравнений для переноса локальных инвариантов в этом направлении

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1^c}{\partial t} + \frac{\Lambda_1^c}{Vol} \cdot h_{a3} \cdot \frac{\partial R_1^c}{\partial \alpha_3} &= \frac{(F_C)_1}{Vol}; \quad \frac{\partial R_2^c}{\partial t} + \frac{\Lambda_2^c}{Vol} \cdot h_{a3} \cdot \frac{\partial R_2^c}{\partial \alpha_3} = \frac{(F_C)_2}{Vol}; \\
\frac{\partial R_3^c}{\partial t} + \frac{\Lambda_3^c}{Vol} \cdot h_{a3} \cdot \frac{\partial R_3^c}{\partial \alpha_3} &= \frac{(F_C)_3}{Vol}; \quad \frac{\partial R_4^c}{\partial t} + \frac{\Lambda_4^c}{Vol} \cdot h_{a3} \cdot \frac{\partial R_4^c}{\partial \alpha_3} = \frac{(F_C)_4}{Vol}; \\
\frac{\partial R_5^c}{\partial t} + \frac{\Lambda_5^c}{Vol} \cdot h_{a3} \cdot \frac{\partial R_5^c}{\partial \alpha_3} &= \frac{(F_C)_5}{Vol}
\end{aligned} \tag{8.104}$$

Сами локальные инварианты при этом имеют вид

$$\begin{aligned}
R_1^c &= u^{a3} + G_C^c \cdot p^\mu; & R_2^c &= u^{a3} - G_C^c \cdot p^\mu; \\
R_3^c &= u^{a2} - \left(\frac{\Theta_{a3}^2}{\Theta_{a3}^1} \right)_C \cdot u^{a1}; & R_4^c &= u^{a3} - \left(\frac{\Theta_{a3}^3}{\Theta_{a3}^1} \right)_C \cdot u^{a1}; \\
R_5^c &= \ln \frac{p}{p^\gamma}.
\end{aligned} \tag{8.105}$$

8.2.5.3. Вычисление новых потоковых переменных на новом временном слое

Как уже отмечалось ранее, в консервативной части алгоритма в качестве как потоковых, так и консервативных переменных используются декартовы компоненты скоростей $(u_1)_x, (u_2)_x, (u_3)_x$. Вычисление новых потоковых переменных будет осу-

ществляться через локальные римановы инварианты, в определение которых входят контравариантные составляющие скорости. С каждой гранью ячейки связаны девять чисел $(G_{ij})_{\Sigma}; i, j = 1, 2, 3$, позволяющие переходить от декартовых компонент скорости к их контравариантным представлениям. Это компоненты матрицы G_{Σ} :

$$G_{\Sigma} = \begin{pmatrix} (G_{11})_{\Sigma} & (G_{12})_{\Sigma} & (G_{13})_{\Sigma} \\ (G_{21})_{\Sigma} & (G_{22})_{\Sigma} & (G_{23})_{\Sigma} \\ (G_{31})_{\Sigma} & (G_{32})_{\Sigma} & (G_{33})_{\Sigma} \end{pmatrix}. \quad (8.106)$$

Для перехода от контравариантных компонент к декартовым необходимо иметь компоненты обратных матриц G_{Σ}^{-1} :

$$G_{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} (Q_{11})_{\Sigma} & (Q_{12})_{\Sigma} & (Q_{13})_{\Sigma} \\ (Q_{21})_{\Sigma} & (Q_{22})_{\Sigma} & (Q_{23})_{\Sigma} \\ (Q_{31})_{\Sigma} & (Q_{32})_{\Sigma} & (Q_{33})_{\Sigma} \end{pmatrix}. \quad (8.107)$$

Будем считать, что все они вычислены заранее и известны для каждой грани. Это дает возможность сразу после первого, консервативного этапа, на котором происходит вычисление переменных на половинном по времени слое, вычислить величины локальных римановых инвариантов для всех граней и центральной точки расчетной ячейки. Сначала остановимся на первом локально-характеристическом представлении уравнений Эйлера (8.92), (8.93).

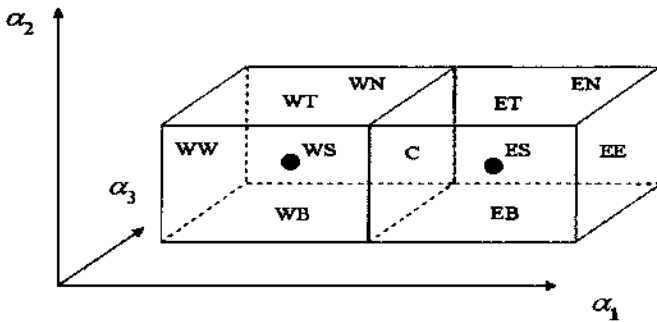


Рис. 8.3. Обозначения смежных граней ячеек

Далее будем использовать обозначения граней смежных ячеек, приведенные на рисунке 8.3.

Центр левой ячейки будем обозначать LC , центр правой ячейки – RC .

По известным значениям консервативных переменных на полуслое вычислим первые два характеристических числа для левой ячейки:

$$\begin{aligned}
(\Lambda_1^A)_{LC}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(|S_{\mathcal{W}\mathcal{W}}| + |S_C|)(u^{a1})_{LC}^{n+1/2} + \frac{1}{2}(c)_{LC}^{n+1/2} \sqrt{(|S_{\mathcal{W}\mathcal{W}}| + |S_C|) \cdot (\Theta_{a1}^1)_{LC}}; \\
(\Lambda_2^A)_{LC}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(|S_{\mathcal{W}\mathcal{W}}| + |S_C|)(u^{a1})_{LC}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(c)_{LC}^{n+1/2} \sqrt{(|S_{\mathcal{W}\mathcal{W}}| + |S_C|) \cdot (\Theta_{a1}^1)_{LC}},
\end{aligned} \quad (8.108)$$

и первые два характеристических числа для правой ячейки:

$$\begin{aligned}
(\Lambda_1^A)_{RC}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(|S_{\mathcal{E}\mathcal{E}}| + |S_C|)(u^{a1})_{RC}^{n+1/2} + \frac{1}{2}(c)_{RC}^{n+1/2} \sqrt{(|S_{\mathcal{E}\mathcal{E}}| + |S_C|) \cdot (\Theta_{a1}^1)_{RC}}; \\
(\Lambda_2^A)_{RC}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(|S_{\mathcal{E}\mathcal{E}}| + |S_C|)(u^{a1})_{RC}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(c)_{RC}^{n+1/2} \sqrt{(|S_{\mathcal{E}\mathcal{E}}| + |S_C|) \cdot (\Theta_{a1}^1)_{RC}}.
\end{aligned} \quad (8.109)$$

Эти собственные числа, согласно уравнениям (8.92), определяют в каждой ячейке направление переноса двух первых локальных инвариантов R_1^A и R_2^A .

Если $(\Lambda_1^A)_{LC}^{n+1/2} > 0$, то значение первого инварианта на левой стороне поверхности грани $\Sigma = C$ на новом временном слое можно вычислить из первого уравнения переноса системы (8.92) по его известным значениям в левой ячейке на текущем временном слое. Однако вместо того, чтобы проводить эти сложные вычисления, результат которых будет зависеть от выбора схемы аппроксимации этого уравнения, мы вычислим новое значение методом линейной экстраполяции:

$$(R_1^A)_{CL}^{n+1} = 2 \cdot (R_1^A)_{LC}^{n+1/2} - (R_1^A)_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^n. \quad (8.110)$$

Нижний индекс CL указывает на то, что первый инвариант на плоскости $\Sigma = C$ вычислен по параметрам левой ячейки.

Следует отметить, что направление экстраполяции совпадает с направлением переноса инварианта дифференциальным уравнением.

Таким образом, при заданном направлении переноса первого инварианта в левой ячейке нам потребуются значения этого инварианта в ряде точек, а именно:

$$(R_1^A)_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^n = (u^{a1})_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^n + G_{LC}^A \cdot (p^\mu)_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^n; \quad (R_1^A)_{LC}^{n+1/2} = (u^{a1})_{LC}^{n+1/2} + G_{LC}^A \cdot (p^\mu)_{LC}^{n+1/2}. \quad (8.111)$$

Кроме того, нам понадобятся еще два дополнительных значения этого инварианта для осуществления процедуры монотонизации на основе принципа максимума:

$$(R_1^A)_{CL}^n = (u^{a1})_C^n + G_{LC}^A \cdot (p^\mu)_C^n; \quad (R_1^A)_{LC}^n = (u^{a1})_{LC}^n + G_{LC}^A \cdot (p^\mu)_{LC}^n. \quad (8.112)$$

Для уравнения переноса первого локального инварианта должен выполняться принцип максимума, согласно которому: если соответствующая обратная характеристика, проходящая через пространственно-временную точку, соответствующую центру грани C на временном слое с номером $n+1$, пересекает отрезок, соединяющий

центры граней $\Sigma = C$ и $\Sigma = WW$ на временном слое с номером n , то новое значение инварианта должно удовлетворять неравенствам:

$$\begin{aligned}(R_1^A)_{CL}^{n+1} &\leq \max(R_1^A) = \max_{\alpha_1 \in l^*, j \in \alpha_1} (R_1^A) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{(F_A)_j}{Vol} dt; \\ (R_1^A)_{CL}^{n+1} &\geq \min(R_1^A) = \min_{\alpha_1 \in l^*, j \in \alpha_1} (R_1^A) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{(F_A)_j}{Vol} dt,\end{aligned}\quad (8.113)$$

где, как можно показать, l^* представляет собой отрезок, параллельный оси α_1 , полностью принадлежащий левой расчетной ячейке и проходящий как через центры плоскостей $\Sigma = C$ и $\Sigma = WW$, так и через центр левой ячейки LC . Новое значение инварианта $(R_1^A)_{CL}^{n+1}$, вычисленное по формуле линейной интерполяции, автоматически принципу максимума удовлетворять, вообще говоря, не будет. Аппроксимируем возможные пределы существования решения, следующие из дифференциального уравнения переноса, алгебраическими соотношениями, вычисляемыми на сеточном уровне:

$$\begin{aligned}\max(R_1^A) &= \max \left[(R_1^A)_{WW}^n, (R_1^A)_{LC}^n, (R_1^A)_{CL}^n \right] + q_1^A \cdot \tau_n; \\ \min(R_1^A) &= \min \left[(R_1^A)_{WW}^n, (R_1^A)_{LC}^n, (R_1^A)_{CL}^n \right] + q_1^A \cdot \tau_n,\end{aligned}\quad (8.114)$$

где член q_1^A , отвечающий правой части первого уравнения переноса системы (8.92), может быть достаточно точно оценен по аппроксимации левой части этого уравнения по вычисленным ранее значениям:

$$\frac{(R_1^A)_{LC}^{n+1/2} - (R_1^A)_{LC}^n}{\tau/2} + \frac{(\Lambda_1^A)_{LC}^{n+1/2}}{Vol} \cdot \left[(R_1^A)_{CL}^n - (R_1^A)_{WW}^n \right] = q_1^A. \quad (8.115)$$

Таким образом, чтобы подчинить полученное решение принципу максимума, необходимо произвести его коррекцию в соответствии со следующим алгоритмом:

$$(R_1^A)_{CL}^{n+1} = \begin{cases} (R_1^A)_{CL}^{n+1} & \text{if } \min(R_1^A) < (R_1^A)_{CL}^{n+1} < \max(R_1^A) \\ \min(R_1^A) & \text{if } (R_1^A)_{CL}^{n+1} \leq \min(R_1^A) \\ \max(R_1^A) & \text{if } (R_1^A)_{CL}^{n+1} \geq \max(R_1^A) \end{cases}. \quad (8.116)$$

Далее следует установить направление переноса в левой ячейке второго локального инварианта. Если $(\Lambda_2^A)_{LC}^{n+1/2} \geq 0$, то это также соответствует переносу этого инварианта в положительном направлении, что отвечает сверхзвуковому течению в ячейке. В этом случае для второго инварианта проводятся все те же операции, которые были описаны для первого инварианта. Вначале проводится линейная экстраполяция в направлении переноса:

$$(R_2^A)_{CL}^{n+1} = 2 \cdot (R_2^A)_{LC}^{n+1/2} - (R_2^A)_{WW}^n. \quad (8.117)$$

Для этого вычисляются локальные инварианты

$$(R_2^A)_{ww}^n = (u^{a1})_{ww}^n - G_{LC}^A \cdot (p^\mu)_{ww}^n; \quad (R_2^A)_{LC}^{n+1/2} = (u^{a1})_{LC}^{n+1/2} - G_{LC}^A \cdot (p^\mu)_{LC}^{n+1/2}$$

и необходимые для последующей нелинейной коррекции величины

$$(R_2^A)_{CL}^n = (u^{a1})_C^n - G_{LC}^A \cdot (p^\mu)_C^n; \quad (R_2^A)_{LC}^n = (u^{a1})_{LC}^n - G_{LC}^A \cdot (p^\mu)_{LC}^n.$$

Затем находятся пределы, в которых должно оставаться решение при аппроксимации принципа максимума:

$$\begin{aligned} \max(R_2^A) &= \max \left[(R_2^A)_{ww}^n, (R_2^A)_{LC}^n, (R_2^A)_{CL}^n \right] + q_2^A \cdot \tau_n; \\ \min(R_2^A) &= \min \left[(R_2^A)_{ww}^n, (R_2^A)_{LC}^n, (R_2^A)_{CL}^n \right] + q_2^A \cdot \tau_n, \end{aligned}$$

где интегральный член q_2^A оценивается из аппроксимации левой части второго уравнения системы (8.92) по уже вычисленным значениям вторых локальных интегральных инвариантов:

$$\frac{(R_2^A)_{LC}^{n+1/2} - (R_2^A)_{LC}^n}{\tau/2} + \frac{(\Lambda_2^A)_{LC}^{n+1/2}}{Vol} \cdot \left[(R_2^A)_{CL}^n - (R_2^A)_{ww}^n \right] = q_2^A.$$

Аналогично осуществляется и процедура нелинейной коррекции:

$$(R_2^A)_{CL}^{n+1} = \begin{cases} (R_2^A)_{CL}^{n+1} & \text{if } \min(R_2^A) < (R_2^A)_{CL}^{n+1} < \max(R_2^A) \\ \min(R_2^A) & \text{if } (R_2^A)_{CL}^{n+1} \leq \min(R_2^A) \\ \max(R_2^A) & \text{if } (R_2^A)_{CL}^{n+1} \geq \max(R_2^A) \end{cases}.$$

Вычисление новых значений первых двух локальных инвариантов, приходящих на грань $\Sigma = C$ со стороны правой ячейки, осуществляется аналогично. Вначале проверяются знаки соответствующих собственных чисел. Если $(\Lambda_1^A)_{RC}^{n+1/2} < 0$ и $(\Lambda_2^A)_{RC}^{n+1/2} < 0$, то проводится линейная экстраполяция по направлению переноса:

$$\begin{aligned} (R_1^A)_{CR}^{n+1} &= 2 \cdot (R_1^A)_{RC}^{n+1/2} - (R_1^A)_{EE}^n; \\ (R_2^A)_{CR}^{n+1} &= 2 \cdot (R_2^A)_{RC}^{n+1/2} - (R_2^A)_{EE}^n. \end{aligned}$$

Нижний индекс CR указывает на то, что соответствующие инварианты приходят со стороны правой ячейки.

Перед этим вычисляются необходимые для экстраполяции и последующей коррекции величины:

$$\begin{aligned} (R_1^A)_{EE}^n &= (u^{a1})_{EE}^n + G_{RC}^A \cdot (p^\mu)_{EE}^n; & (R_1^A)_{RC}^{n+1/2} &= (u^{a1})_{RC}^{n+1/2} + G_{RC}^A \cdot (p^\mu)_{RC}^{n+1/2}; \\ (R_1^A)_{CR}^n &= (u^{a1})_{CR}^n + G_{RC}^A \cdot (p^\mu)_{CR}^n; & (R_1^A)_{RC}^n &= (u^{a1})_{RC}^n + G_{RC}^A \cdot (p^\mu)_{RC}^n; \\ (R_2^A)_{EE}^n &= (u^{a1})_{EE}^n - G_{RC}^A \cdot (p^\mu)_{EE}^n; & (R_2^A)_{RC}^{n+1/2} &= (u^{a1})_{RC}^{n+1/2} - G_{RC}^A \cdot (p^\mu)_{RC}^{n+1/2}; \\ (R_2^A)_{CR}^n &= (u^{a1})_{CR}^n - G_{RC}^A \cdot (p^\mu)_{CR}^n; & (R_2^A)_{RC}^n &= (u^{a1})_{RC}^n - G_{RC}^A \cdot (p^\mu)_{RC}^n. \end{aligned}$$

Затем из принципа максимума находятся пределы, в которых должно оставаться решение:

$$\begin{aligned} \max(R_1^A) &= \max \left[(R_1^A)_{EE}^n, (R_1^A)_{RC}^n, (R_1^A)_{CR}^n \right] + q_1^A \cdot \tau_n; \\ \min(R_1^A) &= \min \left[(R_1^A)_{EE}^n, (R_1^A)_{RC}^n, (R_1^A)_{CR}^n \right] + q_1^A \cdot \tau_n; \\ \max(R_2^A) &= \max \left[(R_2^A)_{EE}^n, (R_2^A)_{RC}^n, (R_2^A)_{CR}^n \right] + q_2^A \cdot \tau_n; \\ \min(R_2^A) &= \min \left[(R_2^A)_{EE}^n, (R_2^A)_{RC}^n, (R_2^A)_{CR}^n \right] + q_2^A \cdot \tau_n. \end{aligned}$$

Коррекция для соответствия принципу максимума производится стандартным уже способом:

$$\begin{aligned} (R_1^A)_{CR}^{n+1} &= \begin{cases} (R_1^A)_{CR}^{n+1} & \text{if } \min(R_1^A) < (R_1^A)_{CR}^{n+1} < \max(R_1^A) \\ \min(R_1^A) & \text{if } (R_1^A)_{CR}^{n+1} \leq \min(R_1^A) \\ \max(R_1^A) & \text{if } (R_1^A)_{CR}^{n+1} \geq \max(R_1^A) \end{cases}; \\ (R_2^A)_{CR}^{n+1} &= \begin{cases} (R_2^A)_{CR}^{n+1} & \text{if } \min(R_2^A) < (R_2^A)_{CR}^{n+1} < \max(R_2^A) \\ \min(R_2^A) & \text{if } (R_2^A)_{CR}^{n+1} \leq \min(R_2^A) \\ \max(R_2^A) & \text{if } (R_2^A)_{CR}^{n+1} \geq \max(R_2^A) \end{cases}. \end{aligned}$$

Таким образом, после всех описанных операций на грани $\Sigma = C$ могут оказаться определенными четыре величины: $(R_1^A)_{CL}^{n+1}, (R_2^A)_{CL}^{n+1}, (R_1^A)_{CR}^{n+1}, (R_2^A)_{CR}^{n+1}$. Если какие-либо из этих величин не будут вычислены, будем считать, что они имеют значения **none**.

8.2.5.4. Дозвуковые течения

Характеристическая локально-одномерная декомпозиция уравнений Эйлера может быть представлена графически на плоскости (α, t) . Для двух первых характеристик и дозвуковых течений она будет выглядеть так (рис. 8.4):

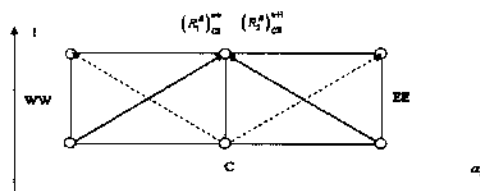


Рис. 8.4. Характеристическая локально-одномерная декомпозиция уравнений Эйлера для двух первых характеристик и дозвуковых течений. Кружки представляют середины соответствующих граней

Эту ситуацию удобно также представить и в табличном виде:

$(R_1^A)^{n+1}_{CL}$	$(R_2^A)^{n+1}_{CL}$	$(R_1^A)^{n+1}_{CR}$	$(R_2^A)^{n+1}_{CR}$
R_1^A	none	none	R_2^A

Здесь величины R_1^A и R_2^A представляют собой вычисленные ранее конкретные числовые значения величин $(R_1^A)^{n+1}_{CL}$ и $(R_2^A)^{n+1}_{CR}$ соответственно. Зная эти величины, можно составить систему из двух уравнений с двумя неизвестными $(u^{a1})^{n+1}_C$ и p^{n+1}_C :

$$\begin{aligned} (R_1^A)^{n+1}_{CL} &= (u^{a1})^{n+1}_C + G_{LC}^A \cdot (p^\mu)^{n+1}_C = R_1^A; \\ (R_2^A)^{n+1}_{CR} &= (u^{a1})^{n+1}_C - G_{RC}^A \cdot (p^\mu)^{n+1}_C = R_2^A, \end{aligned} \quad (8.118)$$

разрешая которую, находим:

$$p^{n+1}_C = \left(\frac{R_1^A - R_2^A}{G_{LC}^A + G_{RC}^A} \right)^{\frac{1}{\mu}}; \quad (u^{a1})^{n+1}_C = \frac{G_{RC}^A R_1^A + G_{LC}^A R_2^A}{G_{RC}^A + G_{LC}^A}. \quad (8.119)$$

Для нахождения трех других потоковых переменных вычислим оставшиеся локальные инварианты по описанной выше схеме с учетом того, из какой ячейки они приносятся. Индикатором для выбора ячейки является знак вычисленной только что потоковой скорости $(u^{a1})^{n+1}_C$. Если эта скорость больше нуля, то оставшиеся инварианты вычисляются по данным из левой ячейки, если меньше нуля – по данным из правой ячейки. Результат наглядно представлен в следующих таблицах (8.1–8.3).

Таблица 8.1.

$(u^{a1})_C^{n+1} \geq 0$	$(u^{a1})_C^{n+1} < 0$
Вычисляются значения локальных инвариантов в четырех точках левой ячейки: $(R_3^C)_{\text{nw}}^n = (u^{a2})_{\text{nw}}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{LC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{\text{nw}}^n;$ $(R_3^C)_{LC}^n = (u^{a2})_{LC}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{LC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{LC}^n;$ $(R_3^C)_{CL}^n = (u^{a2})_{CL}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{LC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{CL}^n;$ $(R_3^C)_{LC}^{n+1/2} = (u^{a2})_{LC}^{n+1/2} - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{LC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{LC}^{n+1/2}$	Вычисляются значения локальных инвариантов в четырех точках правой ячейки: $(R_3^C)_{EE}^n = (u^{a2})_{EE}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{RC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{EE}^n;$ $(R_3^C)_{RC}^n = (u^{a2})_{RC}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{RC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{RC}^n;$ $(R_3^C)_{CR}^n = (u^{a2})_{CR}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{RC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{CR}^n;$ $(R_3^C)_{RC}^{n+1/2} = (u^{a2})_{RC}^{n+1/2} - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{RC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{RC}^{n+1/2}$
Проводится линейная экстраполяция из левого нижнего угла в правый верхний: $(R_3^C)_{CL}^{n+1} = 2 \cdot (R_3^C)_{LC}^{n+1/2} - (R_3^C)_{\text{nw}}^n$	Проводится линейная экстраполяция из правого нижнего угла в левый верхний: $(R_3^C)_{CR}^{n+1} = 2 \cdot (R_3^C)_{RC}^{n+1/2} - (R_3^C)_{EE}^n$
Находятся пределы изменения локального инварианта, вытекающие из принципа максимума: $\max R_3^C = \max \left[(R_3^C)_{\text{nw}}^n, (R_3^C)_{LC}^n, (R_3^C)_{CL}^n \right] + q_3^A \cdot \tau;$ $\min R_3^C = \min \left[(R_3^C)_{\text{nw}}^n, (R_3^C)_{LC}^n, (R_3^C)_{CL}^n \right] + q_3^A \cdot \tau$	Находятся пределы изменения локального инварианта, вытекающие из принципа максимума: $\max R_3^C = \max \left[(R_3^C)_{EE}^n, (R_3^C)_{RC}^n, (R_3^C)_{CR}^n \right] + q_3^A \cdot \tau;$ $\min R_3^C = \min \left[(R_3^C)_{EE}^n, (R_3^C)_{RC}^n, (R_3^C)_{CR}^n \right] + q_3^A \cdot \tau$
Источники q_3^A вычисляются из простейшей аппроксимации уравнения переноса третьего инварианта: $\frac{(R_3^A)_{LC}^{n+1/2} - (R_3^A)_{LC}^n}{\tau/2} + \frac{(\Lambda_3^A)_{LC}^{n+1/2}}{Vol} \cdot \left[(R_3^A)_{CL}^n - (R_3^A)_{\text{nw}}^n \right] = q_3^A$	Источники q_3^A вычисляются из простейшей аппроксимации уравнения переноса третьего инварианта: $\frac{(R_3^A)_{RC}^{n+1/2} - (R_3^A)_{RC}^n}{\tau/2} + \frac{(\Lambda_3^A)_{RC}^{n+1/2}}{Vol} \cdot \left[(R_3^A)_{EE}^n - (R_3^A)_{CR}^n \right] = q_3^A$
Нелинейная коррекция осуществляется по формулам: $(R_3^A)_{CL}^{n+1} = \begin{cases} (R_3^A)_{CL}^{n+1} & \text{if } \min R_3^A < (R_3^A)_{CL}^{n+1} < \max R_3^A \\ \min R_3^A & \text{if } (R_3^A)_{CL}^{n+1} \leq \min R_3^A \\ \max R_3^A & \text{if } (R_3^A)_{CL}^{n+1} \geq \max R_3^A \end{cases}$	Нелинейная коррекция осуществляется по формулам: $(R_3^A)_{CR}^{n+1} = \begin{cases} (R_3^A)_{CR}^{n+1} & \text{if } \min R_3^A < (R_3^A)_{CR}^{n+1} < \max R_3^A \\ \min R_3^A & \text{if } (R_3^A)_{CR}^{n+1} \leq \min R_3^A \\ \max R_3^A & \text{if } (R_3^A)_{CR}^{n+1} \geq \max R_3^A \end{cases}$

Новое значение контравариантной составляющей скорости на новом временном слое вычисляется по известной величине $(R_3^A)_{CL}^{n+1}$ из условия: $(R_3^C)_{CL}^{n+1} = (u^{a2})_{CL}^{n+1} - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{LC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{CL}^{n+1}$	Новое значение контравариантной составляющей скорости на новом временном слое вычисляется по известной величине $(R_3^A)_{CR}^{n+1}$ из условия: $(R_3^A)_{CR}^{n+1} = (u^{a2})_{CR}^{n+1} - \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{RC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{CR}^{n+1}$
Окончательно получаем $(u^{a2})_{CL}^{n+1} = (R_3^C)_{CL}^{n+1} + \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{LC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{CL}^{n+1}$	Окончательно получаем $(u^{a2})_{CR}^{n+1} = (R_3^A)_{CR}^{n+1} + \left(\frac{\Theta_{a1}^2}{\Theta_{a1}^1} \right)_{RC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{CR}^{n+1}$

Для четвертого локального инварианта имеем аналогичную таблицу.

Таблица 8.2

$(u^{a1})_C^{n+1} \geq 0$	$(u^{a1})_C^{n+1} < 0$
Вычисляются значения локальных инвариантов в четырех точках левой ячейки: $(R_4^A)_{ww}^n = (u^{a3})_{ww}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_{LC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{ww}^n;$ $(R_4^A)_{LC}^n = (u^{a3})_{LC}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_{LC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{LC}^n;$ $(R_4^A)_{CL}^n = (u^{a3})_{CL}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_{LC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{CL}^n;$ $(R_4^A)_{LC}^{n+1/2} = (u^{a3})_{LC}^{n+1/2} - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_{LC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{LC}^{n+1/2}$	Вычисляются значения локальных инвариантов в четырех точках правой ячейки: $(R_4^A)_{EE}^n = (u^{a3})_{EE}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_{RC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{EE}^n;$ $(R_4^A)_{RC}^n = (u^{a3})_{RC}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_{RC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{RC}^n;$ $(R_4^A)_{CR}^n = (u^{a3})_{CR}^n - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_{RC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{CR}^n;$ $(R_4^A)_{RC}^{n+1/2} = (u^{a3})_{RC}^{n+1/2} - \left(\frac{\Theta_{a1}^3}{\Theta_{a1}^1} \right)_{RC}^{n+1/2} \cdot (u^{a1})_{RC}^{n+1/2}$
Проводится линейная экстраполяция из левого нижнего угла в правый верхний $(R_4^A)_{CL}^{n+1} = 2 \cdot (R_4^A)_{LC}^{n+1/2} - (R_4^A)_{ww}^n$	Проводится линейная экстраполяция из правого нижнего угла в левый верхний $(R_4^A)_{CR}^{n+1} = 2 \cdot (R_4^A)_{RC}^{n+1/2} - (R_4^A)_{EE}^n$
Находятся пределы изменения локального инварианта, вытекающие из принципа максимума $\max R_4^A = \max \left[(R_4^A)_{ww}^n, (R_4^A)_{LC}^n, (R_4^A)_{CL}^n \right] + q_4^A \cdot \tau;$ $\min R_4^A = \min \left[(R_4^A)_{ww}^n, (R_4^A)_{LC}^n, (R_4^A)_{CL}^n \right] + q_4^A \cdot \tau;$	Находятся пределы изменения локального инварианта, вытекающие из принципа максимума $\max R_4^A = \max \left[(R_4^A)_{EE}^n, (R_4^A)_{RC}^n, (R_4^A)_{CR}^n \right] + q_4^A \cdot \tau;$ $\min R_4^A = \min \left[(R_4^A)_{EE}^n, (R_4^A)_{RC}^n, (R_4^A)_{CR}^n \right] + q_4^A \cdot \tau;$

Источники q_4^A вычисляются из простейшей аппроксимации уравнения переноса третьего инварианта $\frac{(R_4^A)^{n+1/2} - (R_4^A)^n_{LC}}{\tau/2} + \frac{(\Lambda_4^A)_{LC}^{n+1/2}}{Vol} \cdot \left[(R_4^A)^n_{CL} - (R_4^A)^n_{WW} \right] = q_4^A$	Источники q_4^A вычисляются из простейшей аппроксимации уравнения переноса третьего инварианта $\frac{(R_4^A)^{n+1/2} - (R_4^A)^n_{RC}}{\tau/2} + \frac{(\Lambda_4^A)_{RC}^{n+1/2}}{Vol} \cdot \left[(R_4^A)^n_{EE} - (R_4^A)^n_{CR} \right] = q_4^A$
Нелинейная коррекция осуществляется по формулам $(R_4^A)^{n+1}_{CL} = \begin{cases} (R_4^A)^{n+1}_{CL} \text{ if } \min R_4^A < (R_4^A)^{n+1}_{CL} < \max R_4^A \\ \min R_4^A \text{ if } (R_4^A)^{n+1}_{CL} \leq \min R_4^A \\ \max R_4^A \text{ if } (R_4^A)^{n+1}_{CL} \geq \max R_4^A \end{cases}$	Нелинейная коррекция осуществляется по формулам $(R_4^A)^{n+1}_{CR} = \begin{cases} (R_4^A)^{n+1}_{CR} \text{ if } \min R_4^A < (R_4^A)^{n+1}_{CR} < \max R_4^A \\ \min R_4^A \text{ if } (R_4^A)^{n+1}_{CR} \leq \min R_4^A \\ \max R_4^A \text{ if } (R_4^A)^{n+1}_{CR} \geq \max R_4^A \end{cases}$
Новое значение контравариантной составляющей скорости на новом временном слое вычисляется по известной величине $(R_4^A)^{n+1}_{CL}$ из условия: $(R_4^A)^{n+1}_{CL} = (u^{\alpha 3})^{n+1}_{CL} - \left(\frac{\Theta^3_{a1}}{\Theta^1_{a1}} \right)^{n+1/2}_{LC} \cdot (u^{\alpha 1})^{n+1}_{CL}$	Новое значение контравариантной составляющей скорости на новом временном слое вычисляется по известной величине $(R_4^A)^{n+1}_{CR}$ из условия: $(R_4^A)^{n+1}_{CR} = (u^{\alpha 3})^{n+1}_{CR} - \left(\frac{\Theta^3_{a1}}{\Theta^1_{a1}} \right)^{n+1/2}_{RC} \cdot (u^{\alpha 1})^{n+1}_{CR}$
Окончательно получаем $(u^{\alpha 3})^{n+1}_{CL} = (R_4^A)^{n+1}_{CL} + \left(\frac{\Theta^3_{a1}}{\Theta^1_{a1}} \right)^{n+1/2}_{LC} \cdot (u^{\alpha 1})^{n+1}_{CL}$	Окончательно получаем $(u^{\alpha 3})^{n+1}_{CR} = (R_4^A)^{n+1}_{CR} + \left(\frac{\Theta^3_{a1}}{\Theta^1_{a1}} \right)^{n+1/2}_{RC} \cdot (u^{\alpha 1})^{n+1}_{CR}$

Для пятого локального инварианта – энтропии – все происходит таким же образом.

Таблица 8.3

$(u^{\alpha 1})^n_C \geq 0$	$(u^{\alpha 1})^n_C < 0$
Вычисляются значения локальных инвариантов в четырех точках левой ячейки: $(R_5^A)^n_{WW} = \ln \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right)^n_{WW};$ $(R_5^A)^n_{LC} = \ln \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right)^n_{LC};$ $(R_5^A)^n_{CL} = \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right)^n_{CL};$ $(R_5^A)^{n+1/2}_{LC} = \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right)^{n+1/2}_{LC}$	Вычисляются значения локальных инвариантов в четырех точках правой ячейки: $(R_5^A)^n_{EE} = \ln \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right)^n_{EE};$ $(R_5^A)^n_{RC} = \ln \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right)^n_{RC};$ $(R_5^A)^n_{CR} = \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right)^n_{CR};$ $(R_5^A)^{n+1/2}_{RC} = \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right)^{n+1/2}_{RC}$

Проводится линейная экстраполяция из левого нижнего угла в правый верхний $(R_s^A)_{CL}^{n+1} = 2 \cdot (R_s^A)_{LC}^{n+1/2} - (R_s^A)_{\pi\pi}^n$	Проводится линейная экстраполяция из правого нижнего угла в левый верхний $(R_s^A)_{CR}^{n+1} = 2 \cdot (R_s^A)_{RC}^{n+1/2} - (R_s^A)_{EE}^n$
Находятся пределы изменения локального инварианта, вытекающие из принципа максимума $\max R_s^A = \max \left[(R_s^A)_{\pi\pi}^n, (R_s^A)_{LC}^n, (R_s^A)_{CL}^n \right] + q_s^A \cdot \tau;$ $\min R_s^A = \min \left[(R_s^A)_{\pi\pi}^n, (R_s^A)_{LC}^n, (R_s^A)_{CL}^n \right] + q_s^A \cdot \tau$	Находятся пределы изменения локального инварианта, вытекающие из принципа максимума $\max R_s^A = \max \left[(R_s^A)_{EE}^n, (R_s^A)_{RC}^n, (R_s^A)_{CR}^n \right] + q_s^A \cdot \tau;$ $\min R_s^A = \min \left[(R_s^A)_{EE}^n, (R_s^A)_{RC}^n, (R_s^A)_{CR}^n \right] + q_s^A \cdot \tau$
Источники q_s^A вычисляются из простейшей аппроксимации уравнения переноса третьего инварианта $\frac{(R_s^A)_{LC}^{n+1/2} - (R_s^A)_{LC}^n}{\tau/2} + \frac{(\Lambda_s^A)_{LC}^{n+1/2}}{Vol} \cdot \left[(R_s^A)_{CL}^n - (R_s^A)_{\pi\pi}^n \right] = q_s^A$	Источники q_s^A вычисляются из простейшей аппроксимации уравнения переноса третьего инварианта $\frac{(R_s^A)_{RC}^{n+1/2} - (R_s^A)_{RC}^n}{\tau/2} + \frac{(\Lambda_s^A)_{RC}^{n+1/2}}{Vol} \cdot \left[(R_s^A)_{EE}^n - (R_s^A)_{CR}^n \right] = q_s^A$
Нелинейная коррекция осуществляется по формулам: $(R_s^A)_{CL}^{n+1} = \begin{cases} (R_s^A)_{CL}^{n+1} & \text{if } \min R_s^A < (R_s^A)_{CL}^{n+1} < \max R_s^A \\ \min R_s^A & \text{if } (R_s^A)_{CL}^{n+1} \leq \min R_s^A \\ \max R_s^A & \text{if } (R_s^A)_{CL}^{n+1} \geq \max R_s^A \end{cases}$	Нелинейная коррекция осуществляется по формулам: $(R_s^A)_{CR}^{n+1} = \begin{cases} (R_s^A)_{CR}^{n+1} & \text{if } \min R_s^A < (R_s^A)_{CR}^{n+1} < \max R_s^A \\ \min R_s^A & \text{if } (R_s^A)_{CR}^{n+1} \leq \min R_s^A \\ \max R_s^A & \text{if } (R_s^A)_{CR}^{n+1} \geq \max R_s^A \end{cases}$
Новое значение плотности на новом временном слое вычисляется по известной величине энтропии $(R_s^A)_{CL}^{n+1}$ из условия $(R_s^A)_{CL}^{n+1} = \left(\frac{p}{p'} \right)_{CL}^{n+1}$	Новое значение плотности на новом временном слое вычисляется по известной величине энтропии $(R_s^A)_{CR}^{n+1}$ из условия $(R_s^A)_{CR}^{n+1} = \left(\frac{p}{p'} \right)_{CR}^{n+1}$
Окончательно получаем $\rho_C^{n+1} = \left[\frac{p_C^{n+1}}{(R_s^A)_{CL}^{n+1}} \right]^{\frac{1}{\gamma}}$	Окончательно получаем $\rho_C^{n+1} = \left[\frac{p_C^{n+1}}{(R_s^A)_{CR}^{n+1}} \right]^{\frac{1}{\gamma}}$

В результате вышеописанных действий на новом временном слое оказываются вычисленными все потоковые переменные на грани $\Sigma = C$, а именно: две скалярные переменные – плотность и давление ρ_C^{n+1}, p_C^{n+1} , и три контравариантные компоненты вектора потоковой скорости $(u^{\alpha 1})_C^{n+1}, (u^{\alpha 2})_C^{n+1}, (u^{\alpha 3})_C^{n+1}$. Следует особо подчеркнуть, что эти

компоненты выражены в разных базисах в зависимости от того, в сторону какой из прилегающих ячеек направлен вектор $(u^{a1})_C^{n+1}$. Это можно записать как

$$\begin{aligned}(u^{a1})_{CL} &= (G_{11})_{CL} \cdot (u_1)_C + (G_{12})_{CL} \cdot (u_2)_C + (G_{13})_{CL} \cdot (u_3)_C; \\ (u^{a2})_{CL} &= (G_{21})_{CL} \cdot (u_1)_C + (G_{22})_{CL} \cdot (u_2)_C + (G_{23})_{CL} \cdot (u_3)_C; \\ (u^{a3})_{CL} &= (G_{31})_{CL} \cdot (u_1)_C + (G_{32})_{CL} \cdot (u_2)_C + (G_{33})_{CL} \cdot (u_3)_C\end{aligned}\quad (8.120)$$

в случае $(u^{a1})_C \geq 0$, и

$$\begin{aligned}(u^{a1})_{CR} &= (G_{11})_{CR} \cdot (u_1)_C + (G_{12})_{CR} \cdot (u_2)_C + (G_{13})_{CR} \cdot (u_3)_C; \\ (u^{a2})_{CR} &= (G_{21})_{CR} \cdot (u_1)_C + (G_{22})_{CR} \cdot (u_2)_C + (G_{23})_{CR} \cdot (u_3)_C; \\ (u^{a3})_{CR} &= (G_{31})_{CR} \cdot (u_1)_C + (G_{32})_{CR} \cdot (u_2)_C + (G_{33})_{CR} \cdot (u_3)_C\end{aligned}\quad (8.121)$$

в противном случае.

В соответствии с этим, декартовы составляющие потоковой скорости будут также вычисляться по разным формулам в зависимости от направления скорости переноса. При $(u^{a1})_C \geq 0$ они вычисляются как

$$\begin{aligned}(u_1)_C &= (Q_{11})_{CL} \cdot (u^{a1})_{CL} + (Q_{12})_{CL} \cdot (u^{a2})_{CL} + (Q_{13})_{CL} \cdot (u^{a3})_{CL}; \\ (u_2)_C &= (Q_{21})_{CL} \cdot (u^{a1})_{CL} + (Q_{22})_{CL} \cdot (u^{a2})_{CL} + (Q_{23})_{CL} \cdot (u^{a3})_{CL}; \\ (u_3)_C &= (Q_{31})_{CL} \cdot (u^{a1})_{CL} + (Q_{32})_{CL} \cdot (u^{a2})_{CL} + (Q_{33})_{CL} \cdot (u^{a3})_{CL},\end{aligned}\quad (8.122)$$

и как

$$\begin{aligned}(u_1)_C &= (Q_{11})_{CR} \cdot (u^{a1})_{CR} + (Q_{12})_{CR} \cdot (u^{a2})_{CR} + (Q_{13})_{CR} \cdot (u^{a3})_{CR}; \\ (u_2)_C &= (Q_{21})_{CR} \cdot (u^{a1})_{CR} + (Q_{22})_{CR} \cdot (u^{a2})_{CR} + (Q_{23})_{CR} \cdot (u^{a3})_{CR}; \\ (u_3)_C &= (Q_{31})_{CR} \cdot (u^{a1})_{CR} + (Q_{32})_{CR} \cdot (u^{a2})_{CR} + (Q_{33})_{CR} \cdot (u^{a3})_{CR}\end{aligned}\quad (8.123)$$

при $(u^{a1})_C < 0$.

Таким образом, все потоковые переменные на новом временном слое вычислены. Величины ρ_C^{n+1} , p_C^{n+1} , $(u_1)_C^{n+1}$, $(u_2)_C^{n+1}$, $(u_3)_C^{n+1}$ не терпят разрыва при переходе от одной стороны грани С к другой.

8.2.5.5. Сверхзвуковые течения

Если таблица вычисленных на грани С локальных инвариантов имеет вид

$(R_1^A)_{CL}^{n+1}$	$(R_2^A)_{CL}^{n+1}$	$(R_1^A)_{CR}^{n+1}$	$(R_2^A)_{CR}^{n+1}$
R_1^A	R_2^A	none	none

или

$(R_1^A)^{n+1}_{CL}$	$(R_2^A)^{n+1}_{CL}$	$(R_1^A)^{n+1}_{CR}$	$(R_2^A)^{n+1}_{CR}$
none	none	R_1^A	R_2^A

то в окрестности грани $\Sigma = C$ имеет место сверхзвуковое течение в положительном направлении в первом случае и в отрицательном – во втором.

Для определения неизвестных потоковых переменных $(u^{a1})_c^{n+1}$ и p_c^{n+1} необходимо разрешить следующие уравнения:

$(\lambda_1^A)^{n+1}_{LC} \geq 0 \& (\lambda_2^A)^{n+1}_{RC} < 0$	$(\lambda_1^A)^{n+1}_{LC} < 0 \& (\lambda_2^A)^{n+1}_{RC} \geq 0$
Система определяющих уравнений $(R_1^A)^{n+1}_{CL} = (u^{a1})_c^{n+1} + G_{LC}^A \cdot (p^\mu)_c^{n+1} = R_1^A;$ $(R_2^A)^{n+1}_{CL} = (u^{a1})_c^{n+1} - G_{LC}^A \cdot (p^\mu)_c^{n+1} = R_2^A$	Система определяющих уравнений $(R_1^A)^{n+1}_{CR} = (u^{a1})_c^{n+1} + G_{RC}^A \cdot (p^\mu)_c^{n+1} = R_1^A;$ $(R_2^A)^{n+1}_{CR} = (u^{a1})_c^{n+1} - G_{RC}^A \cdot (p^\mu)_c^{n+1} = R_2^A$
Решение этой системы $p_c^{n+1} = \left(\frac{R_1^A - R_2^A}{2 \cdot G_{LC}^A} \right)^{\frac{1}{\mu}}; (u^{a1})_c^{n+1} = \frac{R_1^A + R_2^A}{2}$	Решение этой системы $p_c^{n+1} = \left(\frac{R_1^A - R_2^A}{2 \cdot G_{RC}^A} \right)^{\frac{1}{\mu}}; (u^{a1})_c^{n+1} = \frac{R_1^A + R_2^A}{2}$

Для определения остальных трех инвариантов используется алгоритм, описанный в таблицах 1, 2, 3. Декартовы компоненты скорости вычисляются по формулам (8.122) и (8.123).

8.2.5.6. Полное число возможных вариантов. Особые точки

При дозвуковых и сверхзвуковых течениях два первых локальных инварианта оказались независимыми от всех остальных и, в некотором смысле, основными. Проведем анализ количества комбинаций, которые могут, в принципе, реализоваться с этими двумя инвариантами при различных переходных течениях.

Для этого рассмотрим все возможные комбинации заполнения таблиц значений этих инвариантов, введенных ранее.

№	$(R_1^A)_{CL}^{n+1}$	$(R_2^A)_{CL}^{n+1}$	$(R_1^A)_{CR}^{n+1}$	$(R_2^A)_{CR}^{n+1}$	Комментарии
1	R_1^A	none	none	R_2^A	Дозвуковое течение
2	R_1^A	R_2^A	none	none	Сверхзвуковое течение вправо
3	none	none	R_1^A	R_2^A	Сверхзвуковое течение влево
4	none	R_2^A	R_1^A	none	Невозможная ситуация
5	$(R_1^A)_L$	$(R_2^A)_L$	none	$(R_2^A)_R$	Торможение сверхзвукового потока дозвуковым
6	$(R_1^A)_L$	$(R_2^A)_L$	$(R_1^A)_R$	none	Невозможная ситуация
7	$(R_1^A)_L$	none	$(R_1^A)_R$	$(R_2^A)_R$	Торможение сверхзвукового потока дозвуковым
8	none	$(R_2^A)_L$	$(R_1^A)_R$	$(R_2^A)_R$	Невозможная ситуация
9	$(R_1^A)_L$	$(R_2^A)_L$	$(R_1^A)_R$	$(R_2^A)_R$	Столкновение сверхзвуковых потоков.
10	none	none	none	none	Растекание в разные стороны сверхзвуковых потоков
11	$(R_1^A)_L$	none	none	none	Переход дозвукового течения в сверхзвуковое (звуковая точка)
12	none	none	none	$(R_2^A)_R$	Переход дозвукового течения в сверхзвуковое (звуковая точка)
13	none	$(R_2^A)_L$	none	none	Невозможная ситуация
14	none	none	$(R_1^A)_R$	none	Невозможная ситуация

В обоих этих случаях вычисление давления и нормальных компонент скоростей происходит по тем же формулам, что и в случае №1.

Выражение «невозможная ситуация» относится к тем комбинациям, в которых нарушается одно из условий:

$$(R_1^A)_L > (R_2^A)_L; \quad (R_1^A)_R > (R_2^A)_R \quad (8.124)$$

Нарушение каждого из этих условий возможно только в случаях, когда скорость звука отрицательна. Возникновение такой ситуации в реальных расчетах свидетельствует о наличии существенной ошибки и требует прекращения расчета. Таким образом, 5 из 14 возможных ситуаций диагностируют наличие ошибки. Три первые комбинации из оставшихся 9 были рассмотрены ранее. Останутся 6 комбинаций, которые нуждаются в особом рассмотрении. Их номера 5, 7, 9–12.

8.2.5.7. Торможение сверхзвукового потока дозвуковым

Две ситуации, когда на одну сторону грани С приходит два инварианта со стороны одной из соседних ячеек, а на другую сторону грани приходит один «правильный», т. е. соответствующий положительной скорости звука инвариант, можно трактовать как торможение сверхзвукового потока дозвуковым. Эти ситуации отвечают номерам 5 и 7 в предыдущей таблице и для большей наглядности ниже сведены в мини-таблицу:

№	$(R_1^A)_{CL}^{n+1}$	$(R_2^A)_{CL}^{n+1}$	$(R_1^A)_{CR}^{n+1}$	$(R_2^A)_{CR}^{n+1}$	Комментарии
5	$(R_1^A)_L$	$(R_2^A)_L$	none	$(R_2^A)_R$	Торможение сверхзвукового потока дозвуковым
7	$(R_1^A)_L$	none	$(R_1^A)_R$	$(R_2^A)_R$	Торможение сверхзвукового потока дозвуковым

8.2.5.8. Звуковые точки

Строки № 11 и № 12 сводной таблицы отвечают т. н. «звуковым точкам». По значению одной только приходящей характеристики невозможно однозначно вычислить нормальную скорость и давление. Для этого нужно еще одно, дополнительное, условие. Это условие должно отражать тот факт, что в окрестности данной грани находится точка, в которой скорость потока совпадает со скоростью звука – т. н. «звуковая точка». Его можно сформулировать по-разному, однако наиболее хорошие результаты получаются при интерполяции числа Маха:

$$\frac{(u^a)_C^{n+1}}{C_C^{n+1/2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(u^a)_{CR}^{n+1/2}}{C_{CR}^{n+1/2}} + \frac{(u^a)_{CL}^{n+1/2}}{C_{CL}^{n+1/2}} \right); \quad C_C^{n+1} = \sqrt{\gamma \frac{p_C^{n+1}}{\rho_C^{n+1}}};$$

Инвариант R или Q, приходящий на грань, совместно с приведенным выше условием энтропийным инвариантом позволяют однозначно вычислить все потоковые переменные.

8.2.5.9. Столкновение и разлет сверхзвуковых течений

Строка № 9 соответствует столкновению сверхзвуковых потоков. В этом случае на грань приходят четыре «базовые» характеристики. Наибольшие и наименьшие значения соответствующих локальных инвариантов достигаются на R_{CL}^{n+1} и Q_{CR}^{n+1} . Именно они и определяют нормальную скорость и давление. В этом смысле алгоритм вычисления новых потоковых переменных ничем не отличается от случая двух дозвуковых потоков.

Строка № 10 описывает разлет сверхзвуковых потоков. В этом случае на грань не приходит ни одной характеристики. Удовлетворительные результаты получаются с использованием интерполяции решения на грань расчетной ячейки.

8.2.6. Третий блок разностных уравнений схемы «КАБАРЕ»

Уравнение неразрывности

$$\begin{aligned} Vol \cdot \frac{\rho_C^{n+1} - \rho_C^{n+1/2}}{\tau/2} + \left[(S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_E^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_W^{n+1} \right] + \\ + \left[(S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_N^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_S^{n+1} \right] + \left[(S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_T^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_B^{n+1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (8.125)$$

где $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_0 = (u_1 \cdot n_x + u_2 \cdot n_y + u_3 \cdot n_z)_0$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – вектор нормали к грани Σ , S – площадь грани Σ .

Уравнение сохранения компоненты импульса в направлении X

$$\begin{aligned} Vol \cdot \frac{(\rho \cdot u_1)_c^{n+1} - (\rho \cdot u_1)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \left[(S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_E^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_W^{n+1} \right] + \\ + \left[(S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_N^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_S^{n+1} \right] + \\ + \left[(S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_T^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot u_1 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_B^{n+1} \right] = - \left[(S \cdot n_x \cdot p)_E^{n+1} - (S \cdot n_x \cdot p)_W^{n+1} \right] - \\ - \left[(S \cdot n_x \cdot p)_N^{n+1} - (S \cdot n_x \cdot p)_S^{n+1} \right] - \left[(S \cdot n_x \cdot p)_T^{n+1} - (S \cdot n_x \cdot p)_B^{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (8.126)$$

Уравнение сохранения компоненты импульса в направлении Y

$$\begin{aligned} Vol \cdot \frac{(\rho \cdot u_2)_c^{n+1} - (\rho \cdot u_2)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \left[(S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_E^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_W^{n+1} \right] + \\ + \left[(S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_N^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_S^{n+1} \right] + \\ + \left[(S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_T^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot u_2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_B^{n+1} \right] = - \left[(S \cdot n_y \cdot p)_E^{n+1} - (S \cdot n_y \cdot p)_W^{n+1} \right] - \\ - \left[(S \cdot n_y \cdot p)_N^{n+1} - (S \cdot n_y \cdot p)_S^{n+1} \right] - \left[(S \cdot n_y \cdot p)_T^{n+1} - (S \cdot n_y \cdot p)_B^{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (8.127)$$

Уравнение сохранения компоненты импульса в направлении Z

$$\begin{aligned} Vol \cdot \frac{(\rho \cdot u_3)_c^{n+1} - (\rho \cdot u_3)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \left[(S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_E^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_W^{n+1} \right] + \\ + \left[(S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_N^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_S^{n+1} \right] + \\ + \left[(S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_T^{n+1} - (S \cdot \rho \cdot u_3 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_B^{n+1} \right] = - \left[(S \cdot n_z \cdot p)_E^{n+1} - (S \cdot n_z \cdot p)_W^{n+1} \right] - \\ - \left[(S \cdot n_z \cdot p)_N^{n+1} - (S \cdot n_z \cdot p)_S^{n+1} \right] - \left[(S \cdot n_z \cdot p)_T^{n+1} - (S \cdot n_z \cdot p)_B^{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (8.128)$$

Уравнение сохранения полной энергии

$$\begin{aligned} Vol \cdot \frac{(\rho E)_c^{n+1} - (\rho E)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \left\{ [S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_E^{n+1} - [S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_W^{n+1} \right\} + \\ + \left\{ [S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_N^{n+1} - [S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_S^{n+1} \right\} + \\ + \left\{ [S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_T^{n+1} - [S \cdot (\rho \cdot E + p) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_B^{n+1} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8.129)$$

На этом вычисления всех величин на новом временном слое заканчиваются.

Следует отметить, что вычисление допустимого шага интегрирования по времени, учет полного тензора вязких напряжений и реализация разных типов граничных условий производится аналогично тому, как это описано в предыдущей главе для двумерного случая.

8.3. Расчет высокоскоростной турбулентной струи, истекающей из конического сопла

Данный раздел посвящен использованию численного метода «КАБАРЕ» для расчета аэродинамических и акустических характеристик трехмерных дозвуковых струй. Эта тема чрезвычайно актуальна, т. к. шум реактивных двигателей является одной из основных составляющих интегральной акустической характеристики самолета. При создании самолетов, удовлетворяющих современным нормам по шуму на местности, необходимо уже на стадии проработки концепции иметь надежные данные о шумовых характеристиках создаваемого летательного аппарата, которые возможно получить только с помощью численных методов расчета.

Математическое моделирование генерации шума магистральными авиалайнерами становится возможным при наличии численных методов высокого разрешения и необходимых компьютерных мощностей.

8.3.1. Постановка задачи и примеры расчетов в литературе

Рассматривается так называемая простая статическая изотермическая струя из осесимметричного конического сопла. Данная струя отвечает истечению газа из одноконтурного сопла двигателя в покоящуюся среду при условии равенства температуры на выходе из сопла температуре окружающего воздуха. Струя соответствует числу Маха 0,75 на срезе сопла и числу Рейнольдса, определенному по диаметру сопла, $Re = 10^6$.

Условия истечения струи и геометрия сопла отвечают условиям эксперимента JEAN (Power O., Kerherve F., Fitzpatrick J., and Jordan P. Measurements of Turbulence Statistics in High Subsonic Jets, AIAA-2004-3021, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Manchester, UK, June 2004), проводившегося для создания единой европейской базы данных по моделированию турбулентных струй.

В частности, течение данной турбулентной струи ранее уже моделировалось на основе метода крупных вихрей (LES) [2] с использованием стандартной методики проведения подобных расчетов, описание которой приведено ниже. Для моделирования турбулентности в ней использовался классический подход на основе решения уравнения Навье – Стокса с введением замыкающих соотношений на основе модели Смагоринского, с коэффициентом (C_s) 0,15. Для предотвращения нефизичного отрыва пограничного слоя у границ сопла использовалась дополнительная пристеночная вязкость [3].

Для решения самих уравнений Навье – Стокса использовался метод второго порядка аппроксимации для уравнений массы, импульса и энергии на основе направленных разностей. Численное решение было получено на многоблочной гексагональной структурированной сетке, позволяющей обеспечивать достаточно малую дисси-

плативность решения по сравнению с тетраэдральными сетками. Для интегрирования по времени использовалась схема Рунге – Кутты третьего порядка. Численный алгоритм был реализован с использованием технологии распараллеливания MPI на многопроцессорном кластере, так что каждый блок сетки соответствовал одному процессору. Область решения от выхода из сопла до правой свободной границы соответствовала размерам $30D \times 10D$ в аксиальном и радиальном направлениях. Геометрия кромки сопла была включена в расчетную область. У границы сопла использовалось сгущение сетки в радиальном направлении. Плотность сетки в азимутальном направлении подбиралась так, чтобы сетка в окрестности выхода из сопла, была максимально однородной. Размеры шага сетки у выхода струи из сопла составляли $0,0045D$, $0,004D$, $0,0087D$ в аксиальном, радиальном и азимутальном направлениях соответственно. Размеры шага сетки, покрывающие область от выхода из сопла до правой свободной границы, соответствовали $314 \times 102 \times 360$ (в аксиальном, радиальном и азимутальном направлениях соответственно). Полный размер сетки с учетом сопла для этого расчета соответствовал $16,5 \times 10^6$ ячеек. Несмотря на отсутствие дополнительного сеточного блока квадратной топологии на оси симметрии цилиндрической сетки, в силу консервативности используемого метода численных проблем при решении отмечено не было. На входе в сопло задано давление торможения, соответствующее требуемой величине скорости выхода струи из сопла. На всех открытых границах задавалось постоянное статическое давление, соответствующее условию на бесконечности. Для уменьшения численных отражений использовалось локальное разрежение сетки в окрестности открытых границ.

Время расчета для выхода решения в режим статистической стационарности (когда статистика уже не зависит от времени при достаточно большом окне усреднения) относительно средних и среднеквадратичных моментов решения составляло примерно $300 D/U_j$, где D/U_j – характерное время, за которое элементарный объем газа, содержащий вихрь скорости, движущийся со скоростью U_j , проходит расстояние, равное одному диаметру сопла. На компьютерном кластере средних размеров такой расчет занимал порядка двух месяцев физического времени.

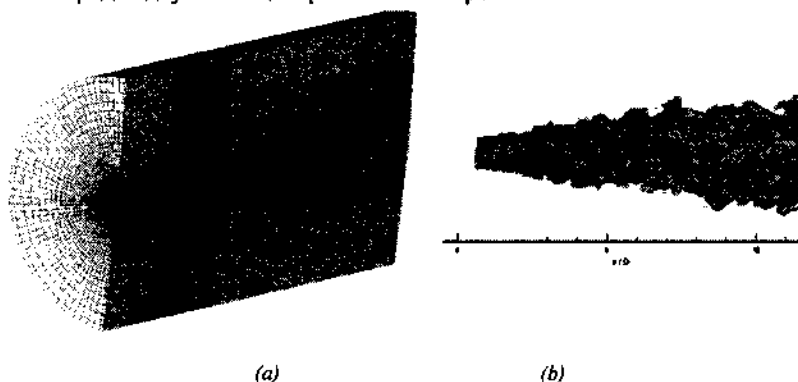


Рис. 8.5. Расчет турбулентной струи методом крупных вихрей (а), расчетная сетка в половине области, (б) изоповерхность завихренности. В (б) на выходе из сопла хорошо видны вихревые кольца, двумерность которых говорит о том, что уровень турбулентности струи в решении на выходе из сопла недостаточно высок. Ниже по течению двумерная симметрия решения быстро исчезает, возникают трехмерные филаменты завихренности, свидетельствующие о турбулизации решения

Независимо от решения LES было получено стационарное решение для струи на основе уравнений Навье – Стокса, усредненных по Рейнольдсу (RANS). В численном решении RANS усреднение по Рейнольдсу заменялось усреднением по времени, и решалась система стационарных уравнений Навье – Стокса. Для моделирования турбулентности использовалась стандартная $k-\epsilon$ модель турбулентности. Вычисления проводились с использованием коммерческого программного пакета Fluent 6.2. Для решения системы уравнений RANS выбирался численный алгоритм на основе конечно-объемной схемы с направленными разностями второго порядка аппроксимации и явным шагом по времени. Расчет проводился в осесимметричной постановке на сетке 271×120 ячеек в аксиальном и радиальном направлениях и включал часть сопла. Левая граница расчетной области соответствовала расстоянию пяти диаметров сопла вверх по течению струи от выхода сопла. На входе сопла задавалась та же температура торможения, что и в расчете LES, а также начальная интенсивность турбулентности ($k^{1/2}/U_{jet}$), равная 6%. Пространственный масштаб турбулентных пульсаций принимался равным $0,01D$. Начальные параметры интенсивности турбулентной энергии и пространственного масштаба соответствуют рекомендациям, выработанным для расчета струйных турбулентных течений в рамках документации ERCOFTAC (ERCOFTAC Special Interest Group on Quality and Trust in Industrial CFD, Best Practice Guidelines, 1999). На персональном серийном компьютере расчет RANS осесимметричной струи занимал несколько часов физического времени.

Сравнение решений LES и RANS с экспериментом для средней аксиальной скорости и турбулентной кинетической энергии для ряда сечений струи показано на рисунках 8.6, 8.7. Видно, что решение LES приводит к более тонкому слою смешения и меньшей длине потенциального ядра струи по сравнению с RANS.

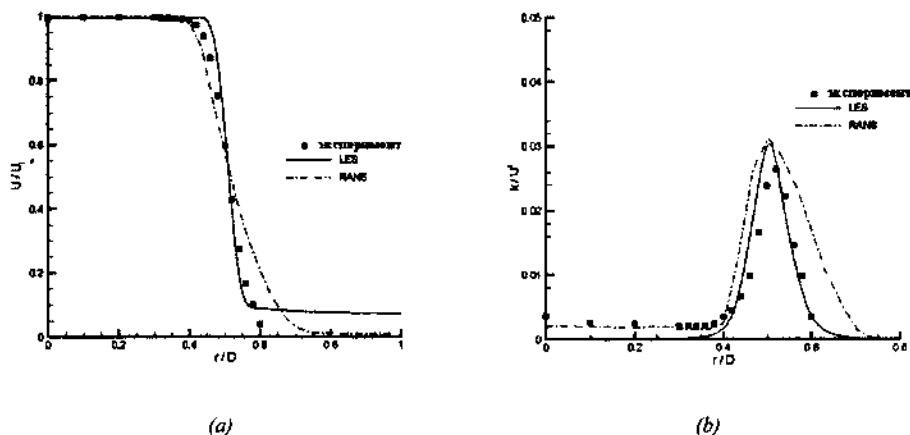
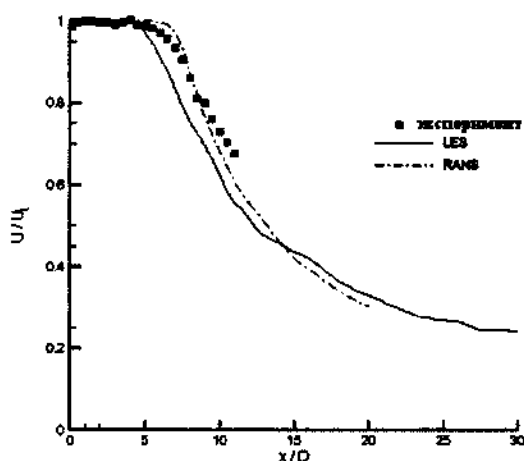
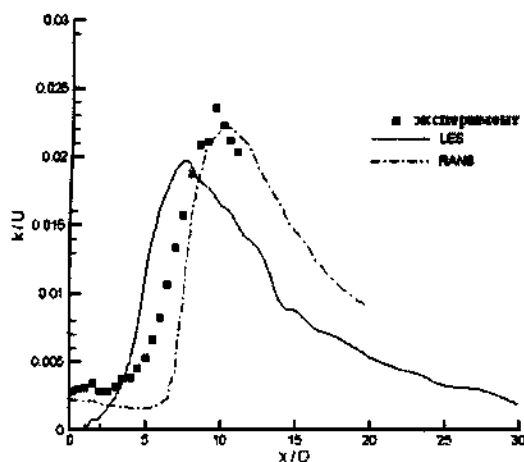


Рис. 8.6. Расчет радиального распределения на расстоянии $x/D = 1$ от конца сопла для (a) средней скорости и (b) турбулентной кинетической энергии при использовании нестационарного (LES) и стационарного (RANS) методов решения, которые использовались при построении модели акустического источника



(a)



(b)

Рис. 8.7. Расчет аксиального распределения в центре струи.
Обозначения те же, что и на рис. 8.6

По сравнению с экспериментальными данными численное решение приводит к более короткому начальному участку – ядру струи, что является довольно типичным для методов прямого моделирования на основе методов разрешения крупных вихрей. В частности, в данном случае, как видно из данных эксперимента, на срезе сопла присутствует некоторый ненулевой уровень турбулентных пульсаций, который в методе LES никак не учитывался и мог послужить причиной различий между результатами расчета LES и эксперимента. С другой стороны, несколько замедленный переход к хаотизации в решении, выражающийся в слишком двумерной структуре решения на длине первых 1–2 калибров от среза сопла (рис. 8.5), говорит о том, что одной из причин более короткого ядра струи также могло быть недостаточное сеточное разрешение решения LES. В частности, наличие диссипативных и дисперсионных ошибок, прояв-

ляющихся на слишком грубой сетке, может привести к неправильному описанию нестационарных гидродинамических процессов в тонких слоях смещения струи, что, в свою очередь, может приводить к слишком бурному развитию неустойчивости в конце слоя смещения и, как следствие, к более раннему срыву струи в быстро диссипирующий каскад вихрей в конце начального участка струи. Для проверки последней гипотезы данная задача была решена в настоящей работе методом высокого разрешения – «КАБАРЕ» – с коррекцией потоков на основе принципа максимума на ряде сгущающихся сеток.

8.3.2. Результаты расчетов по методу «КАБАРЕ»

Для моделирования турбулентности в рамках расчетов по схеме «КАБАРЕ» использовался метод крупных вихрей. Роль замыкающих соотношений при решении уравнений Навье – Стокса играет алгоритм коррекции потоков на основе прямого использования принципа максимума в соответствии с подходом MILES – метод крупных вихрей с использованием монотонного интегрирования потоков (Fureby C. and Grinstein F.F. Large Eddy Simulation of High-Reynolds-Number Free and Wall-Bounded Flows. V. 181. Issue 1. September 1, 2002. Pp. 68–97). Расчетная сетка для решения уравнений Навье – Стокса имела цилиндрическую топологию в сечении струи (y, z) с включением декартового блока сетки прямоугольной топологии вдоль оси струи. Область решения имела топологически цилиндрическую форму, размер которой в плоскости симметрии (x, r) составлял примерно $30D \times 10D$.

Вдоль оси струи расчетная сетка имела H-топологию со сгущением в районе кромки сопла. Примеры использовавшихся сеток в срезах x – y и x – z со сгущением в окрестности слоя смещения и без сгущения – равномерной цилиндрической сетки показаны на рисунке 8.8. Обе сетки состоят из $3,6 \cdot 10^6$ ячеек, различие – только в степени неоднородности. На неоднородной сетке отношение минимальной ячейки в слое смещения струи к радиусу сопла составляет $\sim 1\%$, на однородной сетке эта величина $\sim 5\%$.

На открытых границах области задавались безотражающие (то есть не приводящие к заметному паразитному отражению волн) характеристические граничные условия с использованием разнесенного шаблона «КАБАРЕ» и линейного расширения сетки у границ области для уменьшения паразитных отражений от границ области. На границе сопла задавалось классическое адиабатическое условие прилипания. Для сетки со сгущением в окрестности слоя смещения струи в силу положительных свойств «КАБАРЕ» этого условия оказывалось достаточно, и паразитных отрывов потока от кромки сопла не возникало. В случае однородной сетки, которая была слишком грубой в районе кромки сопла, условие полного прилипания менялось на условие частичного проскальзывания для предотвращения отрывов.

Мгновенные распределения модуля завихренности в плоскости x – z , полученные по методу «КАБАРЕ» для обеих сеток, показаны на рис. 8.8 e, f. Видно, что решение на однородной сетке с крупными ячейками в слое смещения отвечает более ламинарному поведению струи на выходе из сопла, неустойчивость струи, сопровождающаяся возникновением достаточно крупных вихрей, возникает уже только на расстоянии 1–2 калибра струи от среза сопла. Качественно это поведение напоминает результаты предыдущего расчета (рис. 8.5). Вихри начинают интенсивное взаимодействие, в

результате которого струя достаточно быстро распадется. В отличие от однородной сетки, на сетке с мелким разрешением слоя смешения тонкие вихревые структуры порождаются уже начиная с 0,1–0,2 калибра струи, нарастание неустойчивости слоя смешения происходит более плавно, без резких скачков, а расширение слоя смешения происходит более линейно, и ядро струи становится более вытянутым.

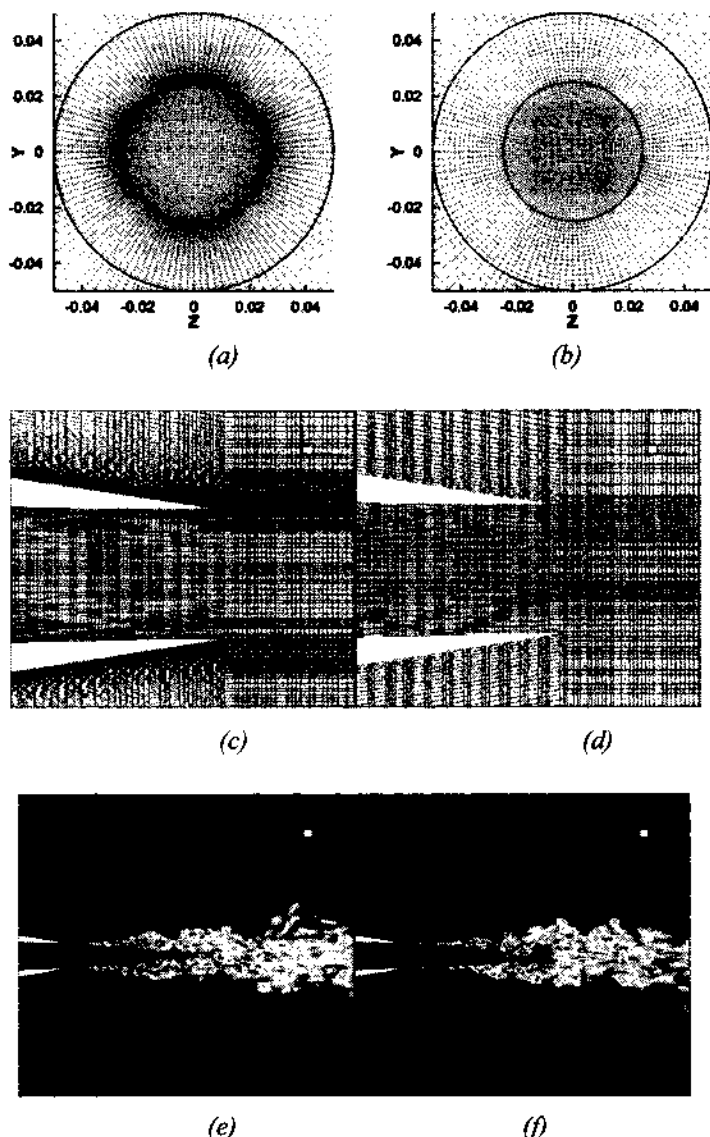


Рис. 8.8 Вычислительная сетка со сжатием (a), (c) и без сжатия (b), (d) в районе кромки сопла и соответствующие распределения полей завихренности (e) и (f) в плоскости симметрии струи (см. цветную вклейку)

На рисунке 8.9 показано мгновенное распределение завихренности в ближнем поле струи и контуров давления в акустическом диапазоне $0,999 < p/p_\infty < 1,001$ на следующей по объему сетке – $7,8 \cdot 10^6$ ячеек. Эта сетка получена из сетки плотности $3,6 \cdot 10^6$ ячеек со сгущением в слое смешения путем увеличения количества точек по оси x в окрестности конца потенциального ядра струи, что позволяет сделать сетку в этой области более равномерной.

Хорошо заметны мелкомасштабные пульсации в начале струи, визуально соответствующие мелкомасштабным акустическим возмущениям. Мелкомасштабные возмущения переходят в крупные вихри, интенсивно перемешивающиеся в конце начального отрезка струи и соответствующие крупномасштабным акустическим возмущениям, переносимым под малыми углами к струе.

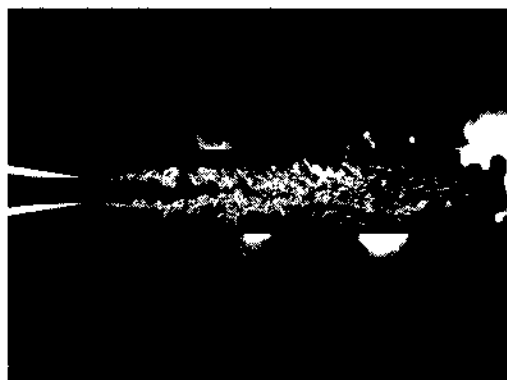


Рис. 8.9. Мгновенное распределение гидродинамических (завихренности) и акустических (давления в акустическом диапазоне) пульсаций в плоскости симметрии струи (см. цветную вклейку)

На следующих рисунках (8.10) представлены результаты сравнения решения «КАБАРЕ» для усредненной по времени аксиальной компоненты скоростей на сетках $3,6 \cdot 10^6$ ячеек со сгущением в районе кромки сопла и без, на сетке $7,8 \cdot 10^6$ ячеек и на сетке $25,3 \cdot 10^6$ ячеек. Последняя сетка получена удвоением количества ячеек сетки $7,8 \cdot 10^6$ ячеек в радиальном (r) и аксиальном (x) направлениях. Ниже результаты расчетов по методу «КАБАРЕ» сравниваются с результатами эксперимента и предыдущего расчета на основе крупных вихрей. Видно, что решения «КАБАРЕ» на двух последних сетках хорошо согласуются между собой и экспериментом на протяжении первых 10 калибров струи. Как и ожидалось, использование грубых сеток $3,6 \cdot 10^6$ ячеек приводит к несколько укороченному ядру струи по сравнению с экспериментом, при этом грубая сетка без попытки разрешения тонкого слоя смешения на срезе сопла приводит к наибольшей ошибке в длине начального участка. Расчеты по схеме «КАБАРЕ» проводились с разбиением гексаэдральной сетки на 512 и 992 ядер с использованием библиотеки METIS в случае сеток $3,6$ – $7,8 \cdot 10^6$ и $25,3 \cdot 10^6$ ячеек соответственно. Выход решения на статистически установившийся режим и отбор результатов для усреднения соответствовали примерно 300 характерным временам D/U_j , что соответствовало примерно 72–96 часам физического времени расчета на британском суперкомпьютере HECToR (High-End Computing Terascale Resource).

Сравнение для турбулентной кинетической энергии струи в разных ее сечениях (значениям азимутального угла в цилиндрической системе координат струи 0 и 180°) для схемы «КАБАРЕ» на сетке $7,8 \cdot 10^6$ ячеек, эксперимента и предыдущего решения LES приведено на рис. 8.11. Сравнение с экспериментом говорит о том, что использование схемы «КАБАРЕ» даже на более грубой сетке позволяет правильное, относительно ранее проведенного расчета LES на более мелкой сетке, описывать развитие неустойчивости в тонких слоях смешения струи и переход к турбулентности.

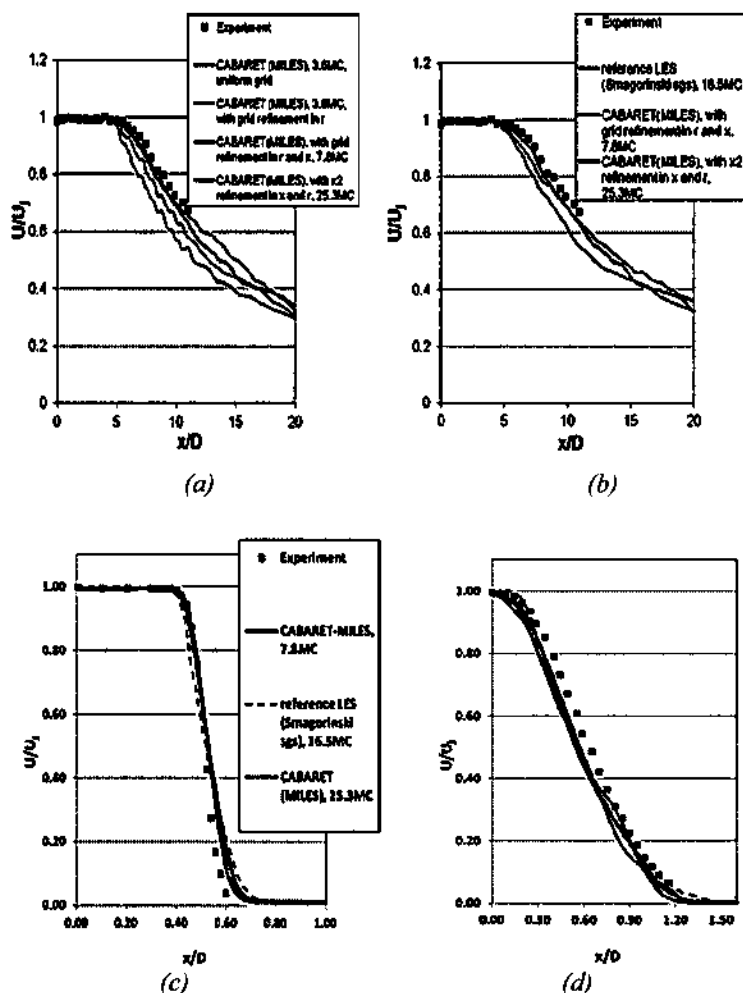


Рис. 8.10. Сравнение распределений усредненной по времени аксиальной компоненты скорости (a), (b) вдоль оси струи и радиальных профилей скорости на расстоянии (c) 1 и (d) 5 калибров от среза сопла (см. цветную вклейку)

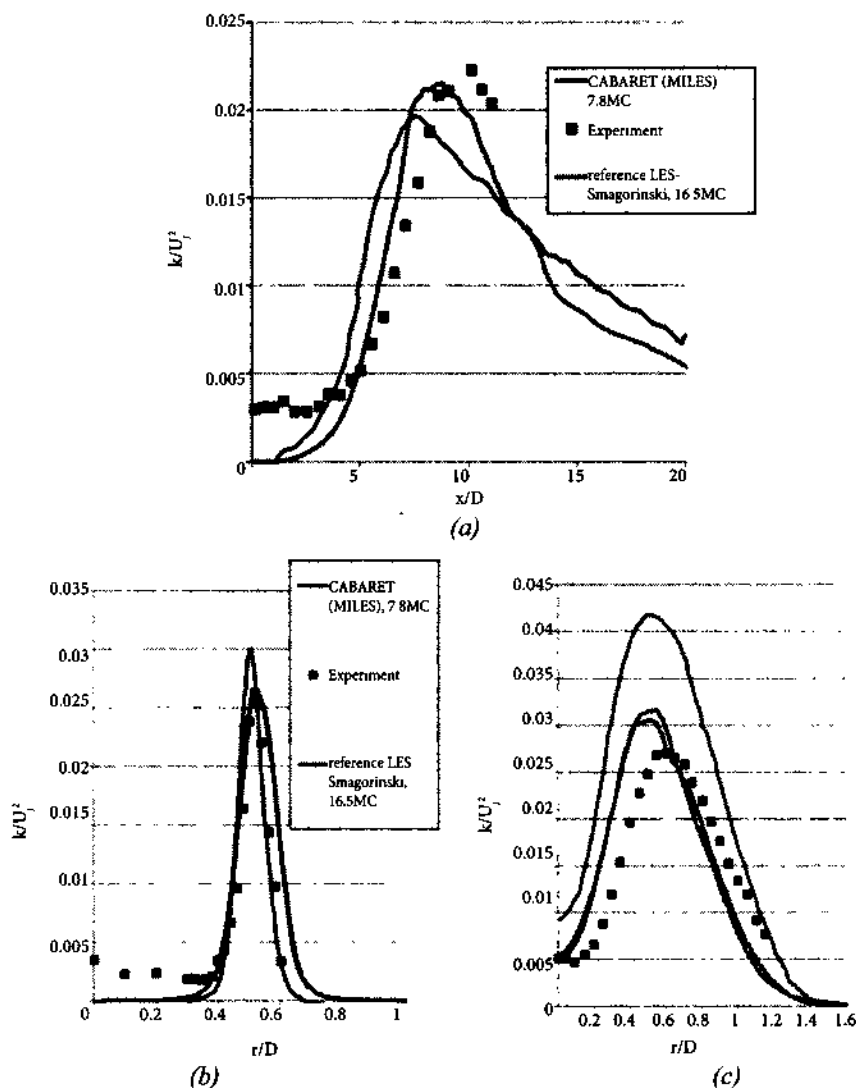


Рис. 8.11. Сравнение распределений усредненной по времени турбулентной кинетической энергии (a) вдоль оси струи и соответствующих радиальных профилей на расстоянии (b) 1 и (c) 5 калибров от среза сопла (см. цветную вклейку)

На рисунке 8.12 показан осевой профиль турбулентной кинетической энергии, полученный в модели расчета по схеме «КАБАРЕ» на двух сетках – 7,8 и 25,3 млн ячеек. Видно, что оба решения «КАБАРЕ» находятся в достаточно хорошем согласии друг с другом и с экспериментальными данными. Это показывает, что по ключевым параметрам, таким как среднеквадратичные пульсации в районе развитого перемешивания, решение «КАБАРЕ» на сетке 7,8 млн уже слабо зависит от плотности сетки. Два раз-

ных профиля решения «КАБАРЕ» соответствуют верхней и нижней полуплоскостям (значениям азимутального угла в цилиндрической системе координат струи 0° и 180°).

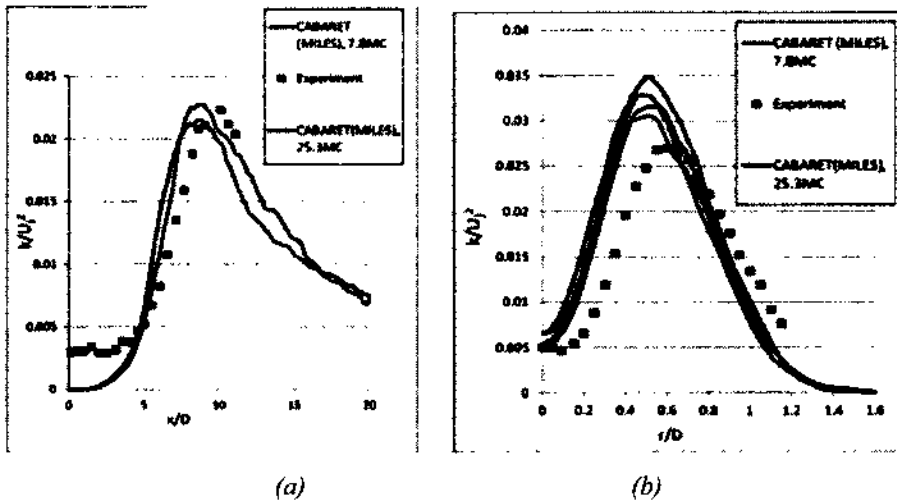
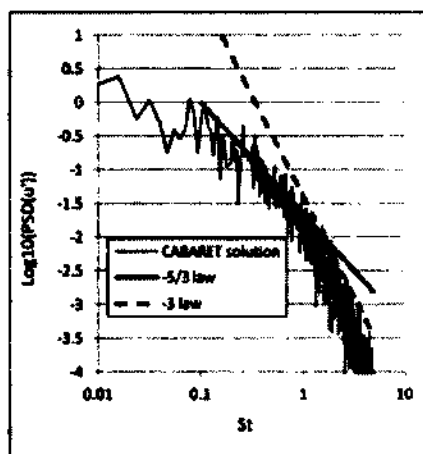


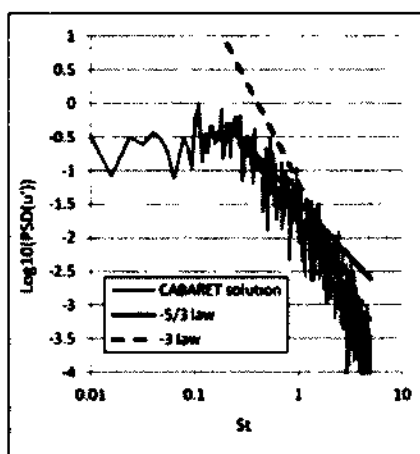
Рис. 8.12. Сравнение распределений усредненной по времени турбулентной кинетической энергии вдоль оси струи (а) и соответствующих радиальных профилей (б) на расстоянии 5 калибров от среза сопла (см. цветную вклейку)

Вторые моменты случайных полей турбулентных течений, такие как среднеквадратичные пульсации скорости или средняя турбулентная кинетическая энергия, как обсуждалось ранее, можно получить из решения уравнений Навье – Стокса, усредненных по Рейнольдсу (RANS), с соответствующим образом откалиброванной моделью замыкания ($k-\varepsilon$). В отличие от RANS-моделей, мерой качества нестационарного и полученного из первых принципов вихреразрешающего решения (LES) является спектральная информация. В частности, много важной информации несут пульсации скорости в слое смешения: по закону убывания спектральной мощности пульсации скорости в зависимости от частоты можно сделать вывод о соответствии решения масштабным законам, известным для однородной изотропной турбулентности (т. н. закон « $-5/3$ » Колмогорова в случае трехмерной турбулентности). На рисунке 8.13 для решения «КАБАРЕ» на сетке 7,8 млн ячеек в логарифмическом масштабе показаны спектры аксиальной компоненты скорости $\text{Log}_{10} \text{PSD}$, где $\text{PSD} = 2 \cdot SS^* / T$, $S = \int u'(t) e^{i2\pi f t} dt$ в трех сечениях струи: близко от среза сопла (0,5 калибра), в районе конца начального участка (4 калибра) и за начальным участком в области выхода на автомодельное изменение скорости струи (8 калибров). Частота обезразмерена на калибр струи (D) и на скорость струи на срезе сопла (U): $St = f \cdot D / U$. Видно, что для области развитого перемешивания как минимум одна октава спектра пульсаций скорости отвечает закону « $-5/3$ » в соответствии с теорией (Колмогоров, А.Н. Математические модели турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости // УМН. – 59:1(355). – 2004. – 5–10). По мере расширения струи эта зона трехмерной турбулентности все больше возрастает

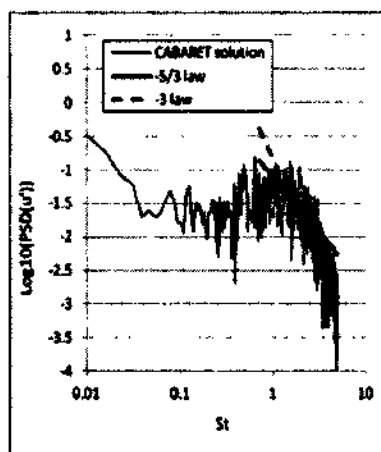
(а, б). Наряду с $-5/3$, частично наблюдается также наклон, близкий к -3 , который соответствует двумерной турбулентности. Этот наклон особенно заметен в сечении вблизи среза сопла (с), отвечающего очень тонкому слою смешения относительно радиуса струи, где теоретическое предположение об однородности и изотропности пульсаций явно не выполняется.



(a)



(b)



(c)

Рис. 8.13. Спектры аксиальной компоненты скорости пульсаций из расчета «КАБАРЕ» на сетке 7,8 млн ячеек в слое смешения на разных расстояниях от среза сопла: (a) $x=8D$, (b) $x=4D$, (c) $x=0,5D$

Наконец, еще одной важной характеристикой турбулентных струй является двухточечная корреляционная функция скоростей. Соответствующие формулы для корреляций второго и четвертого порядка выписаны ниже:

$$\begin{aligned}
 R_y(y, \Delta, dt) &= \sqrt{\rho(y + \Delta, \tau + dt) v_y''(y + \Delta, \tau + dt)} \sqrt{\rho(y, \tau) v_y''(y, \tau)} \\
 R_{y\theta}(y, \Delta, dt) &= \frac{\rho(y + \Delta, \tau + dt) v_y''(y + \Delta, \tau + dt) v_\theta''(y + \Delta, \tau + dt) \rho(y, \tau) v_y''(y, \tau) v_\theta''(y, \tau) -}{\rho(y + \Delta, \tau + dt) v_y''(y + \Delta, \tau + dt) v_y''(y + \Delta, \tau + dt) \cdot \rho(y, \tau) v_y''(y, \tau) v_y''(y, \tau)},
 \end{aligned} \quad (8.130)$$

где черта обозначает усреднение по времени расчета.

В частности, в соответствии с теорией порождения звука аэродинамическим потоком в рамках акустической аналогии [4], корреляционная функция четвертого порядка характеризует источники звука в струе. При анализе корреляций особое внимание уделяется анализу коэффициентов корреляции в аксиальном направлении струи (R_{1111}), отвечающему направлению переноса вихрей в струе.

На рис. 8.14 показано сравнение нормализованных коэффициентов корреляции второго и четвертого порядков, полученных обработкой решения «КАБАРЕ» на сетке 7,8 млн ячеек. На том же графике приведены результаты расчета LES на сетке 16,4 млн ячеек из [2] и результаты обработки данных эксперимента с использованием термоанемометра для другой изотермической осесимметричной струи [5]. Все графики построены в координатах пространственного и временного смещений, обезразмеренных на диаметр сопла и скорость на выходе из него. Два решения «КАБАРЕ» соответствуют верхней и нижней полуплоскостям (значениям азимутального угла в цилиндрической системе координат струи 0 и 180°). Решение из [2] соответствует азимутальному усреднению по всем углам струи, чтобы восполнить недостаток временной реализации осреднением по углу. Усреднение результатов обоих расчетов, использовавшееся при вычислении корреляций, отвечало примерно одному и тому же интервалу времени (для «КАБАРЕ» и решения [2]). В безразмерных (конвективных) единицах это время составляло $T \sim 300 \cdot D/U$. Эксперимент соответствует одному аксиальному углу, но гораздо более длительному времени реализации. Аксиальная координата точки, где мерялись корреляции, соответствует одному и тому же положению внутри потенциального ядра струи ($x = 4D$), радиальная – середине слоя смешения.

Существенно, что параметры струй, отвечающих сравниваемым корреляционным функциям, сильно отличаются. Как отмечалось выше, оба решения LES соответствуют струе с числом Рейнольдса $Re = 10^6$ и числом Маха на выходе сопла $M = 0,75$, а эксперимент [5] соответствовал $Re = 2 \cdot 10^5$ и $M = 0,18$. Хорошее соответствие между корреляционными характеристиками разных изотермических осесимметричных струй свидетельствует о слабом влиянии числа Маха и числа Рейнольдса (выше некоторого порогового значения) на характерные временные и пространственные масштабы корреляции пульсаций скорости. Также хорошее совпадение результатов расчета такой тонкой характеристики как корреляционная функция четвертого порядка на сетке 7,8 млн, являющейся достаточно грубой по стандартам такого рода расчетов, еще раз подчеркивает хорошие свойства схемы «КАБАРЕ».

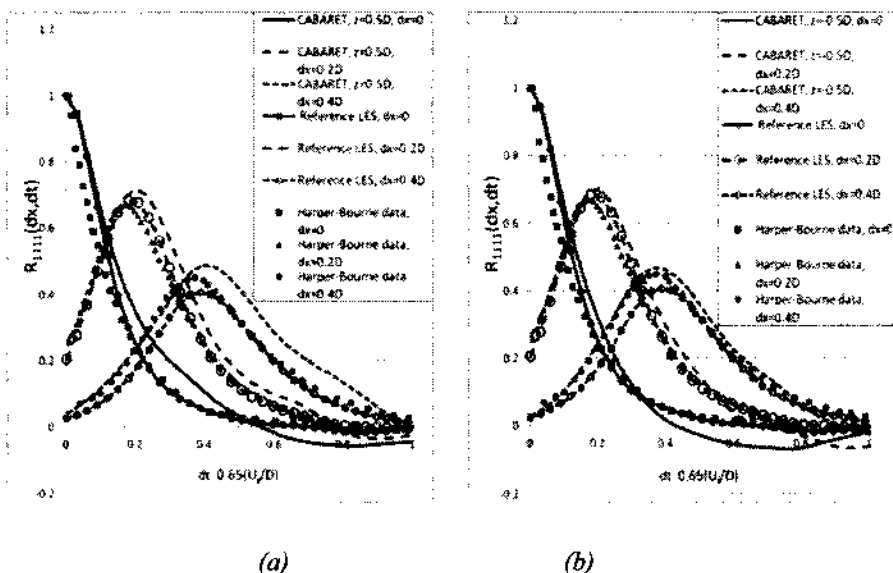


Рис. 8.14. Сравнение рассчитанных корреляционных функций $R_{1111}(x, dx, dt)$ турбулентных пульсаций скорости в струе с использованием решения LES – «КАБАРЕ» на сетке 7,8 млн ячеек и решения, приведенного в [2] на более подробной сетке с результатами измерений с использованием термоанемометра, где данные «КАБАРЕ» получены для углов струи (а) 0° и (б) 180°

8.3.3. Пример акустического постпроцессинга: дальнее поле

Прежде чем приступить к рассмотрению результатов применения интегрального метода Фокса Вильямса – Хокинга (ФВ – Х) [6] для расчета шума струи JEAN на основе решения «КАБАРЕ», представляется полезным ввести основные понятия акустики [7].

Рассмотрим неоднородное уравнение Гельмгольца – линейное волновое уравнение, описывающее перенос акустических пульсаций точечного источника в однородной среде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right) p = \delta(\mathbf{x}) \delta(t), \quad \delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \delta(x_3), \quad (8.131)$$

где источник существует только при $t > 0$, и в более раннее время $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$.

В силу симметрии задачи, решение зависит только от радиуса (r), и общее решение представляет собой сумму частных решений, соответствующих приходящей и уходящей волнам $p(\mathbf{x}, t) = \frac{\Phi(t-r/c_0)}{r} + \frac{\Psi(t+r/c_0)}{r}, r > 0$.

Условию затухания решения на бесконечности удовлетворяет только первая компонента решения $p(\mathbf{x}, t) = \frac{\Phi(t-r/c_0)}{r}$. Подставляя $p(\mathbf{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(t-r/c_0)}{(r^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}$ в (8.131), находим $\Phi(t) = \frac{1}{4\pi} \delta(t)$; полное решение представляет собой сферическую волну, расходящуюся из точки источника $p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right)$

Полезно ввести несколько определений. Точечный источник в форме элементарной пульсирующей сферы $q(\mathbf{x}, t) = \alpha \cdot \delta(\mathbf{x})\delta(t)$ амплитуды α называется точечным монополем. Точечный диполь $q_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\delta(\mathbf{x})\delta(t)\alpha_i)$ эквивалентен введению двух монопольных источников противоположных знаков на малом (по сравнению с длиной волны) расстоянии друг от друга. Например, при $\alpha_i = (\alpha_1, 0, 0)$ имеем:

$$\alpha_1 \delta(t) \cdot \delta(x_1 + \frac{1}{2}\varepsilon) \cdot \delta(x_2) \cdot \delta(x_3) - \alpha_1 \delta(t) \cdot \delta(x_1 - \frac{1}{2}\varepsilon) \cdot \delta(x_2) \cdot \delta(x_3) \approx \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(\delta(\mathbf{x}) \cdot \delta(t) \cdot \alpha_1). \quad (8.132)$$

Аналогичным образом вводится понятие квадрупольа, $q_{ij}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2(\delta(\mathbf{x})\delta(t)\alpha_{ij})}{\partial x_i \partial x_j}$, который соответствует второй производной, или двум точечным диполям противоположной направленности, или четырем монополями.

Для иллюстрации рассмотрим представление уравнений движения в виде волнового уравнения в рамках акустической аналогии Лайтхилла [8]. Исходные уравнения Навье – Стокса для плотности импульса ρu_i имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i = 0, \quad (8.133)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} f^{(2)}, \quad (8.134)$$

где p – давление, $\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор вязких напряжений вследствие «сдвиговой» компоненты вязкости, $f^{(2)} = (\xi + \frac{1}{3}\eta) \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ – тензор вязких напряжений вследствие «объемной» компоненты вязкости. Вычитая дивергенцию (8.134), где вкладом «объемной» вязкости для акустических расчетов обычно пренебрегается, из производной по времени (8.133) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \rho u_j u_i + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} p - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_{ij}, \quad (8.135)$$

откуда следует линейное волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right) \rho = q(\mathbf{x}, t), \quad (8.136)$$

где $q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho u_j u_i + (p - c_0^2 \rho) \delta_{ij} - \sigma_{ij}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij}$, и T_{ij} – тензор напряжений Лайтхилла. Используя соотношение $p = \rho \cdot c_0^2$, справедливое в дальнем поле, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right) p = c_0^2 \cdot q(\mathbf{x}, t). \quad (8.137)$$

Введем функцию Грина, удовлетворяющую линейному волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right) G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t), \quad G(t < 0) = 0, \quad (8.138)$$

и подробнее рассмотрим решение уравнения вида (8.137) для распределенного источника. Источник в правой части может быть представлен в виде совокупности всех точечных источников – квадруполей:

$$q(\mathbf{x}, t) = \iiint q(\mathbf{y}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) d^3 y d\tau, \quad (8.139)$$

и в силу линейности левой части полное решение является суммой расходящихся волн от каждого точечного источника

$$p(\mathbf{x}, t) = \iiint q(\mathbf{y}, t) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d^3 y d\tau = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} q(\mathbf{y}, t) \delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_0}\right) d^3 y d\tau. \quad (8.140)$$

Интеграл по пространству и времени сводится к обычному интегралу по пространству, если его записать в форме запаздывающего потенциала:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} q\left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_0}\right) d^3 y. \quad (8.141)$$

Для расчета акустических пульсаций на больших расстояниях от источника используют разбиение области задачи на две подобласти – ближнюю и дальнюю от источника. В ближней зоне находятся значения параметров поля из прямого расчета или эксперимента. В дальней зоне для нахождения звука используется аппарат волновых функций Грина, построенных исходя из условия сшивки решений на границе областей. Наиболее простым из них является метод Кирхгофа [9]. В методе Кирхгофа рассматривается перенос акустических пульсаций, которые на больших расстояниях от источника за пределами области генерации звука удовлетворяют линейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p - c_0^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} p = 0. \quad (8.142)$$

Для решения задачи во всей области вводится поверхность раздела S , разделяющая всю область на внешнюю и внутреннюю зоны по отношению к источнику. Поверхность раздела выбирается так, что во внешней зоне течение газа может считаться удовлетворяющим уравнению (8.142). Поверхность S задается непрерывной функцией $f(\mathbf{x}, t)$, где $f < 0$ во внешней области и $f > 0$ во внутренней области (рис. 8.15). Введя функцию Хевисайда $H(f) = 0$ во внутренней области и $H(f) = 1$ – во внешней, вводим также обобщенную переменную $p = H(f) \cdot p$, совпадающую с давлением в области, где выполняется линейное волновое уравнение. В случае источника, движущегося со скоростью $\mathbf{V}$, движение поверхности раздела удобно согласовать с движением источника

$$\frac{\partial}{\partial t} f - v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f = 0. \quad (8.143)$$

С использованием обобщенной переменной $\bar{p} = H(f) \cdot p$ уравнение (8.142) можно переписать в виде линейного волнового уравнения с неоднородной правой частью с учетом граничных условий на поверхности S :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{p} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \bar{p} = q,$$

$$q = - \left(\frac{\partial}{\partial n} p + \frac{M_n}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} p \right) \delta(f) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [M_n p \delta(f)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [p n_i \delta(f)], \quad (8.144)$$

где $\delta(f)$ – дельта-функция Дирака, отличная от нуля на границе раздела, n – внешняя нормаль к границе, а $M_n = v_i n_i / c_0$ – число Маха в направлении нормали.

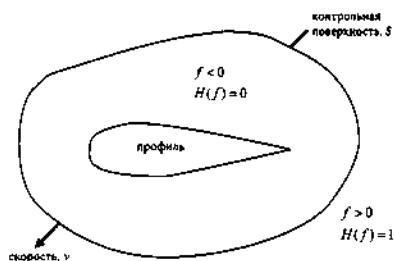


Рис. 8.15. Разбиение области решения задачи с помощью введения контрольной поверхности интегрирования для расчета шума в точке наблюдения дальнего поля

Решением данного уравнения является свертка источников правой части, зависящей от давления и его нормальной производной, с функцией Грина волнового уравнения. Поскольку все члены источника – монопольного и дипольного вида, в них присутствуют дельта-функция с центром на поверхности S , и акустический интеграл по пространству и времени сводится к трем поверхностным интегралам, записанным в форме запаздывающих потенциалов. Основным преимуществом классического метода Кирхгофа [9] является простота и универсальность его формулировки. При его использовании неважно, какими именно уравнениями движения описывается течение внутри контрольной поверхности, и расчет акустического поля сводится к вычислению поверхностных интегралов. В простоте метода Кирхгофа содержится и главный его недостаток – поверхность S обязательно должна быть настолько большой, чтобы можно было пренебречь и нелинейностью решения, и неоднородностью среднего поля за ее пределами. Другим существенным недостатком метода Кирхгофа является то, что в полученных с его использованием акустических характеристиках отсутствует какая-либо связь с аэродинамическими параметрами решения в ближней зоне источника. На поверхности Кирхгофа усредняется вся информация о физических механизмах возникновения звука.

Менее требовательным к положению контрольной поверхности и, соответственно, более точным на практике является метод Фокса Вильямса – Хоукинса (ФВ – Х), основанный на акустической аналогии Лайтхилла и рассмотренной в предыдущем разделе. Рассмотрим компоненты плотности и импульса уравнений Навье – Стокса

(8.133)–(8.134), где влияние объемной вязкости не учитывается. Аналогично методу Кирхгофа, в методе ФВ – Х в области решения строится поверхность раздела S , и вводятся обобщенные переменные $\bar{\rho}' = \rho' \cdot H(f)$, $\bar{\rho}u_j = \rho u_j \cdot H(f)$ и $\bar{\rho}u_j u_i = \rho u_j u_i \cdot H(f)$, совпадающие с физическими переменными во внешней области решения. Подстановка этих обобщенных переменных в уравнения (8.133)–(8.134) приводит к системе неоднородных уравнений во внешней области

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}' + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\rho}u_i = (\rho_0 u_n + \rho'(u_n - v_n)) \delta(f) |\nabla_x f|; \quad (8.145)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}u_j u_i + \bar{p}_{ij} - \bar{\tau}_{ij}) = (p_{ij} n_j + \rho u_i (u_n - v_n)) \delta(f) |\nabla_x f|. \quad (8.146)$$

Повторяя вывод приведения уравнений к форме линейного волнового уравнения, изложенный в предыдущем разделе для случая однородных уравнений, вычтем дивергенцию уравнения импульса (8.146) из производной по времени уравнения плотности (8.145). Введя обозначения $U_i = (1 - \rho / \rho_0) v_i + \rho / \rho_0 u_i$ и $L_i = p_{ij} n_j + \rho u_i (u_n - v_n)$, где v_i – скорость контрольной поверхности, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} c_0^2 \right) \bar{\rho}' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \bar{T}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_i} (L_i \delta(f) |\nabla_x f|) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 U_n \delta(f) |\nabla_x f|), \quad (8.147)$$

где $\bar{T}_{ij} = (\rho u_j u_i + (p' - c_0^2 \rho') \delta_{ij} - \sigma_{ij}) H(f)$ – обобщенный тензор Лайтхилла, и введены пульсации давления и плотности

Подчеркнем, что уравнение ФВ – Х (8.147) – прямое следствие определяющих уравнений Навье – Стокса, и в этом смысле оно является точным.

Рассмотрим правую часть уравнения ФВ – Х, в которой содержится три источника.

Два из них, $\frac{\partial}{\partial x_i} (L_i \delta(f) |\nabla_x f|)$ и $\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 U_n \delta(f) |\nabla_x f|)$ – это монополюный и дипольный члены, отвечающие интегрированию по поверхности S , и квадрупольный член $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \bar{T}_{ij}$, не сводящийся к поверхностному интегралу.

Квадрупольный член $\bar{T}_{ij}$, равный T_{ij} во внешней зоне решения и нулю – во внутренней, имеет смысл объемного распределенного источника звука во внешнем пространстве. В соответствии со своим определением, этот член возникает из-за влияния вязкости нелинейных эффектов волнового переноса, а также эффектов, связанных с неизоэнтропичностью течения. Исключение квадрупольного интеграла по внешнему объему области из рассмотрения крайне желательно с вычислительной точки зрения. Дело в том, что вычисление квадруполя связано с вычислением второй производной решения, точный расчет которой во внешнем объеме области связан с существенными вычислительными затратами.

Небольшой вклад квадрупольного члена в результат интегрирования звукового поля в точке наблюдателя, по сравнению с вкладами остальных членов разложения решения по сферическим функциям, в большинстве случаев невозможно доказать аналитически. В общем случае справедливость этого допущения зависит от положения

контрольной поверхности. Тем не менее, как правило, удается выбрать достаточно большую контрольную поверхность, вне которой распределением объемных источников можно пренебречь. В частности, известно, что при правильном выборе контрольной поверхности [10], метод ФВ – Х позволяет достаточно точно рассчитывать шум турбулентных струй типа струи JEAN.

8.3.4. Результаты использования метода ФВ – Х без учета внешнего квадруполья для струи JEAN

Дифференциальное уравнение ФВ – Х может быть проинтегрировано с использованием функции Грина. Если мы отбросим квадрупольный член, давление в точке наблюдателя дальнего поля будет выражаться через интегралы свертки монопольного и дипольного источника

$$p'(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_i \delta(f) \delta(g) |\nabla_i f|}{4\pi r} d^3 y d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_0 U_n \delta(f) \delta(g) |\nabla_n f|}{4\pi r} d^3 y d\tau, \quad (8.148)$$

где $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|$, $g = t - \tau - r/c$, проведена замена переменной $\rho'(\mathbf{x}, t) = p'(\mathbf{x}, t)/c^2$, предполагающая линейность и изэнтропичность течения в дальнем поле (но не на поверхности интегрирования).

Рассмотрим коническую контрольную поверхность, охватывающую струю. Поверхность начинается на срезе сопла, где ее радиус составляет 1 калибр, и простирается на 30 калибров в аксиальном направлении, линейно расширяясь в соответствии с углом расширения струи, так что на расстоянии 30 калибров она имеет диаметр порядка 5 калибров сопла.

Контрольная поверхность покоится относительно наблюдателя, что приводит к упрощению подынтегрального выражения в (8.148), а также к зависимости координаты наблюдателя от времени задержки.

Поверхность используется без замыкания, чтобы избежать численных проблем, связанных с генерацией псевдозвука при пересечении ее вихревыми структурами струи [10]. Таким образом, в расчете пренебрегаем как внешними объемными источниками, так и влиянием торцевых частей поверхности на шум. Ожидается, что с учетом большого размера поверхности, последнее допущение может быть приемлемым, по крайней мере для среднелиннх и коротких волн.

В процессе расчета по схеме «КАБАРЕ» решение на каждом слое по времени записывается на контрольную поверхность. Далее записанные данные обрабатывались специальной программой, интегрирующей уравнение ФВ – Х (8.148) для получения сигнала в требуемых точках [11]. Положение наблюдателя в эксперименте соответствовало акустическому дальнему полю $R/D = 30$. Результаты спектральной обработки этого сигнала для двух углов наблюдателя представлены на рис. 8.16. Видно, что результаты расчетов находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом (в пределах 3 дБ) в достаточно широком диапазоне частот, $S = f \cdot D/U$, $0,1 < St < 4$.

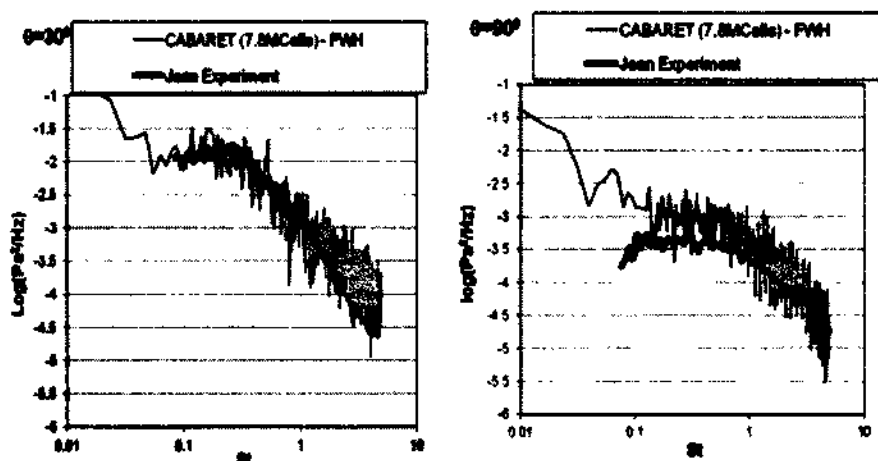


Рис. 8.16. Сравнение с экспериментом: результаты расчета дальнего поля с использованием метода «КАБАРЕ» и метода ФВ – Х для угла наблюдателя 30° и 90°

Заключение к главе 8

В данной главе было рассмотрено использование метода «КАБАРЕ» для решения уравнений Навье – Стокса в рамках приближения крупных вихрей для задачи об истечении высокоскоростной струи в затопленное пространство. Рассмотренная задача соответствует данным европейского эксперимента JEAN. Проведено сравнение результатов расчета как между двумя моделями «КАБАРЕ» на разных сетках, так и с данными эксперимента и другими имеющимися данными в литературе. Это сравнение, проведенное как в норме простых средних, так и в норме среднеквадратичных моментов, показало хорошую точность метода «КАБАРЕ». Также продемонстрирована способность метода «КАБАРЕ» на довольно грубых сетках правильно описывать моменты более высокого порядка – двухточечную функцию корреляции четвертого момента скорости. Эта функция имеет прямое отношение к источникам звука в турбулентной струе. Наконец, показано, что использование данных расчета «КАБАРЕ» в рамках классического интегрального метода расчета шума Ффокса Вильямса – Хоукинса приводит к приемлемым по точности результатам для разных углов наблюдателя в дальнем поле относительно струи и для широкого диапазона частот.

Литература к главе 8

1. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. – Москва: Мир, 1967.
2. Karabasov S.A. et al. Jet Noise – Acoustic Analogy Informed by Large Eddy Simulation // AIAA Journal. – 2010. – 48(7). – P. 1312–1325.
3. McMullan W.A. et al. Large Eddy Simulation of a High-Reynolds Number Subsonic Turbulent Jet for Acoustic Source Capture // 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2008: Vancouver, British Columbia.
4. Goldstein M.E. A Generalized Acoustic Analogy // Fluid Mech., 2003. – P. 315–333.

5. *Harper-Bourne M.* Jet Noise Turbulence Measurements // AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2003.
6. *Ffowcs Williams, J.E., Hawkins D.L.* Sound Generated by Trbulence and Surfaces in Arbitrary Motion // Philosophical Transactions of the Royal Society A264, 1969. – P. 321–342.
7. *Grace S.M.* Fundamentals of Aeroacoustics, Advances in Aeroacoustics and Applications // von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series. – Vol. 2004–05, 2004.
8. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically, I: general theory. Proceedings of the Royal Society A221, 1952. – P. 564–587.
9. *Соболев, С.Л.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966.
10. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K.* Noise Prediction for Increasingly Complex Jets. Part I: Methods and tests // International Journal of Aeroacoustics. – 2005. – 4(3-4). –P. 213–246.
11. *Morgans A.S. et al.* Transonic Helicopter Noise // AIAA Journal. – 2005. – 43(7). –P. 1512–1522.

Заключение

Несмотря на значительный объем книги, посвященной исключительно описанию одной вычислительной методики в разных областях ее применения, многие достаточно важные вопросы не нашли в этой монографии своего отражения.

Так, остались «за кадром» вопросы обобщения схемы «КАБАРЕ» на треугольные и тетраэдральные расчетные сетки. Причина здесь в том, что не все возможные варианты обобщения еще исследованы, а среди исследованных пока нет таких, которые авторов бы полностью устраивали. Работа в этом направлении ведется, и мы надеемся, что решение с желательными свойствами будет найдено.

Не описано в настоящей монографии и обобщение схемы «КАБАРЕ» на адаптивные декартовы сетки с иерархической структурой, основанной на восьмеричных деревьях с использованием усеченных ячеек. Первые обнадеживающие результаты в этом направлении получены, но работы еще не завершены.

Не удалось также включить в работу подробное описание уже реализованных структур представления данных на неструктурированных гексагональных сетках и алгоритмов распараллеливания на основе использования библиотек MPI и Open MP.

Не вошли в текст книги и результаты прямого численного моделирования пристенной турбулентности, демонстрирующие, что схема «КАБАРЕ» может быть использована для DNS-расчетов структуры потока и сопротивления в плоском канале при доступных для современной вычислительной техники числах Рейнольдса. В совокупности с описанными ранее результатами численного моделирования свободной турбулентности это свидетельствует о достаточности для описания вихревых и турбулентных течений схем второго порядка аппроксимации, что в последнее время стало подвергаться сомнению.

Аналогичное утверждение оказывается справедливым и для многих задач аэроакустики, включая расчет источников шума, которые возникают как от свободных турбулентных струй, так и при взаимодействии турбулентных струй с конструктивными элементами крыла. Это в значительной степени противоречит уже сложившемуся мнению, что для расчета таких задач следует использовать только схемы высокого порядка точности, практическая реализация которых сталкивается с немалыми техническими трудностями.

Следует еще раз подчеркнуть, что, на наш взгляд, значение имеет не сам порядок аппроксимации, а улучшение диссипативных и дисперсионных свойств схемы, с ним связанных. У схемы «КАБАРЕ» внутренняя диссипация очень мала, а в ряде случаев вообще отсутствует, кроме того, дисперсионные свойства схемы «КАБАРЕ» не уступают аналогичным свойствам многих схем высокого порядка. Все это в сочетании с максимально компактным вычислительным шаблоном делает схему «КАБАРЕ» весьма эффективным инструментом для решения задач вычислительной гидродинамики на вычислительных кластерах как существующего, так и ожидаемого в ближайшие годы быстрого действия.

Novel Algorithms of Computational Hydrodynamics for Multicore Computing

Monograph

Recommended

by the Academic Board of Faculty of Computational Mathematics
and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University
for use in educational process

This monograph is designed for students, graduate students and researchers. It contains collected and organized results of many-year work of specialists in the field of mathematical modeling and computational mathematics. Among various directions and approaches that compete in the modern world, the authors chose a relatively new area (the "CABARET" method), in the development of which they were involved. This approach, developed at Lomonosov Moscow State University, Nuclear Safety Institute, TsAGI and a number of other Russian and foreign (University of Cambridge, University of London "Queen Mary") organizations, has a good competitive position and is actively thriving.

In the monograph the key idea of the "CABARET" method is described in detail in its development – from simple linear one-dimensional hyperbolic equations to techniques for solving problems on multi-dimensional hydrodynamics and gas dynamics on unstructured grids in complex spatial domains. Such domains are characteristic in the industrial applications of mathematics.

The book can be used as a manual and a basis for the development of computational methods for solving equations of mathematical physics with the dominant process of grid transfer.

Key words: mathematical modeling, computational hydrodynamics, numerical methods, turbulent flows, parallel programming.

Contents

Chapter 1. "CABARET" scheme for elementary hyperbolic equations	19
1.1. "CABARET" scheme for elementary linear one-dimensional scalar advection equation	22
1.2. Generalized "CABARET" scheme for the one-dimensional scalar quasi-linear hyperbolic conservation laws	51
1.3. "CABARET" scheme for elementary system of quasi-linear hyperbolic equations	65
Chapter 2. Numerical modelling of one-dimensional homogeneous turbulence decay	101
Introduction	101
2.1. Finite-difference schemes	103
2.2. Computation examples	110
2.3. Energy spectra for various finite-difference schemes	113
2.4. Structure functions	117
Chapter 3. "CABARET" scheme for one-dimensional gas dynamics equations	122
3.1. "CABARET" scheme for one-dimensional gas dynamics equations in the Lagrangian variables	122
3.2. One-dimensional gas dynamics equations in the Eulerian variables	143
Chapter 4. Generalized "CABARET" scheme for two-dimensional orthogonal grids	169
4.1. Conservative and characteristic forms of the original equations	169
4.2. Riemann invariants for barotropic flows	173
4.3. Computational grids and physical values discretization	176
4.4. Conservative finite-difference scheme of the second order of approximation	177
4.5. Calculation of intermediate values of the conservative variables	178
4.6. Local invariants and their transfer within a single cell of the computational grid	180
4.7. Calculation of the new values of flux variables on the grid set $\mathcal{H}_w$	186
4.8. Sound points	188
4.9. Calculation of the new values of flux variables on the grid set $\mathcal{H}_w$	191
4.10. Boundary conditions	196
4.11. Calculation of the new values of conservative variables	202
4.12. Terms of computational stability and the calculation of the value of the time step	202
4.13. Examples of test calculations	203
4.14. Scattering of a plane sound wave on smooth vortex with constant circulation	214
4.15. Viscosity computation	219
4.16. Direct simulation of vortex pairs interaction	226
4.17. Weak compressibility approach	233

4.18. Transfer of a passive tracer	240
4.19. Generalized "CABARET" scheme in case of an incompressible fluid	247
4.20. Examples of test calculations	254
Chapter 5. Simulation of homogeneous isotropic turbulence decay with the "CABARET" method in the two-dimensional and three-dimensional incompressible fluid	260
Introduction	260
5.1. Two-dimensional simulation of turbulent flows with the "CABARET" scheme ..	263
5.2. Three-dimensional simulation of turbulent flows with the "CABARET" scheme ..	288
Chapter 6. A new parameter-free computational method for direct modelling of thermal convection in enclosed two-dimensional and three-dimensional domains	308
6.1. "CABARET" scheme for direct thermal convection modelling of incompressible fluid in two dimensions	310
6.2. Verification of the two-dimensional "CABARET" scheme for different Rayleigh numbers	320
6.3. "CABARET" scheme for direct thermal convection modelling of incompressible fluid in three dimensions	332
6.4. Verification of the three-dimensional "CABARET" scheme for different Rayleigh numbers	340
Chapter 7. "CABARET" scheme for the equations of gas dynamics on oblique-angled tetragonal grids in the case of two spatial dimensions	356
7.1. Euler equations in curvilinear coordinates	357
7.2. Difference approximation of the conservation laws	361
7.3. Flow variables calculation at the new time layer	367
7.4. Viscosity computation	375
7.5. Boundary conditions	382
7.6. Approximation problems	384
7.7. Stability conditions. Choice of the time integration step	385
7.8. Examples of test calculations	386
Chapter 8. "CABARET" scheme for three-dimensional non-stationary problems of gas dynamics on oblique-angled hexagonal grids	390
8.1. Euler equations in a curvilinear coordinate system ..	390
8.2. "CABARET" scheme for three-dimensional non-stationary problems of gas dynamics on oblique-angled hexagonal grids	414
8.3. Calculation of highly turbulent stream from a conical nozzle ..	444
Conclusion	464

Монография

Василий Михайлович Головизнин,
Михаил Арсентьевич Зайцев,
Сергей Александрович Карабасов,
Иван Александрович Короткин

**Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики
для многопроцессорных
вычислительных комплексов**

Редактор *М. С. Сафарова*

Оформление переплета *П. А. Брызгалов, Ю. Н. Симоненко*

Верстка выполнена ООО «Инновационные Лингвистические Технологии – РЭС»
www.ilt-res.com

Корректор *М. С. Сафарова*

Подписано в печать 30.11.2012.

Формат 70×100/16. Гарнитура Times New Roman.

Офсетная печать. Бумага офсетная № 1.

Усл. печ. л. 38,05 + 065 (вклейка). Тираж 1800 экз.

Изд. № 9724. Заказ № 2210

Ордена «Знак Почета» Издательство Московского университета
125009, Москва, ул. Б. Никитская 5/7.

Тел.: (495) 629-50-91. Факс: (495) 697-66-71

(495) 939-34-93 (отдел реализации)

E-mail: secretary-msu-press@yandex.ru

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“»
121099, Москва, Шубинский пер. 6